

# Representación de los latidos cardiacos mediante un autómata híbrido

Cruz Jiménez, B., Ricalde, L., Ordoñez, E.  
Facultad de Ingeniería-Universidad Autónoma de Yucatán  
Mérida, Yucatán, México  
braulio.cruz@uady.mx

*Resumen— Los sistemas dinámicos híbridos se caracterizan por la coexistencia de dinámicas continuas y discretas. Ahora es bien conocido que existen muchos sistemas dinámicos híbridos con discontinuidades tales como impacto, conmutación, fricción y deslizamiento. El modelado matemático de sistemas dinámicos híbridos es particularmente importante para la comprensión de la dinámica no lineal de los sistemas biológicos y médicos, ya que tienen muchas discontinuidades tales como el umbral de disparo en las neuronas, diferentes estados durante el ciclo cardíaco y la división en células. En este artículo se utiliza el modelo del autómata híbrido para integrar los estados de la dinámica del ciclo cardíaco utilizando una entrada discreta de referencia, con esto es posible generar un ECG artificial que puede utilizarse como una señal de prueba para la validación de dispositivos de procesamiento de señales ECG.*

**Palabras clave:** diástole, sístole, autómata híbrido, nodos, transiciones, ciclo límite.

## I. INTRODUCCIÓN

El término “sistema híbrido” es usado para definir una clase de sistemas con comportamientos definidos por entidades o procesos de distintas características. Estos sistemas contienen típicamente variables o señales que toman valores de manera continua y variables discretas que toman valores dentro de un conjunto finito de posibilidades.

Existen muchas razones para usar modelos híbridos para representar el comportamiento dinámico de tales sistemas. Una razón importante es la reducción de complejidad del modelo en orden, por ejemplo, en lugar de tener que representar las relaciones dinámicas a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, se puede representar el mismo sistema por un conjunto de ecuaciones simples (por ejemplo ecuaciones lineales), obteniendo así modelos simples mediante una logística de conmutación entre dichos modelos, usualmente la teoría de grafos; esta es la teoría más común en el

modelado físico de fenómenos. En control, la conmutación entre sistemas dinámicos simples ha sido usada en la práctica por muchas décadas. Los esfuerzos recientes en la investigación de sistemas híbridos típicamente se centran en el análisis del comportamiento dinámico de los mismos y tienen como meta el diseño de controladores con una estabilidad y funcionamiento garantizados (Brockett, 1993).

La mayoría de los procesos se pueden considerar sistemas dinámicos ya que sus salidas dependen de entradas y salidas anteriores. En la mayoría de las industrias existen procesos que pueden ser del tipo continuo, tipo discreto y los que combinan ambos aspectos. Éstos últimos dan lugar a lo que se conoce como sistemas dinámicos híbridos. Durante su operación, siempre será importante el poder realizar un análisis y evaluación del desempeño de los procesos actuales para verificar si éstos cumplen las especificaciones de acuerdo a lo planeado. También, es importante el contar con una herramienta para realizar la modelación de dichos sistemas. Esta herramienta debe auxiliar en la realización de una simulación del modelo del proceso obtenido, con el fin de conocer y entender su comportamiento ante diferentes condiciones o variaciones en la operación (Desphande, 1998).

Aunque se piense en el estudio de sistemas híbridos como un área individual de control relativamente nueva, muchos de los tipos de sistemas que caen dentro de esta categoría ya han sido estudiados con anterioridad, algunos campos de estudio importantes que son antecedentes a los sistemas híbridos son control bang-bang, control en modo deslizante, control digital y control de estructura variable (Brockett, 1993)

La biología de sistemas tiene como objetivo proporcionar una comprensión de los sistemas biológicos mediante el estudio de su estructura, dinámica y métodos de control. La naturaleza intrínseca multi-escala de estos sistemas, tanto en

el espacio como en los niveles de organización, y en el tiempo, los hace extremadamente difíciles de modelar de una manera uniforme, por ejemplo, por medio de ecuaciones diferenciales o procesos estocásticos discretos. Además, estos modelos a menudo no son fácilmente susceptibles de análisis formal y sus simulaciones a nivel de órganos o incluso de células con frecuencia son poco prácticas. En efecto, un problema importante es encontrar modelos computacionales apropiados que escalen bien tanto para la simulación y como para el análisis formal de los procesos biológicos. Técnicas de modelado híbrido, que combinan procesos discretos y continuos, están ganando más y más atención en la biología de sistemas, y se han aplicado con éxito para capturar el comportamiento de varios sistemas biológicos complejos, que van desde las redes genéticas, reacciones bioquímicas y los tejidos cardíacos (Aihara, y Suzuki, 2010).

El corazón humano es un sistema complejo y sin embargo robusto. Una de las señales más importantes que se relacionan con el funcionamiento del corazón humano es la señal de ECG. Es una señal variable en el tiempo que representa el potencial eléctrico generado por la actividad eléctrica en el tejido cardíaco. Un solo ciclo del ECG refleja la contracción y relajación del corazón, que conduce al corazón a la acción de bombeo; por lo que es importante contar con un modelo que permita emular el funcionamiento del corazón durante su operación (sístole y diástole), ya que la información característica extraída de la señal del ECG se puede utilizar para indicar el estado de salud cardíaca, así como un potencial problema cardíaco (Thanom, W. y Loh, R., 2012).

Se ha invertido mucho esfuerzo en el desarrollo de modelos matemáticos que describen el funcionamiento del corazón humano. Uno de los desarrollos cruciales fue realizado por Zeeman (Zeeman, 1972), donde desarrolló un modelo matemático que capturó tres importantes cualidades de las características cardíacas: (i) equilibrio estable, (ii) umbral de desencadenamiento de un potencial de acción; y (iii) retorno al equilibrio. Los modelos resultantes son una ecuación diferencial de segundo orden no lineal que representa el latido del corazón, y una ecuación diferencial de tercer orden no lineal para que pueda ser aplicado el impulso nervioso.

En (Jones y Sleeman, 2003), los autores modificaron el sistema no lineal de segundo orden

del latido cardíaco presentado en (Zeeman, 1972), mediante la adición de una variable de control de tipo de encendido-apagado que representa el marcapasos para el cumplimiento del mecanismo de contracción-relajación del corazón. La ventaja de esta adición al modelo es que la entrada adicional se puede utilizar para incorporar la ley de control para propósitos de seguimiento o generación señales ECG de manera sintética, la cual uno de sus usos es para la evaluación de los dispositivos de diagnóstico ECG de procesamiento de señales.

## II. AUTÓMATA HÍBRIDO

Un autómata híbrido es un modelo formal para un sistema dinámico con componentes discretos y continuos (Figura 1). Los nodos de la gráfica (llamados localidades) modelan los estados discretos del sistema y los arcos las transiciones discretas. El estado continuo del sistema es modelado por puntos en  $R_r$  y en cada localidad la dinámica continua es representada por condiciones de flujo generalmente bajo la forma de ecuaciones diferenciales. Es obligatorio para cada arco que tenga una localidad como final. Consecuentemente, las localidades están conectadas por arcos. El número de localidades es finito y diferente de cero. El número de arcos también es finito y diferente de cero (Favela, 1999).

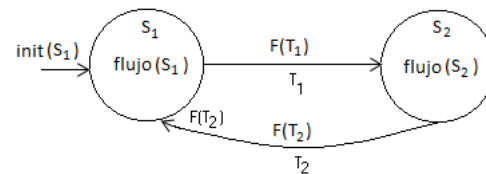


Figura 1. Modelo del autómata híbrido

Un autómata híbrido está definido completamente por  $H = \{X, S, flujo, E, F, \Sigma, init\}$  donde (Favela, 1999):

$X$  (Variables): Representa un conjunto finito ordenado  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  de variables reales.

$S$  (Nodos): Es un conjunto finito de  $n$  localidades  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  que representan los estados discretos del sistema.

*flujo* (Condiciones de flujo): Una función de flujo etiquetada como  $flujo(s_i)$  que asigna una condición de flujo a cada localidad  $s_i \in S$ .

$E$  (Transiciones): Conjunto finito  $E$  de saltos discretos llamados transiciones  $T_i$  y representados por arcos.

$F$  (Condiciones de salto): Una función etiquetada como  $F(T_i)$ , que asigna una condición de salto a cada transición  $T_i \in E$ .

$\Sigma$  (Eventos): Conjunto de eventos  $\Sigma$  tal que para cada transición  $T_i \in E$  se puede tener una entrada y/o salidas discreta para prohibir o autorizar la ejecución de la transición.

$init$  (Condición inicial): Una función etiquetada  $init(s_i)$  asigna un estado inicial a cada localidad  $s_i \in S$ .

### III. MODELO MATEMÁTICO DEL LATIDO CARDÍACO

Hay dos estados del corazón en un ciclo de un latido cardiaco: la diástole, que es el estado de relajación, y la sístole, que es el estado de contracción. El ciclo se inicia cuando el corazón está en el estado diastólico. El marcapasos que se encuentra en la parte superior de la aurícula derecha - una de las cámaras superiores del corazón - desencadena una onda electroquímica que se propaga lentamente a lo largo del atrio. Esta onda electroquímica hace que las fibras musculares se contraigan y empuja la sangre hacia los ventrículos - las cámaras inferiores del corazón. La misma onda electroquímica se propaga luego rápidamente en los ventrículos causando que todo el ventrículo se contraiga en el estado sistólico, y bombea la sangre a los pulmones y arterias. Inmediatamente después del estado sistólico, las fibras del músculo se relajan rápidamente y devuelven el corazón al estado diastólico para completar un ciclo del latido cardiaco (Thanom, W. y Loh, R., 2012).

Un modelo matemático que describe el comportamiento del latido cardiaco fue desarrollado en (Zeeman, 1972), donde se sugirió que este modelo debe contener tres elementos básicos: (i) debe exhibir un estado de equilibrio correspondiente a la diástole, o estado de relajación del corazón; (ii) debe contener un umbral para la activación de la onda electroquímica, haciendo que el corazón se contraiga y entre a la sístole o estado totalmente contraído; y (iii) debe reflejar la propiedad de un ciclo límite que incluye el rápido retorno al estado de equilibrio inicial (estado diastólico).

El modelo no lineal de segundo orden resultante está dado por (Thanom, W. y Loh, R., 2012):

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= -(x_1^3 + Tx_1 + x_2), \quad T > 0 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_d \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $x_1(t)$  representa la longitud de la fibra muscular,  $x_2(t)$  es una variable relacionada con la actividad electroquímica,  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño constante asociado con la escala de tiempo,  $x_d$  es una cantidad escalar que representa una longitud típica de fibra muscular en el estado diastólico, y  $T$  representa la tensión en la fibra muscular.

Se analiza la estabilidad del punto de equilibrio mediante el teorema de estabilidad indirecta de Lyapunov (Isidori, 1995), para ello se obtiene la matriz Jacobiana constante  $A$  de la ec. (1) en el origen, como sigue:

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon}(3x_1^2 - T) & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} -\frac{T}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{donde } f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon}(x_1^3 - Tx_1 + x_2) & x_1 - x_d \end{bmatrix}^T$$

Para  $T=1$  y  $\varepsilon=0.2$  los eigenvalores de  $A$ , se observan que son reales y positivos lo que indica inestabilidad en el origen.

Considerando los eigenvalores de la matriz  $A$  en la ec. (2), como:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\varepsilon} \left( -(3x_1^2 - T) \pm \sqrt{(3x_1^2 - T)^2 - 4\varepsilon} \right) \quad (3)$$

se establece la condición para que la parte real de los eigenvalores sea negativa como  $3x_1^2 - T > 0$ . Por lo tanto, el sistema será estable si  $x_1 \geq \sqrt{T/3}$  y  $x_1 \leq -\sqrt{T/3}$ . En otras palabras, los umbrales para el cambio entre los estados diastólico y sistólico son  $x_1 = \sqrt{T/3}$  y  $x_1 = -\sqrt{T/3}$  respectivamente. Ya que el punto de equilibrio es estable, el sistema permanecerá en ese punto a menos que haya una excitación externa que obligue al sistema a un nuevo punto de equilibrio.

En (Jones y Sleeman, 2003), los autores sugieren una modificación al sistema adicionando un señal de control  $u(t)$  como sigue:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_1 &= -(x_1^3 + Tx_1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= (x_1 - x_d) + (x_d - x_s)u \end{aligned} \quad (4)$$

donde el parámetro  $x_3$ , adicional representa una longitud típica de fibra cuando el corazón está en el estado sistólico, y  $u(t)$  representa el mecanismo de control del marcapasos cardíaco que dirige al corazón a los estados sistólico y diastólico. Proponiendo la señal de control del marcapasos cardíaco en la forma de 0 y 1 (control encendido-apagado), el punto de equilibrio del sistema se puede cambiar entre los estados diastólico y sistólico.

El modelo no lineal de tercer orden del latido cardíaco está dado por (Thanom, W. y Loh, R., 2012):

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x}_1 &= -(x_1^3 + x_1 x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - 1 + u \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $x_1(t)$  se refiere a la longitud de la fibra del musculo,  $x_2(t)$  representa la tensión en la fibra del músculo,  $x_3(t)$  está relacionado con la actividades electroquímicas,  $\epsilon$  es una constante positiva, y  $u(t)$  representa la señal de control del marcapasos cardíaco, la cual dirige al corazón al estado diastólico y sistólico.

La dinámica del sistema de tercer orden es similar al del sistema de segundo orden, excepto que la dinámica de la tensión de la fibra muscular se toma en cuenta, es decir, la constante  $T$  en el sistema de segundo orden se convierte en una variable de estado  $x_2(t)$  en el sistema de tercer orden.

#### IV. MODELO DEL AUTÓMATA HÍBRIDO

Considere el modelo autómata híbrido del sistema del latido cardíaco de la Figura 2 definido como:

$$H = \{X, S, flujo, E, F, \Sigma, \text{init}\} \quad (6)$$

donde:

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, x_2\} \\ S &= \{s_1, s_2\} \\ E &= \{T_1, T_2\} \\ F &= \{F(T_1), F(T_2)\} \\ \Sigma &= \{u\} \\ \text{init} &= \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_d = 0.7, u = 0\} \end{aligned} \quad (7)$$

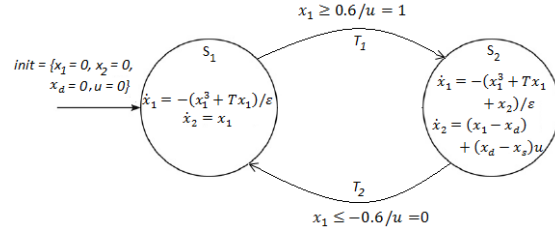


Figura 2. Automata híbrido del latido cardíaco, en el cual el estado  $S_1$  representa la sistole y  $S_2$  la diástole

Como se observa en la Figura 2, el nodo  $S_1$  representa el estado de sistole y el nodo  $S_2$  el estado de diástole. Las condiciones iniciales indican que la actividad comienza en el estado de sistole. La condición para que se active la transición  $T_1$  se obtiene a partir del punto de equilibrio de las ecuaciones de flujo del nodo  $S_1$ , es decir  $x_1 = \sqrt{T/3}$ . La transición  $T_2$  se dispara mediante la condición  $x_1 = -\sqrt{T/3}$ . Cuando la transición  $T_1$  se dispara, la señal  $u(t)$  que dirige al corazón al estado diastólico toma el valor de 1; en ese momento se entra al nodo  $S_2$ . Cuando la dinámica alcanza el valor de la condición de disparo  $T_2$  se regresa al nodo  $S_1$  (estado sistólico).

En la Figura 3 se puede observar la gráfica del comportamiento del latido cardíaco proveniente del modelo de segundo orden, en la cual la curva que inicia de primero representa el comportamiento del estado sistólico que corresponde a la contracción miocárdica, durante la cual el corazón expulsa la sangre que hay en su interior y la cual depende de la dinámica del estado  $S_1$ ; la segunda curva representa el comportamiento del estado diastólico que corresponde a la relajación cardíaca, durante el cual el corazón se llena de sangre y cuya dinámica depende del estado  $S_2$ . Para la simulación se propusieron los valores de  $T=1$  y  $\epsilon = 0.2$ .

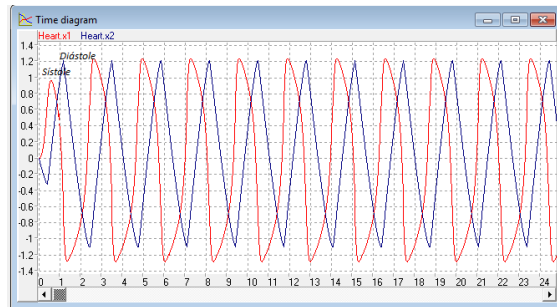


Figura 3. Comportamiento del ciclo cardíaco dependiente de los estados  $S_1$  y  $S_2$

En la Figura 4 y 5 todas las trayectorias terminan en el ciclo límite en torno al punto de equilibrio, tanto para la sístole como para la diástole, lo que revela la estabilidad del modelo del autómata híbrido y que cumple con el requisito de retorno entre estado del modelo del ciclo cardíaco.

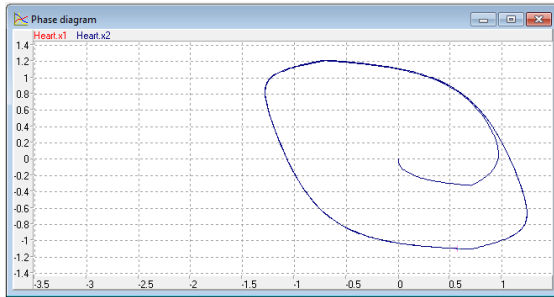


Figura 4. Ciclo límite del estado sístole de la dinámica del nodo  $S_1$

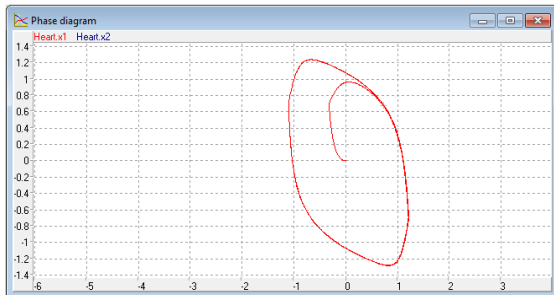


Figura 5. Ciclo límite del estado de diástole de la dinámica del nodo  $S_2$

Para el caso del autómata híbrido que utiliza el modelo de tercer orden del latido cardíaco, los resultados son similares al de segundo orden.

## V. CONCLUSIONES

Los sistemas biológicos como el que describe el comportamiento del latido cardíaco son sistemas no lineales que presentan discontinuidades asociadas con su funcionamiento. Por lo tanto, es importante contar con un modelo que pueda representar la interacción de las dinámicas tanto discretas como continuas. En este artículo se utilizó el modelo del autómata híbrido para la representación del funcionamiento del latido cardíaco. Se pudo observar que dicho modelo permite la integración de las entidades continuas y discretas. Los modelos de ritmo cardíaco resultantes son sistemas de fase mínima adecuados para el diseño de leyes de control de seguimiento; estas leyes de control de seguimiento se pueden utilizar para generar señales ECG

sintéticas que se emplearán para validar de manera satisfactoria los datos de ECG provenientes de dispositivos de procesamiento de señales cardíacos como los marcapasos.

## REFERENCIAS

Aihara, K. y Suzuki, H. (2010). Theory of hybrid dynamical systems and its applications to biological and medical systems. *Phil. Trans. R. Soc. A* (2010) 368, 4893–4914

Brockett, R.W. (1993). Hybrid models for motion control systems. *Essays on Control: of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan. pp. 1190-1195.

Desphande, A., Gollu, A. y Varaiya, P. (1998). The shift programming language and run-time system for dynamic networks of hybrid automata.

Favela, A. (1999). Hybrid Automata Models in Continuous-Linear Hybrid Systems Analysis. *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Intelligent Control/Intelligent Systems and Semiotics*, pp. 11-16.

Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*, New York: Springer-Verlag.

Jones, D.S. and Sleeman, B.C. (2003). *Differential Equations and Mathematical Biology*, Chapman & Hall/CRC, UK, 2003.

*Transactions on Automatic Control, Special Issue on Hybrid Systems*, 1998.

Thanom, W. y Loh, R. (2012). Observer-Based Nonlinear Feedback Controls for Heartbeat ECG Tracking Systems. *Intelligent Control and Automation*, 3, 251-261 doi:10.4236/ica.2012.33029 Published Online August 2012 (<http://www.SciRP.org/journal/ica>).

Zeeman, E.C. (1972). Differential equations for the heartbeat and nerve impulse. *Towards a Theoretical Biology*, Vol. 4, pp. 8-67.