

# Control Integral Discontinuo para Sistemas Mecánicos

César A. Zamora<sup>1</sup>, Jaime A. Moreno<sup>1</sup> y Shyam Kamal<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Ingeniería, UNAM, 04510, México D.F.  
cazam99@hotmail.com, JMorenoP@ii.unam.mx

<sup>2</sup> Indian Institute of Technology Bombay  
shyam@sc.iitb.ac.in

**Resumen**—Se presenta un controlador robusto, continuo y con convergencia en tiempo finito para sistemas mecánicos bajo incertidumbres y/o perturbaciones Lipschitz. Mediante un ejemplo de simulación se ilustran las características del algoritmo y a través de una función de Lyapunov se prueba la convergencia.

**Palabras clave:** Sistemas Mecánicos, Convergencia en Tiempo Finito, Robustez, Funciones de Lyapunov.

## I. INTRODUCCIÓN

Considere el siguiente modelo generalizado de sistemas mecánicos de segundo orden

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + P(\dot{q}) + G(q) + \delta(t, q, \dot{q}) = \tau \quad (1)$$

donde  $q \in \mathbb{R}^n$  son las coordenadas generalizadas,  $M(q)$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $P(\dot{q})$  es la fricción de Coulomb,  $G(q)$  es el término de fuerza gravitatoria,  $\delta(t, q, \dot{q})$  es un término de incertidumbre y  $\tau$  es el torque producido por los actuadores. Nótese que  $M(q)$  es invertible, ya que  $M(q) = M^T(q)$  es estricta positiva definida. También se supone que los otros términos son inciertos, pero se asume que las funciones nominales correspondientes  $M_n(q)$ ,  $C_n(q, \dot{q})$ ,  $P_n(\dot{q})$ ,  $G_n(q)$  son conocidas. Con las variables  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$  y  $v = \tau$ , el sistema (1) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, t) + \zeta(x_1, x_2, t, \delta, v) + M_n^{-1}(q)v \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $f(x_1, x_2, t)$  representa la parte nominal de la dinámica y está dada por

$$f(x_1, x_2, t) = M_n^{-1}(x_1)[C_n(x_1, x_2)x_2 + P_n(x_2) + G_n(x_1)]$$

y las incertidumbres se concentran en el término  $\zeta(x_1, x_2, t, \delta, v)$ . Se supone que la incertidumbre  $\zeta(x_1, x_2, t, \delta, v)$  es Lipschitz continua con respecto al tiempo. Después de sustituir el control  $u = M_n^{-1}(x_1)v + f(x_1, x_2, t)$  en (2), el sistema en lazo cerrado se puede representar como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + \zeta(x_1, x_2, t, \delta, v) \end{aligned} \quad (3)$$

El diseño de esquemas por retroalimentación que establezcan robustamente, es decir, a pesar de las perturbaciones  $\zeta$  que actúan persistentemente, el sistema (3) es uno de los problemas clásicos de control y en la literatura existe una gran cantidad de propuestas de diseño de controladores. A continuación se mencionan algunos de ellos. Uno de los algoritmos de control robusto más populares en la literatura es el control integral (Khalil, 2002)(Kokotovic, 1992), el cual es una retroalimentación proporcional e integral de los estados. Considerando que todos los estados son medibles, se ha demostrado que el control integral presenta un buen desempeño cuando es aplicado a sistemas con perturbaciones constantes, pero ya que  $\zeta(x_1, x_2, t, \delta, v)$  contiene perturbaciones variantes en el tiempo y que además no se desvanecen en el origen, un control integral no podrá estabilizar robustamente el sistema (3). Se ha probado en la literatura que la estabilización de sistemas con este tipo de perturbaciones no es fácil de lograr con controladores continuos, hasta que surgió la propuesta de una retroalimentación de alta ganancia (Kokotovic, 1992). Con el uso de altas ganancias (Zenieh y Elshafe, 2000), se puede mostrar matemáticamente que a pesar de las perturbaciones no desvanecientes en el origen el sistema (3) se puede estabilizar, pero ya que teóricamente este control tiene magnitud infinito en la práctica es difícil de implementar debido a las restricciones de los actuadores. Finalmente se probó que con el uso de controladores discontinuos se puede estabilizar el sistema (3), con perturbaciones acotadas no desvanecientes en el origen y variantes en el tiempo (Utkin, 2009). Algunos de los algoritmos discontinuos más confiables que pueden ser aplicados a plantas bajo condiciones de incertidumbre o perturbaciones son los controladores por modos deslizantes de primer orden (SMC) (Utkin, 2009), (Davila, *et al*, 2006). La principal característica de estos controladores es que las trayectorias son llevadas a una superficie de deslizamiento, en donde el switcheo del control es usado para mantener las trayectorias en dicha superficie (Utkin, 2009). A pesar de que este switcheo a altas frecuencias, conocido como *chattering*, es teóricamente deseable desde el punto de vista de robustez, en la práctica es difícil de implemen-

tar debido a restricciones físicas, como la velocidad de procesamiento, retrasos en convertidores A/D y D/A, entre otros (Utkin, 1992). Para evitar este problema se empezó a trabajar en los “modos deslizantes de alto orden”(Fridman y Levant, 2002). Uno de los controladores más prometedores en esta dirección es el algoritmo Super-Twisting (STA) (Levant, 1993),(Moreno and Osorio, 2012), (Moreno, 2008). A pesar de que este controlador también contiene discontinuidades, estas aparecen en sus derivadas de alto orden, por lo que la señal de control se vuelve continua. El uso del STA prácticamente resuelve el problema del *chattering*, pero la convergencia de los estados al origen es asintótica, y en muchas aplicaciones de sistemas mecánicos un aspecto importante es el tiempo de convergencia, por lo que es deseable tener convergencia en tiempo finito y no solo convergencia asintótica. Por lo que se empezaron a buscar alternativas más prometedoras con controladores de segundo orden, los cuales pueden resolver el problema de estabilización en tiempo finito. Existen varias posibilidades dentro de los cuales están los algoritmos Terminal, Twisting, Sub-optimal, entre otros (Levant, 2007). Pero junto con la solución al problema de convergencia robusta y en tiempo finito, vuelve a aparecer el problema de *chattering*. Por lo que en la literatura se propuso el uso de un controlador de modos deslizantes de tercer orden (Fridman y Levant, 2002), pero para implementar controladores de modos deslizantes de tercer orden, es necesario conocer  $\dot{x}_2$ , esto implica tener un conocimiento anticipado de la perturbación, lo cual no se considera en este caso. Por lo que la estabilización de un sistema mecánico incierto o perturbado, en tiempo finito y con una señal de control continua es un aspecto aún no resuelto. El tema principal de este artículo es proponer una solución a este problema, el cual es importante no solo desde el punto de vista teórico, sino también por la amplia gama de aplicaciones que se tienen para sistemas mecánicos.

El objetivo es entonces diseñar un controlador continuo, que a partir de la posición y velocidad  $(x_1, x_2)$ , establezca los estados del sistema (1) en tiempo finito, incluso en la presencia de incertidumbres, dinámicas no modeladas y/o perturbaciones variantes en el tiempo.

Por simplicidad solo se considerará el caso escalar  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , para el caso vectorial el controlador se construye igual y de forma paralela para cada variable  $x_1$  y  $x_2$ .

*Notación 1:* En adelante se usará una notación especial, la cual permitirá escribir las ecuaciones de una manera más corta, y que facilite su visualización.

Para una variable real  $z \in \mathbb{R}$  elevada a una potencia  $p \in \mathbb{R}$  tenemos

$$[z]^p = |z|^p \text{sgn}(z)$$

entonces  $[z]^2 = |z|^2 \text{sgn}(z) \neq z^2$ . Si  $p$  es un número impar el cambio de notación no afectaría el significado de la ecuación, es decir,  $[z]^p = z^p$ .

A continuación se muestran algunos ejemplos para la nueva

notación:

$$\begin{aligned} [z]^0 &= \text{sgn}(z), & [z]^0 z^p &= |z|^p \\ [z]^0 |z|^p &= [z]^p, & [z]^p [z]^q &= |z|^{p+q} \end{aligned}$$

## II. ALGORITMO PROPUESTO

*Teorema 1:* El control definido por

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sgn}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(x_2) + z \\ \dot{z} &= -k_3 \text{sgn}(x_1) \end{aligned} \quad (4)$$

estabiliza robustamente y en tiempo finito al origen del sistema (3) para toda perturbación  $\zeta(x_1, x_2, t, \delta, v)$  Lipschitz con respecto al tiempo, si las ganancias  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son diseñadas adecuadamente.

La prueba del Teorema se hará en la sección III usando una función de Lyapunov.

Al aplicar el algoritmo (4) en el sistema (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sgn}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(x_2) + z \\ &\quad + \zeta(x_1, x_2, t, \delta, v) \\ \dot{z} &= -k_3 \text{sgn}(x_1) \end{aligned}$$

si se considera  $x_3 = z + \zeta(x_1, x_2, t, \delta, v)$ , entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sgn}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3 \text{sgn}(x_1) + \dot{\zeta}(x_1, x_2, t, \delta, v) \end{aligned} \quad (5)$$

en donde (5) se puede ver como una inclusión diferencial que es homogénea (Levant, 2005) con grado  $\delta_f = -1$  y los pesos  $\varrho = [3 \ 2 \ 1]$  y las soluciones se entienden en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). Nótese que no es necesario retroalimentar a  $z$  y este algoritmo también coincide con los controladores de modos deslizantes de segundo orden en los que solo se requieren los estados  $x_1$  y  $x_2$  para estabilizar el sistema en tiempo finito, pero a diferencia de dichos controladores este esquema lo logra a través de una señal de control continua. La causa de esto radica en la acción integral que se agrega y por tanto en la clase de perturbaciones para las que cada controlador es insensible, por ejemplo, mientras que para el algoritmo Twisting se requiere que el término de perturbación sea acotado, el algoritmo propuesto requiere que el término de perturbación sea Lipschitz. A pesar de estas diferencias existe una amplia clase de perturbaciones que es aplicable para ambos algoritmos, esto se puede apreciar en el ejemplo de la sección IV.

## III. FUNCIÓN DE LYAPUNOV PARA EL SISTEMA DE 3º GRADO

Considere la siguiente función diferenciable

$$\begin{aligned} V(x) &= \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 |x_2|^2 + \gamma_3 |x_3|^4 + \gamma_{13} x_1 x_3 \\ &\quad - \gamma_{23} x_2 |x_3|^2 \text{sgn}(x_3) \end{aligned} \quad (6)$$

esta función es homogénea, con  $\delta_V = 4$  y los pesos  $r = [3 \ 2 \ 1]$ , se obtendrán las condiciones para los coeficientes  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23})$  y las ganancias  $(k_1, k_2, k_3)$

del algoritmo (5) tal que  $V > 0$  y  $\dot{V} < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $x \neq 0$ . La derivada temporal de (6) es

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\gamma_{13}k_3|x_1| + \gamma_{13}x_1\dot{\zeta} - 2\gamma_2k_2|x_2|^{\frac{3}{2}} \\ & -\gamma_{23}|x_3|^3 - q_{12}[x_1]^{\frac{1}{3}}x_2 + q_{23}x_2x_3 \\ & +\gamma_{23}k_1[x_1]^{\frac{1}{3}}[x_3]^2 - 4\gamma_3k_3[x_1]^0x_3^3 \\ & +4\gamma_3x_3^3\dot{\zeta} + \gamma_{23}k_2[x_2]^{\frac{1}{2}}[x_3]^2 \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$\begin{aligned} q_{12} &= \left(2\gamma_2k_1 - \frac{4}{3}\gamma_1\right) \\ q_{23} &= \left(2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3[x_1]^0[x_3]^0 - 2\gamma_{23}[x_3]^0\dot{\zeta}\right) \end{aligned}$$

**Teorema 2:** Considere la función continua y homogénea  $V(x)$  dada por (6).  $V(x)$  es positiva definida si y solo si

$$0 < \frac{3^3\gamma_{13}^4\gamma_2}{4^3\gamma_1^3} < 4\gamma_2\gamma_3 - \gamma_{23}^2$$

con  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{13} > 0$ .  $\dot{V}$  dada por (7) es negativa definida para todo valor de la perturbación que satisface  $|\dot{\zeta}| \leq \Delta$  si

$$k_3, \gamma_{23} > 0$$

y existe una  $\alpha > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \alpha &< 2\frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |q_{12}|^3}{3^3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)}} \\ \phi(\alpha) &< v(\alpha) \end{aligned} \quad (8)$$

donde

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23}k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3q_3 - \sqrt{\tau}) \quad (9)$$

con

$$\tau = \frac{2^2\gamma_{23}^3k_1^3(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2}{3^3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)(2\gamma_2k_2 - \gamma_{23}k_2\alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |q_{12}|^3}$$

En este caso  $V(x)$  satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{V} \leq -\kappa V^{\frac{3}{4}}$$

para algún valor positivo de  $\kappa$  y siendo una función de Lyapunov para el sistema (5), las trayectorias convergen al origen en tiempo finito para cualquier valor de la perturbación  $|\dot{\zeta}| < \Delta$ . El tiempo de convergencia de las trayectorias partiendo de una condición inicial  $x_0$  se puede estimar con

$$T(x_0) \leq \frac{4}{\kappa} V^{\frac{1}{4}}(x_0) \quad (10)$$

#### IV. RESULTADOS DE SIMULACIÓN DE UN SISTEMA MECÁNICO

Con el fin de resaltar las ventajas del algoritmo propuesto sobre otros algoritmos por modos deslizantes de segundo orden, particularmente el algoritmo Twisting, se presenta la simulación de un sistema mecánico con la aplicación de estos dos algoritmos. Considere el modelo de la dinámica de un péndulo que está dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{Mgl}{2J}\sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 + \rho \end{aligned}$$

donde  $x_1 = \theta$  es el ángulo de oscilación,  $x_2 = \dot{\theta}$  es la velocidad angular,  $M$  es la masa del péndulo,  $g$  es la fuerza gravitatoria,  $l$  es la longitud del péndulo,  $J = Ml^2$  es la inercia,  $V_s$  es el coeficiente de fricción viscosa, y  $\rho(t) = 0,5\sin(2t) + 0,5\cos(5t)$ . Los valores usados en la simulación son  $x_1(0) = -1$ ,  $x_2(0) = 3$ ,  $l = 1(m)$ ,  $M = 1,1(kg)$ ,  $g = 9,815(m/s^2)$ ,  $V_s = 0,18(kg \cdot m/s^2)$ ,  $k_1 = 7$ ,  $k_2 = 5$  y  $k_3 = 5$ .

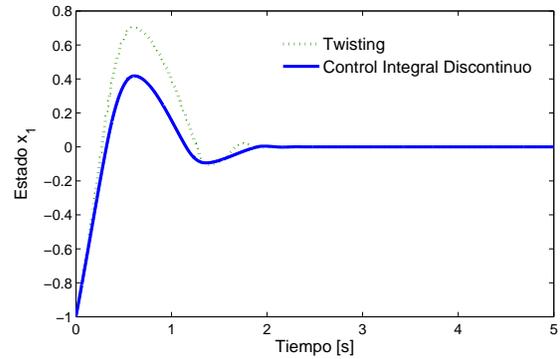


Figura 1. Respuesta de  $x_1$  con Twisting y el CID

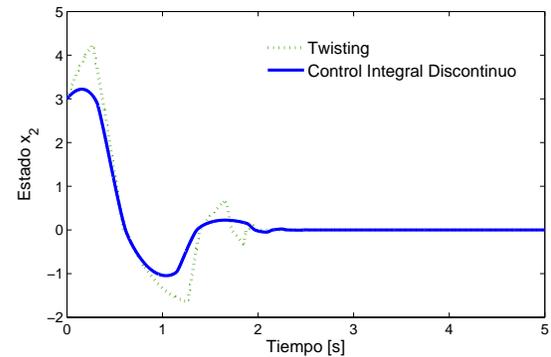


Figura 2. Respuesta de  $x_2$  con Twisting y el CID

La convergencia de los estados con ambos algoritmos es en tiempo finito, ver figuras 1 y 2, pero el algoritmo propuesto, a diferencia del Twisting, logra la convergencia del sistema con una señal de control continua, es decir, no presenta el fenómeno de *chattering*, ver figura 3.

#### V. PRUEBA DEL TEOREMA 2

##### V-A. Introducción de algunas desigualdades

**Lema 1:** (Hardy, et al, 1951) Para cualquier número real  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $p > 1$  y  $q > 1$ , con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , siempre se cumple la desigualdad

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}$$

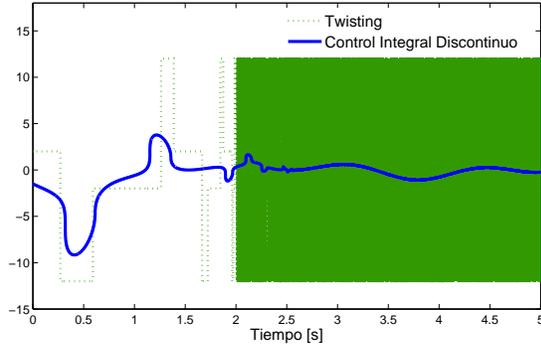


Figura 3. Señal de control del Twisting y el CID

entonces

$$|x_1||x_3| \leq \frac{3}{4}\alpha_{13}^{\frac{4}{3}}|x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4}\alpha_{13}^{-4}|x_3|^4 \quad (11)$$

$$|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_2| \leq \frac{1}{3}\beta_{12}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{12}^{-\frac{3}{2}}|x_2|^{\frac{3}{2}} \quad (12)$$

$$|x_1|^{\frac{1}{3}}|x_3|^2 \leq \frac{1}{3}\beta_{13}^3|x_1| + \frac{2}{3}\beta_{13}^{-\frac{3}{2}}|x_3|^3 \quad (13)$$

La siguiente desigualdad es una consecuencia de nuestro problema en particular

*Lema 2:* Para todo valor real de  $x_2$  y  $x_3$ , para todo valor positivo de  $\alpha > 0$  y  $\delta > 0$ , y cualquier valor de  $\lambda$ , la desigualdad

$$\lambda x_2 x_3 + \delta |x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 \leq \frac{1}{\delta} \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \delta^2 \phi |x_3|^3 \quad (14)$$

se satisface para todo  $t$ , si y solo si

$$\phi \geq \psi(\alpha, \lambda)$$

donde la función  $\psi(\alpha, \lambda)$  está definida por

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \max(0, \psi_1(\alpha, \lambda)) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha) &= -\alpha r_1^3 + \lambda r_1^2 + r_1 \\ \psi_2(\alpha) &= \alpha r_2^3 - \lambda r_2^2 + r_2 \end{aligned}$$

con

$$r_1 = \left( \frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right), r_2 = \left( \frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)$$

El lema anterior es una generalización de la desigualdad de Young cuando se consideran varios monomios. Si dejamos un solo monomio de lado izquierdo de (14), la desigualdad se reduce a la desigualdad de Young. Para esto considere el caso cuando  $\lambda = 0$  y  $\delta = 1$  en (14), entonces de

$$|x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 \leq \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} + \phi(\alpha) |x_3|^3$$

se obtiene

$$\phi(\alpha) \geq \psi_1(\alpha) = -\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{3\alpha}} \right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3\alpha}} = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$$

Para el mismo caso por la desigualdad de Young se tiene

$$|x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 \leq \frac{\theta^3}{3} |x_2|^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3\theta^{\frac{3}{2}}} |x_3|^3$$

entonces

$$\phi = \frac{2}{3\theta^{\frac{3}{2}}}; \alpha = \frac{\theta^3}{3} \rightarrow \theta^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3\alpha} \rightarrow \phi = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha}}$$

*V-B. Positividad Definida de  $V(x)$*

*Demostración:* Para probar que  $V(x)$  sea positiva (6) se puede escribir como

$$V \geq \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 |x_2|^2 + \gamma_3 |x_3|^4 - \gamma_{23} x_2 [x_3]^2 - \gamma_{13} |x_1| |x_3| \quad (15)$$

con  $\gamma_{13} > 0$ .

sustituyendo (11) en (15) se obtiene

$$V \geq \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 |x_2|^2 + \gamma_3 |x_3|^4 - \gamma_{23} x_2 [x_3]^2 - \gamma_{13} \left( \frac{3}{4} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} |x_1|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4} \alpha_{13}^{-4} |x_3|^4 \right)$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$V(x) \geq \xi^T \tilde{\Gamma} \xi$$

con

$$\xi^T = [ |x_1|^{\frac{2}{3}} \quad x_2 \quad |x_3|^2 ]$$

y

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \frac{3}{4} \gamma_{13} \alpha_{13}^{\frac{4}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & -\frac{1}{2} \gamma_{23} \\ 0 & -\frac{1}{2} \gamma_{23} & \gamma_3 - \frac{1}{4} \gamma_{13} \alpha_{13}^{-4} \end{bmatrix}$$

entonces para que  $\tilde{\Gamma} > 0$  se debe de cumplir

$$0 < \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2 \quad (16)$$

Esta condición es necesaria y suficiente para que  $V(x) > 0$  cuando  $\gamma_{13} \neq 0$ , y para todo  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{13} > 0$ .

*V-C. Negatividad definida de  $V(x)$*

La ecuación (7) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma_{13}(k_3 - \Delta) |x_1| - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - (\gamma_{23} - 4\gamma_3(k_3 + \Delta)) |x_3|^3 \\ &\quad + |q_{12}| |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_2| + \gamma_{23} k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_3|^2 \\ &\quad + \gamma_{23} k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 + \lambda x_2 x_3 \end{aligned} \quad (17)$$

con  $\gamma_{23}, \gamma_3 > 0$  y

$$\lambda = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 [x_1]^0 [x_3]^0 + 2\gamma_{23} [x_3]^0 \Delta$$

nótese que en este caso dependiendo del signo de  $x_1$  y  $x_3$ ,  $\lambda$  puede tomar cuatro valores diferentes, pero solo se consideraran el mínimo y el máximo, es decir

$$\lambda_1 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta) \quad (18a)$$

$$\lambda_2 = 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta) \quad (18b)$$

Remplazando las desigualdades (12), (13) y (14) en (17) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma_{13}(k_3 - \Delta)|x_1| - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} + \gamma_{23} k_2 \alpha |x_2|^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + |q_{12}| \left[ \frac{1}{3} \beta_{12}^3 |x_1| + \frac{2}{3} \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} |x_2|^{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad + \gamma_{23} k_1 \left[ \frac{1}{3} \beta_{13}^3 |x_1| + \frac{2}{3} \beta_{13}^{-\frac{3}{2}} |x_3|^{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad + \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) |x_3|^3 - (\gamma_{23} - 4\gamma_3 q_3) |x_3|^3 \\ &\leq -\left[ \gamma_{13}(k_3 - \Delta) - \frac{2}{3} |q_{12}| \beta_{12}^3 - \frac{1}{3} \gamma_{23} k_1 \beta_{13}^3 \right] |x_1| \\ &\quad - \left[ 2\gamma_2 k_2 - \frac{4}{3} |q_{12}| \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23} k_2 \alpha \right] |x_2|^{\frac{3}{2}} \\ &\quad - \left[ \gamma_{23} - 4\gamma_3 q_3 - \frac{2}{3} \gamma_{23} k_1 \beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) \right] |x_3|^3 \end{aligned}$$

con  $q_3 = (k_3 + \Delta)$ , entonces se deben de cumplir

$$\gamma_{13}(k_3 - \Delta) - \frac{2}{3} |q_{12}| \beta_{12}^3 - \frac{1}{3} \gamma_{23} k_1 \beta_{13}^3 > 0 \quad (19a)$$

$$2\gamma_2 k_2 - \frac{4}{3} |q_{12}| \beta_{12}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23} k_2 \alpha > 0 \quad (19b)$$

$$\gamma_{23} - 4\gamma_3 q_3 - \frac{2}{3} \gamma_{23} k_1 \beta_{13}^{-\frac{3}{2}} - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) > 0 \quad (19c)$$

para algún valor positivo de  $\beta_{12}, \beta_{13} > 0$  y  $\alpha > 0$ . De la eliminación de  $\beta_{12}$  y  $\beta_{13}$  se obtiene

$$2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha > 0 \quad (20a)$$

$$\gamma_{23} - 4\gamma_3 (k_3 + \Delta) - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha) > 0 \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} &\frac{2^2 \gamma_{23}^2 k_1^2}{3^2 (\gamma_{23} - 4\gamma_3 q_3 - \gamma_{23} k_2 \phi(\alpha))^2} < \\ &< \frac{3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)}{\gamma_{23} k_1} - \frac{2 \cdot 4^2 |q_{12}|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2} \end{aligned} \quad (20c)$$

para que la última desigualdad se cumpla se requiere

$$\frac{3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)}{\gamma_{23} k_1} > \frac{2 \cdot 4^2 |q_{12}|^3}{3^2 \gamma_{23} k_1 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}$$

entonces

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |q_{12}|^3}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta)}} \quad (21)$$

y de (20c) se obtiene

$$\phi(\alpha) < \frac{1}{\gamma_{23} k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3 q_3 - \sqrt{\tau})$$

con

$$\tau = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta) (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |q_{12}|^3}$$

Entonces las desigualdades suficientes para que  $\dot{V}(x) < 0$  son

$$\begin{aligned} \alpha &< 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |q_{12}|^3}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta)}} \quad (22) \\ \phi(\alpha) &< v(\alpha) \end{aligned}$$

con

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23} k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3 q_3 - \sqrt{\tau}) \quad (23)$$

	Figura 4	Figura 5
$k_1$	1	7
$k_2$	3	5
$k_3$	0.15	5
$\gamma_1$	3	9
$\gamma_2$	2	0.85
$\gamma_3$	$5,6 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-4}$
$\gamma_{13}$	1	1
$\gamma_{23}$	0.1	0.01
$\Delta$	0	4.5
$\eta$	1.1	1.1

TABLA I  
PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN DE LYAPUNOV

#### V-D. Un caso particular

Se considera el caso cuando  $q_{12} = 0$ , es decir,  $\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1 = 0$ , entonces

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1} \quad (24)$$

y en este caso, de (22) se obtiene

$$\alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}}$$

$$\phi(\alpha) < \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \left( \gamma_{23} - 4\gamma_3 q_3 - \sqrt{\frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta)}} \right)$$

#### V-E. Validación de la Función de Lyapunov

En esta sección se tiene el propósito de determinar que ganancias  $k_1, k_2$  y  $k_3$  hacen al sistema (5) estable y la función de Lyapunov que lo demuestra, es decir, encontrar los coeficientes de la función  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}$  y  $\gamma_{23}$  que en conjunto cumplan con las desigualdades (16) y (22). De (16) se obtiene

$$\gamma_3 > \frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2}$$

sea  $\eta$  una variable positiva y que cumple  $\eta > 1$ , entonces

$$\gamma_3 = \eta \left( \frac{3^3 \gamma_2 \gamma_{13}^4}{4^4 \gamma_1^3 \gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2} \right) \quad (25)$$

mientras que a (22) se le puede dar una interpretación gráfica, en donde la curva de la función  $\psi(\alpha, \lambda)$  que cumple  $\psi(\alpha, \lambda) \leq \phi(\alpha)$ , tiene que pasar por debajo de la curva de la función  $v(\alpha)$ , dentro del intervalo permitido de  $\alpha$ , esta última condición involucra a dos funciones  $\psi$  ya que existen  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , además se considera el caso particular cuando

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1}$$

En la tabla I se presenta una serie de parámetros para los cuales la función propuesta es una función de Lyapunov.

En las figuras 4-5 se muestran las gráficas de las funciones  $v(\alpha)$ ,  $\psi(\alpha, \lambda_1)$  y  $\psi(\alpha, \lambda_2)$  correspondientes a cada columna de la tabla de parámetros que cumplen con la desigualdad (22).

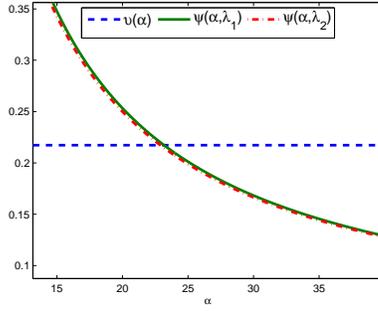


Figura 4. Gráfica de  $\psi$  y  $v$  con los parámetros de la columna 1

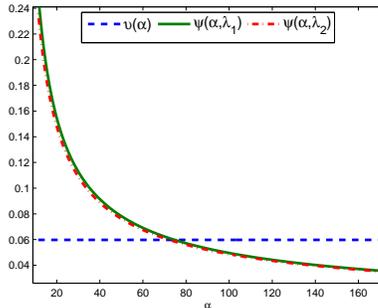


Figura 5. Gráfica de  $\psi$  y  $v$  con los parámetros de la columna 2

#### V-F. Prueba de la desigualdad diferencial $\dot{V} \leq -\kappa V^{\frac{3}{4}}$

Debido a la homogeneidad de  $V$  y  $\dot{V}$ , con los grados  $\delta_V = 4$  y  $\delta_{\dot{V}} = 3$ , respectivamente, entonces la función

$$W(x) = \frac{-\dot{V}(x)}{V^{\frac{3}{4}}(x)}$$

es homogénea de grado  $\delta_W = 0$ , y dado que  $W(x) = W(k^3 x_1, k^2 x_2, k x_3)$  para todo  $k > 0$ , todos los valores de la función son tomados en la bola homogénea unitaria, es decir,  $B_h = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1|^{\frac{2}{3}} + |x_2| + |x_3|^2 = 1\}$ . En  $B_h$  la función  $V$  y  $\dot{V}$  son continuas y diferentes de cero. Entonces  $W(x)$  tiene un mínimo positivo que puede ser calculado por  $\kappa = \min_{x \in B_h} W(x)$ . Esto implica que

$$\frac{-\dot{V}(x)}{V^{\frac{3}{4}}(x)} \geq \kappa \rightarrow \dot{V}(x) \leq -\kappa V^{\frac{3}{4}}(x)$$

De esta desigualdad diferencial se aprecia que las trayectorias convergen a cero en tiempo finito. La solución de la ecuación diferencial  $\dot{v}(t) = -\kappa v(t)$  está dada por  $v^{\frac{1}{4}}(t) = v^{\frac{1}{4}}(0) - \frac{1}{4}\kappa t$ . Por el lema de comparación se sabe que el tiempo de convergencia puede ser estimado como

$$T(x_0) \leq \frac{4}{\kappa} V^{\frac{1}{4}}(x_0)$$

## VI. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un control integral discontinuo, que a diferencia de los algoritmos por modos deslizantes que existen en la literatura, logra estabilizar en tiempo finito un sistema mecánico de segundo orden sujeto a incertidumbres y/o perturbaciones, a partir de una señal de control continua. Finalmente se ha propuesto una función de Lyapunov que además de demostrar la convergencia del controlador, es una útil herramienta en el diseño de las ganancias. Es posible extender el algoritmo propuesto a sistemas de orden arbitrario, conservando la propiedad de homogeneidad en el sistema a lazo cerrado.

## VII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero proporcionado por el PAPIIT, UNAM, proyecto IN111012 y al Fondo de Colaboración del II-FI, UNAM, IISGBAS-144-2012.

## REFERENCIAS

- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall
- Kokotovic, V. P. (1992). The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems*. 7–17.
- Zenicht, S. y A. L. Elshafe (2000). Robust control of uncertain nonlinear Mechanical systems using high gain observer. *Proceedings of the American Control Conference*. Chicago. 3621–3625.
- Moreno, Jaime A. (2012). Lyapunov function for Levant's second order differentiator. *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii, Dec. 10-13, 2012.
- Utkin, V. (2009). *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Press. Second edition. Automatic and Control Engineering.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag.
- Fridman, L. y A. Levant (2002). *Sliding Mode in Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc. High Order Sliding Modes.
- Bacciotti, A. and L. Rosier (2005). *Liapunov functions and stability in control theory*. Ed 2<sup>nd</sup>. New York. Springer-Verlag.
- Filippov, A. F. (1998). *Differential equations with discontinuous right hand side*. Kluwer. Dordrecht. The Netherlands.
- Hardy, G. H., J. E. Littlewood y G. Polya (1951). *Inequalities*. London. Cambridge University Press.
- Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*. **43**, 576–586.
- Davila, J., L. Fridman y A. Poznyak (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*. **79**, 1251–1262.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to higher-order sliding mode design. *Automatica*. **34**, 576–586.
- Moreno, Jaime A. y M. Osorio (2012). Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **54**, 1035–1040.
- Moreno, Jaime A. (2008). A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancún, México. Dec. 9–12.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*. **6**, 1247–1263.