

## Controlador PI-PD y Observador Asintótico para Sistemas Lineales de Primer Orden con Retardo.

M. A. Quiroz-Juárez, J. Moreno-Sáenz, O. Jiménez-Ramírez y R. Vázquez-Medina  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Campus Culhuacán, I P N  
DF 04430, México  
mquirozj0700@alumno.ipn.mx, jmorenos0802@alumno.ipn.mx, ojimenezr@ipn.mx,  
ruvazquez@ipn.mx

**Resumen**—En este trabajo se determinan los rangos de ganancias de un controlador Proporcional Integral-Proporcional Derivativo para estabilizar un sistema de primer orden con retardo de tiempo en la trayectoria directa. El esquema de control propuesto consta principalmente de dos partes: la primera es el estimador de estados asintótico, compuesto por la aproximación del retardo en forma racional y del proceso libre de retardo. Este esquema está generalizado para  $n$  estados, con estructura en la forma canónica observador, y la segunda parte es el controlador PI-PD.

**Palabras clave:** Realimentación, controlador PI-PD, sistema de primer orden, retardo.

### I. INTRODUCCIÓN

Existen muchos sistemas de alto orden que pueden ser modelados como sistemas de primer o segundo orden con retardo, estos sistemas son difíciles de controlar. Una forma de controlar sistemas con retardo en la trayectoria directa es utilizando el esquema propuesto por Smith (Smith, 1957), conocido coloquialmente como predictor de Smith. Esta estructura sólo aplica para sistemas estables y la idea principal es construir un filtro estimador de la señal de salida, excluyendo el efecto del retardo de tiempo, que permita generar la acción de control. Otra alternativa para controlar sistemas con retardo es aplicando estrategias para sistemas lineales representados en forma racional. Una técnica para aproximar el retardo es el uso de la aproximación de Padé (Silva et al. 2004). Con la misma idea de predecir la señal antes del retardo, se propone un estimador de estados (Jiménez, 2011) que se determina de una representación en variables de estado de un sistema con retardo en la forma canónica observador. Se diseña un controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID), con una estructura de control en la que se incluye un estimador continuo asintótico; los resultados que presentan cuentan con oscilaciones aceptables.

Los controladores PID se utilizan ampliamente en procesos industriales por varias razones: a) un proceso sin un término integral presenta error en estado estacionario, se requiere un integrador para eliminarlo ante una entrada escalón; b) las respuestas típicas de los procesos pueden ser modeladas con funciones de transferencia que pueden ser

controladas fácilmente con un controlador PID; c) se puede aplicar una simple prueba en lazo cerrado, tal como las de (Åström y Hängglund, 1984), que a menudo proporcionan un buen ajuste para procesos que oscilen al variar la ganancia proporcional.

En los últimos años, varios enfoques han sido sugeridos para mejorar la sintonización del controlador PID, por ejemplo: el método de margen de fase (Åström y Hängglund, 1984), el método redefinido de Ziegler-Nichols (Åström y Hängglund, 1991), el método de diseño Internal Model Control IMC (Lee et. al 2006), métodos de diseño de margen de ganancia y de fase (Weng Khuen et al. 1995). Sin embargo, estos métodos de ajuste no siempre proporcionan respuestas de lazo cerrado satisfactorias.

El controlador PID clásico, es utilizado para el control de plantas estables con pequeños retardos, que son típicas en muchas funciones de transferencia de plantas o procesos, aunque normalmente se prefieren estructuras PI-D. Por otro lado, (Valentine y Chidambaram, 1997), proponen un controlador PID diseñado por el método de polos dominantes para un sistema de primer orden inestable con retardo de tiempo (FOPDT), y muestran que su método es superior a los trabajos anteriores. Más tarde (Park et. al. 1998), proponen una estrategia de control PID-P con un lazo de realimentación P interno que da como resultado un exceso aceptable y un pequeño tiempo de establecimiento. Kwak (Kwak et. al. 1997) demostraron por un análisis matemático que el término integrativo del controlador PID produce una limitación estructural en el control de los procesos que están constituidos por un solo integrador y el retardo. Ellos sugieren primero un lazo de realimentación interno con P para hacer una reubicación de polos y posteriormente se utiliza un controlador PID en la trayectoria directa para mejorar el desempeño del sistema.

Derek (Derek. et. al. 1999) presentaron nuevos resultados para mostrar las ventajas de una estructura de control PI-PD. Los parámetros del controlador se obtienen mediante la minimización del criterio ISTE (Integral Squared Time Error) que por lo general produce una respuesta al escalón de la forma deseable, aunque podrían ser utilizados otros criterios. Normalmente, cuanto mayor es la ponderación de tiempo utilizado, mayor es el sobre impulso y el tiempo de establecimiento es más grande. Para

utilizar este método de sintonización en la práctica, la función de transferencia de la planta tiene que ser conocida. Si se desconoce el modelo matemático, entonces, el método de relé en la realimentación se puede utilizar para la determinación de los parámetros del modelo (Atherton y Majhi, 1998). Esta estrategia evita el problema de oscilación que es debido a la acción derivativa en la trayectoria directa, que aún existe cuando se incluye un filtro. Además, la acción PD en el lazo interno de realimentación permite la reubicación de los polos, proporcionando un buen control para sistemas de lazo abierto que sean sub-amortiguados, inestables, o con un polo integrativo. Los resultados de simulación muestran una respuesta sin oscilaciones.

En este trabajo se consideran sistemas con retardo en la trayectoria directa inestables de primer orden. El esquema de control que se propone está compuesto por un observador y un control PI-PD para estabilizarlos. Se estima la señal  $W(s)$  a partir de un observador de estados, ya que no se tiene acceso a esta señal y es necesaria para cerrar el lazo de control. El objetivo de este esquema es estimar la señal del sistema antes del retardo de tiempo bajo el mismo concepto de un Predictor de Smith. El valor estimado es realimentado con un controlador PD y una ganancia unitaria. El controlador completo está compuesto por un PI en el lazo directo y el PD en la realimentación de la señal  $\hat{W}(s)$ . Para el controlador PI-PD.

El trabajo se organiza de la siguiente forma: en la sección II se presenta la realización en variables de estado del sistema de primer orden con retardo de tiempo para diseñar el observador de estados. En la sección III se determinan los rangos de las ganancias del controlador PI-PD para sistemas de primer orden. El análisis para el diseño del controlador se hace bajo la suposición de que la señal entre la planta y el retardo puede ser estimada y realimentada al sistema. La acción que se logra utilizando esta estrategia es excluir el efecto del retardo, dejándolo en cascada con el lazo cerrado, bajo el mismo concepto de un Predictor de Smith. En la sección IV se muestra un ejemplo de un sistema inestable de primer orden con retardo, al cual se aplica la estrategia de control propuesta. Se verifica el desempeño del sistema de control con simulaciones digitales, y se hace una comparación con un controlador PID cascada bajo la misma estructura de observación.

## II. REPRESENTACIÓN EN VARIABLES DE ESTADO DEL PROCESO CON RETARDO

En esta sección se obtiene un modelo matemático en espacio de estados para un proceso con retardo, lineal e invariante en el tiempo, denotado como  $P(s)$ . El retardo es racionalizado por una aproximación de Padé y generalizado para orden  $n$ . Dado el modelo  $P(s) = G(s)e^{-\tau s}$ , donde  $G(s)$  representa al proceso libre de retardo. Una representación en variables de estado para  $P(s)$  esta dada como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1)$$

De acuerdo a (Jiménez, 2011), los coeficientes de la representación en variables de estado de la ecuación (1) están dados como:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_l & 0 \\ B_{rn}C_l & A_{rn} \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} B_l \\ B_{rn}D_l \end{bmatrix} \\ C &= [D_{rn}C_l \quad C_{rn}] & D &= [D_{rn}D_l] \end{aligned} \quad (2)$$

Las matrices  $A_l$ ,  $B_l$ ,  $C_l$  y  $D_l$ , dependen de los parámetros del proceso libre de retardo. Una realización para  $G(s)$ , es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x}_l &= A_l x_l(t) + B_l u(t). \\ w(t) &= C_l x_l(t) + D_l u(t). \end{aligned} \quad (3)$$

La aproximación de Padé del termino retardo está expresada por las matrices  $A_{rn}$ ,  $B_{rn}$ ,  $C_{rn}$  y  $D_{rn}$ , que se definen en forma general por:

$$\begin{aligned} A_{rn} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_{rn} &= (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 0 \\ 2a_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2a_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$C_{rn} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

$$D_{rn} = [(-1)^n]$$

Donde los coeficientes están dados por la siguiente expresión:

$$a_{n-k} = \frac{(2n-k)}{k!} \frac{1}{(n-k)! \tau^{n-k}}. \quad (5)$$

## III. CONTROLADOR PI-PD

El esquema de control que se propone para estabilizar sistemas lineales invariantes en el tiempo, que representan plantas inestables de primer orden con retardo, se muestra en la Figura 1.

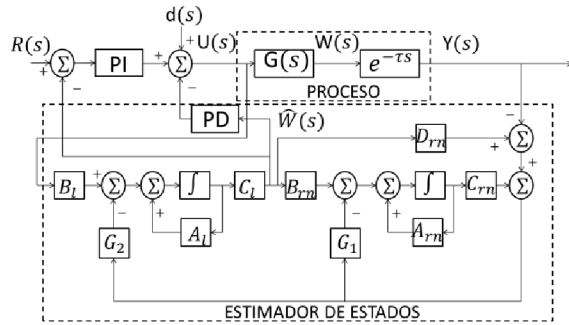


Figura. 1. Esquema del estimador con un controlador PI-PD

De acuerdo a la Figura 1, se estima la señal  $W(s)$  a partir de un observador de estados, ya que no se tiene acceso a esta señal y es necesaria para cerrar el lazo de control con la estructura propuesta. El objetivo de este esquema es estimar la señal del sistema antes del retardo de tiempo bajo el mismo concepto de un Predictor de Smith. El valor estimado es realimentado con un controlador PD y una ganancia unitaria. El controlador completo está compuesto por un PI en el lazo directo y el PD en la realimentación de la señal  $\hat{W}(s)$ . Para el controlador PI-PD, se proponen condiciones necesarias que aseguran la estabilidad de proceso con retardo en lazo cerrado bajo el esquema de realimentación de la Figura 1.

Se considera la planta libre de retardo de la forma descrita por la ecuación (6):

$$G(s) = \frac{K_1}{s-a} \quad (6)$$

Donde  $K_1 \in \mathbb{R}^+$ . El controlador Proporcional-Integral tiene una función de transferencia:

$$PI = k_p + \frac{k_i}{s} \quad (7)$$

De igual forma, para un Proporcional-Derivativo con acción derivativa pura:

$$PD = k_p + k_d s \quad (8)$$

A partir de las ecuaciones (6), (7) y (8), se determinan las condiciones necesarias que aseguran estabilidad del proceso con retardo. Para el análisis no se considera el término retardo ya que su efecto estará en cascada con  $G(s)$  en lazo cerrado, de tal forma que la ecuación característica está dada como:

$$1 + PI \cdot G(s) + PD \cdot G(s) = 0 \quad (9)$$

Sustituyendo (6), (7) y (8) en la ecuación (9) se obtiene:

$$1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right)G(s) + (k_p + k_d s)G(s) = 0 \quad (10)$$

Donde  $k_p$  es la ganancia proporcional,  $k_i$  es la ganancia integral y  $k_d$  es la ganancia derivativa. Se asume que la ganancia proporcional ( $k_p$ ), es la misma para los controladores (PI y PD), entonces la ecuación (10) puede reducirse como:

$$1 + G(s) \left( \frac{k_d s^2 + 2k_p s + k_i}{s} \right) = 0 \quad (11)$$

De la ecuación (11) es claro que la estructura del controlador empleada tiene la misma función de transferencia que un controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID), el cual aporta un polo fijo en el origen y dos ceros libres. Si se sustituye  $G(s)$  en la ecuación (11) queda:

$$s(s-a) + K_1(k_d s^2 + 2k_p s + k_i) = 0 \quad (12)$$

Agrupando los términos cuadráticos, lineales y el término independiente, se tiene:

$$s^2(1 + K_1 k_d) + s(2K_1 k_p - a) + K_1 k_i = 0 \quad (13)$$

Debido a que es un polinomio de segundo orden, la estabilidad a lazo cerrado es equivalente a que todos los coeficientes tengan el mismo signo. A partir de la ecuación (13) se deduce que los coeficientes del término cuadrático y del término independiente son positivos debido a que las ganancias  $k_d, k_i$  y  $K_1$  nunca toman valores negativos. Por lo tanto, para que el sistema sea estable se debe cumplir que:

$$k_i > 0, \quad k_d > 0, \quad k_p > \frac{a}{2K_1} \quad (14)$$

De acuerdo a las condiciones obtenidas en la expresión anterior, se observa que los rangos de ganancias no dependen del valor del retardo. Sin embargo, para que estas condiciones se cumplan, se debe garantizar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) \approx 0 \quad (15)$$

Esto implica que el orden de la aproximación que se elija para la representación del retardo sea tal que la diferencia entre la señal estimada  $\hat{W}(s)$  y la señal  $W(s)$  converjan a cero.

Un resultado que permite verificar la ecuación (14), es determinar el punto de ruptura y ratificar la posición de esté en el semiplano izquierdo, recurriendo al lugar geométrico de las raíces. Si se sustituye  $k_d = T_d k_p$  y  $k_i = k_p / T_i$  en la ecuación (13) para dejar expresado en términos de la ganancia  $k_p$  como:

$$s^2(1 + K_1 T_d k_p) + s(2K_1 k_p - a) + K_1 \frac{k_p}{T_i} = 0 \quad (16)$$

Multiplicando la ecuación (16) por  $T_i$ , y factorizando  $k_p$  se obtiene:

$$k_p(K_1 T_d T_i s^2 + 2K_1 T_i s + K_1) + T_i s^2 - a T_i s = 0 \quad (17)$$

Despejando  $k_p$  se tiene:

$$k_p = -\frac{(T_i s^2 - a T_i s)}{(K_1 T_d T_i s^2 + 2K_1 T_i s + K_1)} \quad (18)$$

Se determina  $\frac{d}{ds} k_p$  para obtener los puntos de ruptura y de llegada en el lugar geométrico de las raíces, usando la ecuación (19):

$$s = \frac{a}{1 \pm \sqrt{1 + a T_i (2 + a T_d)}} \quad (19)$$

Cuando se hace referencia al lugar geométrico de las raíces es necesaria la función de transferencia a lazo abierto  $G(s)H(s)$ , dada por la ecuación (20), donde  $H(s)$ , es el controlador (PI-PD):

$$G(s)H(s) = \frac{k_p}{T_i} \cdot \frac{(K_1 T_d T_i s^2 + 2K_1 T_i s + K_1)}{s(s - a)} \quad (20)$$

#### IV. DISEÑO DE UN ESTIMADOR CONTINUO CON UN CONTROLADOR PI-PD

Como ejemplo, considérese un sistema de primer orden inestable con retardo, con función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s - 1} e^{-s} \quad (21)$$

Las ganancias son determinadas a través del lugar geométrico de las raíces con especificaciones en el tiempo como el factor de amortiguamiento de 0.7 y una frecuencia natural no amortiguada de 4 rad/seg, de donde se obtienen las ganancias  $\{K_p = 11.09 \quad K_i = 20.19 \quad K_d = 1.52\}$ , para el controlador PI-PD que cumplen las condiciones propuestas en la ecuación (14). Adicionalmente, con fines de comparación se usan las mismas ganancias para un controlador PID cascada, como se muestra en la Figura 2. Cabe destacar que el diseño del controlador PID se hace a partir de su función de transferencia, sin tomar en cuenta las diferentes estructuras que esté podría presentar. En el caso de este trabajo, se proponen especificaciones temporales y se calculan las ganancias que las cumplen. Posteriormente ambas estructuras son sintonizadas con estos valores de ganancias para evaluar el desempeño del sistema realimentado.

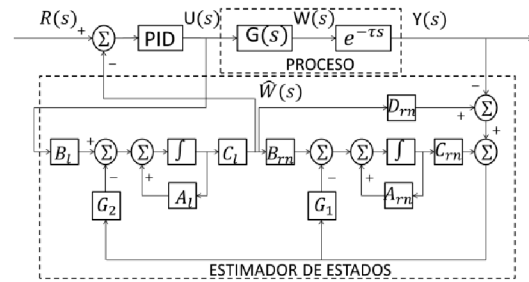


Figura 2. Esquema del estimador con un controlador PID

El diseño del estimador para el esquema de la Figura 1 y 2 se hace a partir de una aproximación de Padé de orden  $n = 4$  del término retardo, con la finalidad de estimar la variable de estado  $W(s)$  del sistema antes del retardo de tiempo, debido a que esta señal no es medible. El observador asintótico estima las variables de estado con base en la medición de las variables de salida y de control.

El vector de ganancia  $G = [G_1 \quad G_2]^T$  del estimador de estado se determina a partir de un modelo matemático continuo constituido por dos partes. La primera se obtiene del proceso libre del retardo y la segunda proviene del término retardo. El estimador de estado completo es diseñado a partir del vector de estado estimado  $\hat{x}(t)$ , donde se obtendrá la función del estado estimada  $\hat{w}(t) = [0 \quad C_i] \hat{x}(t) = [0 \quad 1] \hat{x}(t)$ .

El cálculo de las ganancias para los reconstructores puede hacerse calculando el vector  $G$  tal que las raíces de la ecuación característica  $\det(sI - (A_{r14} - GC_{lr4})) = 0$  estén ubicadas en  $\{-6, -4, -4, -4, -4\}$ . El vector resultante para esta ubicación de polos de lazo cerrado  $G = [4.3706 \quad -1.3706 \quad 118.02 \quad -496.6713 \quad 4126.7]$  para ambos esquemas.

En la Figura 3 se muestra la respuesta de los dos esquemas propuestos en las Figuras 1 y 2.

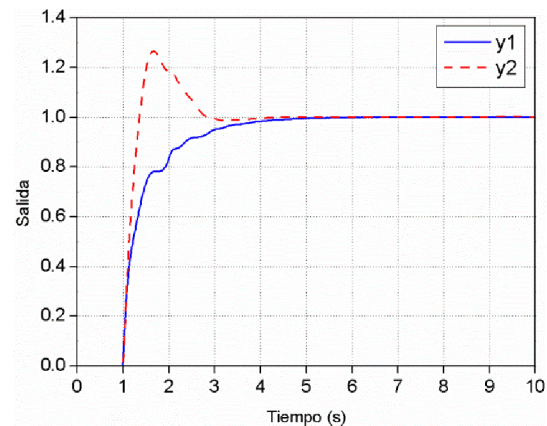


Figura 3. Respuesta de los esquemas de control propuestos con el estimador analógico

En forma comparativa se observa que la respuesta  $y_2$  correspondiente al PID tiene un máximo sobre impulso del 24% más que el valor de la entrada, mientras que en ese mismo instante  $y_1$  aún no ha rebasado la referencia. Por otra parte el tiempo de establecimiento para ambas esquemas es de 4 segundos

La Figura 4 muestra el error de estimación de cada uno de los controladores propuestos anteriormente. Es posible visualizar en la Figura 4 la respuesta del error  $e_1(t)$  tiene sobre impulsos que en magnitud están por debajo de los que presenta la respuesta  $e_2(t)$ , correspondiente al controlador PID. Sin embargo el tiempo en llegar a cero es de 4 segundos para ambos errores.

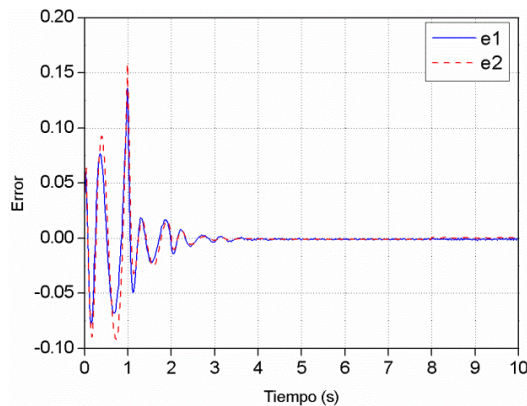


Figura 4. Respuesta de los errores de estimación.

En la figura 5 se observan las respuestas del sistema para los dos controladores propuestos ante una variación del 15% en el valor nominal del retardo, esto sin modificar la dinámica del estimador. Las magnitudes de los impulsos que presenta la respuesta  $y_1$  son inferiores con respecto a los de  $y_2$ , conservando una ligera ventaja el controlador PI-PD.

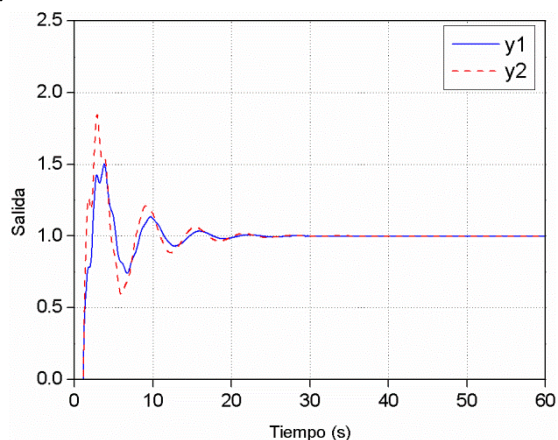


Figura 5. Respuesta de los esquemas de control propuestos con  $\tau = 1.15$  segundos.

Finalmente en la Figura 6, se muestra la respuesta obtenida de los controladores con el esquema propuesto en las Figuras 1 y 2 ante una perturbación 10 veces mayor que el valor de la referencia.

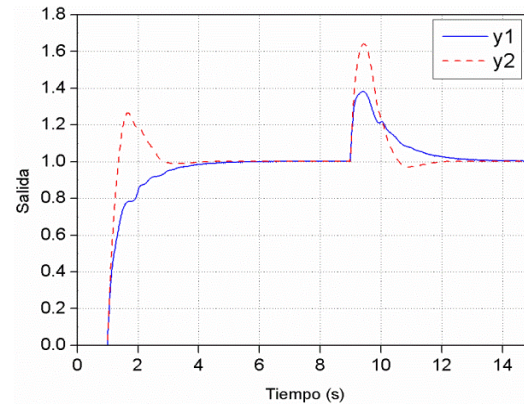


Figura 6. Respuesta de los esquemas de control propuestos ante una perturbación.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se diseñó un controlador (PI-PD), con una estructura de control en la que se incluye un estimador continuo asintótico. Se comparó con un PID en cascada, ambas estructuras de control tienen las mismas ganancias de sintonización. Además, se realizó el análisis analítico para la elección de las ganancias del controlador y se proponen condiciones necesarias para la estabilización de una planta de primer orden con retardo en la trayectoria directa. Se usaron ejemplos en simulación digital para evaluar el desempeño de ambas estructuras de control. Para una planta nominal de primer orden con retardo, el sistema con el controlador PI-PD presenta una respuesta transitoria sin sobre impulsos a diferencia del PID en cascada. Adicionalmente se presentan variaciones nominales del valor del retardo y perturbaciones a la entrada.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo institucional otorgado a través de la COFAA-IPN y los recursos recibidos por el Programa Institucional de Formación de Investigadores del IPN. Jairo Moreno Sáenz y Mario Alan Quiroz Juárez agradecen la beca otorgada por CONACyT para sus estudios de maestría. Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto SIP IPN 20130461, ICYTDF/325/2011 a quien se le agradece especialmente.

## REFERENCIAS

- Åström K.J. and T. Hägglund, "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins," *Automatica*, 20 pp. 645-651, 1984
- Åström, K. J. y Häng, C. C. Lim, B. C. A New Smith Predictor for Controlling a Process with an Integrator and Long Dead-Time. *IEE Trans. Auto. Control* 1994, 39 (2), 343.
- Åström, K. J. y Häng, T. PID Controllers, theory, design and tuning. 2nd Edition; ISA Publishers: Research Triangle Park, NC, 1995.
- Atherton D.P. and S. Majhi, "Plant parameter identification under relay control," *Proc. IEEE Conf. on Control and Decision*, Tampa, USA, pp. 1272-1277, 1998.
- Derek P. Atherton and S. Majhi, "Limitations of PID controllers," *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego California, pp 3843-3847, 1999.

- Hang C.C., K.J. Åström and W.K. Ho, "Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula," *IEE proc.-Control Theory Appl.*, 138(2) pp. 111-118, 1991.
- Jimenez-Ramirez O., M. A. Quiroz-Juarez, R. Vazquez-Medina, Observer Generalized Representation to Unstable Delayed Systems. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, Volume 132, Informatics in Control, Automation and Robotics (Springer), December 2011.
- Jimenez-Ramirez O., M. A. Quiroz J., M. A. Mondragon G., R. Vazquez M., Representacion Canonica en Variables de Estado Observador para Sistemas con Retardo de Tiempo. (octubre 2011 ) AMCA 2011.
- Kwak H.J., S.W. Sung and I. Lee, "On-line process identification and autotuning for integrating processes," *Ind. Eng. Chem. Res.*, 36, pp. 5329-5338, 1997.
- Lee Y., S. Park, and M. Lee, "Consider the generalized IMC-PID method for PID controller tuning of time-delay processes", *Hydrocarbon Processing*, 2006, pp. 87-91.
- Lee, Y.H., y Lee, J.S. PID controllers tuning for integrating and unstable processes with time delay. *Chem. Eng. Sci.*, 2000, 55, pp. 3481-3493.
- Majhi, S. y Atherton D. P. Modified Smith Predictor and Controller for Processes with Time Delay. *IEE Proc. CTA* 1999, 146 (5), 359.
- Majhi, S. y Atherton D. P. Obtaining Controller Parameters for a New Smith Predictor Using Autotuning. *Automatica* 2000, 36, 1651.
- Mason S. J.. Feedback Theory-Some Properties of Signal Flow Graphs. *Proc. IRE* Vol. 41, No. 9, 1144-1156, Sept. 1953.
- Park J.H., S.W. Sung and I. Lee, "An enhanced PID control strategy for unstable processes," *Automatica*, 34(6), pp. 751-756, 1998.
- Silva Guillermo J., Aniruddha Datta, y S.P. Bhattacharyya (2004). PID Controllers for Time-Delay Systems, Birkhäuser. USA, 82-85.
- Valentine C.C. and M. Chidambaram, "PID control of unstable time delay systems", *Chem. Eng. Comm.*, 162, pp. 63-74, 1997.
- Weng Khuen, Chieh Chong Hang y Lisheng S. Cao, "Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications," *Automatica.*, 31(3) pp.497-502, 1995.