

Simplificación de Modelos de Cuadrirotos

M. González-Sánchez, L. Amézquita-Brooks, E. Liceaga-Castro

Universidad Autónoma de Nuevo León, FIME-CIIA

Carr. A Salinas Victoria Km 2.3, C.P. 66600, Apodaca NL, México

Email: mario.gonzalezsnc@uanl.edu.mx, amezquita-brooks@ieee.org, e.liceaga.c@gmail.com

Teléfono: (52)-81-13404020, ext. 2228

Resumen— En este artículo se presenta una serie de modelos de diseño para el vehículo quadri-rotor. Entre estos se incluye un modelo completo no lineal que contiene las dinámicas más relevantes. Este modelo utiliza una estructura aeronáutica tradicional. Esta estructura puede no ser la mejor para el diseño típico de controladores no lineales, pero es útil para la simulación y evaluación de variables aeronáuticas. Así mismo, en este artículo se deriva un segundo modelo no lineal, que resulta ser equivalente al anterior. Este modelo cumple con la estructura típica de un modelo en espacio de estados utilizada para la mayoría de los métodos de diseño de controladores no lineales. Una desventaja es que ambos modelos aún son complejos, lo cual puede complicar el diseño de leyes de control. Para resolver este problema se deriva un modelo simplificado con el que es posible diseñar controladores más simples. Finalmente, a través de un conjunto de simulaciones, se investiga el rango de validez del modelo simplificado, que resulta ser suficiente para el seguimiento de trayectorias de alto desempeño.

Palabras clave: Aeroespacial, Cuadrirotor, Modelado, Control lineal.

I. INTRODUCCIÓN

El uso de vehículos aéreos no tripulados (UAV's, por sus siglas en inglés) se está convirtiendo en parte de los procedimientos normales de operación para muchos organismos públicos y privados. En particular, las aplicaciones de seguridad, vigilancia e investigación son extensas (Davis *et al.*, 1998). El crecimiento de estas aplicaciones ha traído avances tecnológicos en diversas áreas tales como sensores, técnicas de programación, unidades de procesamiento digital, almacenamiento de energía, etc. (Minh, 2013).

Los UAV's pueden ser clasificados, de acuerdo a su configuración física: vehículos de ala fija o rotatoria. La aparición de nuevas aplicaciones para los UAV's también ha estimulado el diseño de configuraciones innovadoras. Por ejemplo, una combinación poco convencional de despegue/aterrizaje vertical es sugerida en (Amiri *et al.*, 2013). Otras configuraciones no convencionales, tales como un micro UAV de ducto y ciclocópteros se presentan en (Naldi *et al.*, 2010; Benedict *et al.*, 2011).

Una de las configuraciones más recurrentes en diferentes aplicaciones es el quadri-rotor, (CR) debido a su facilidad de construcción. Hay varios reportes de plataformas experimentales de CR's en funcionamiento. Por ejemplo, en (Das *et al.*, 2009; Derafa *et al.*, 2011) el control basado en "backstepping" es utilizado con éxito. Otros enfoques tales

como "backstepping" adaptativo y robusto se presentan en (Choi & Bang, 2011). Técnicas como linealización por retroalimentación y control por modos deslizantes se presentan en (Daewon *et al.*, 2009; Mokhtari *et al.*, 2006). Otros esquemas de control no lineal se pueden encontrar en (Minh, 2013). Además de esquemas de control no lineal, varias aplicaciones de CR's en funcionamiento utilizan controladores lineales PI-PID tradicionales con excelentes resultados experimentales (Mellinger *et al.*, 2012). No obstante, el diseño de tales controladores PI-PID sigue siendo mayormente heurístico.

A pesar de los numerosos reportes sobre el control de CR's, existe todavía una ausencia de un modelo de diseño estándar. De hecho, la mayoría de los reportes comienzan con un procedimiento de modelado. En el contexto de las aplicaciones aeronáuticas, existen modelos de diseño estándar y ampliamente aceptados para las configuraciones de ala fija o rotatoria. Un problema con estos modelos es que están desarrollados con los marcos de referencia utilizados tradicionalmente para aplicaciones aeronáuticas. Estos sistemas de referencia no son necesariamente los más convenientes para el diseño de controladores.

En este trabajo se presenta un modelo dinámico completo de un CR que incluye todas las dinámicas comúnmente reportadas en la literatura. Posteriormente, este modelo se reordena para que tenga una estructura de espacio de estado que pueda considerarse estándar y por lo tanto se pueda utilizar con los métodos de control no lineal más comunes. Por otra parte, se muestra que este modelo también es adecuado para derivar una aproximación cuasi-lineal. Se muestra que esta aproximación contiene las dinámicas más relevantes del modelo no lineal y que es adecuada para modelar un rango de operación amplio que incluye las maniobras más importantes.

Por último, se comparan todos los modelos mediante simulaciones. Estas simulaciones permiten verificar la validez y rangos de operación de los modelos propuestos.

II. MODELO MATEMÁTICO NO LINEAL

El procedimiento de modelado para el CR se basa en la mecánica clásica de cuerpo rígido y es típico en estos modelos el uso de marcos de referencia mixtos para la medición y manipulación de las variables. No obstante, el uso de marcos de referencia mixtos añade ecuaciones sinmemoria redundantes que complican aún más el proceso de diseño del controlador. Por lo tanto, en esta sección se deriva un modelo con la estructura de espacio de estados estandarizada, que es más adecuada en el contexto del diseño de controladores.

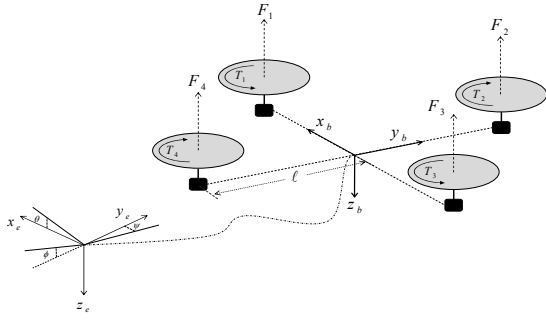


Figura 1. Marco de referencia del CR y configuración de hélices.

El CR puede ser modelado por la dinámica de cuerpo rígido en un marco de referencia inercial colocado y alineado con el vehículo (Fig. 1). En este caso, las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler están dadas por (Napolitano, 2012; Stengel, 2004; Beard & McLain, 2012):

$$m\dot{V}_b + m\omega_b \times V_b = F_b \quad (1)$$

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \times (J\omega_b) = M_b \quad (2)$$

Donde $V_b = [uvw]^T$ y $\omega_b = [p_b q_b r_b]^T$ son los vectores de velocidades lineales y angulares, F_b es el vector de fuerzas externas, m es la masa, J es la matriz de momentos de inercia y M_b es el vector de momentos externos.

Para propósitos de seguimiento de trayectoria es preferible expresar las velocidades lineales en un marco de referencia inercial terrestre denotado por $V_e = [\dot{x} \dot{y} \dot{z}]^T$. Teniendo en cuenta los ángulos de Euler $\Omega = [\phi \theta \psi]^T$ con secuencia $\psi - \theta - \phi$ (guiñada-cabeceo-alabeo), V_e se puede expresar como:

$$V_e = R^T V_b \quad (3)$$

Donde R es una matriz ortogonal compuesta por la rotación sucesiva sobre los ángulos $\psi - \theta - \phi$ (Napolitano, 2012; Stengel, 2004; Beard & McLain, 2012):

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Con $s_x = \sin(x)$ y $c_x = \cos(x)$.

De una manera similar las derivadas en el tiempo de los ángulos de Euler, que son útiles para derivar la actitud del vehículo, pueden obtenerse a partir de las velocidades angulares en el marco de referencia del cuerpo con la siguiente relación (Napolitano, 2012; Stengel, 2004; Beard & McLain, 2012):

$$\omega_b = \dot{\Phi} + R_\phi \dot{\Theta} + R_\psi R_\theta \dot{\Psi} = R_\alpha \dot{\Omega} \quad (5)$$

Donde:

$$R_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix}, \quad \Phi = [\phi \ 0 \ 0]^T \\ \Theta = [0 \ \theta \ 0]^T \\ \Psi = [0 \ 0 \ \psi]^T$$

Con $t_x = \tan(x)$.

El conjunto de ecuaciones (1)-(2), (3), (5) representa el modelo tradicional del sistema sin tener en cuenta las fuerzas aerodinámicas. En los siguientes párrafos, este modelo se manipula con el fin de llegar a la estructura deseada. Además, varias consideraciones respecto a las variables de entrada se introducen para simplificar el proceso de diseño del controlador.

Se puede demostrar (omitido aquí debido a la falta de espacio) que la ecuación (1) se puede reescribir como:

$$m\dot{V}_e = R^T F_b = F_e \quad (6)$$

Dónde F_e es el vector de fuerza en el marco de referencia inercial terrestre.

La principal fuerza aerodinámica en el cuerpo del CR es el arrastre, que se puede aproximar por $D_x = C_x \frac{1}{2} A_c \rho \dot{x} |\dot{x}|$,

$D_y = C_y \frac{1}{2} A_c \rho \dot{y} |\dot{y}|$, $D_z = C_z \frac{1}{2} A_c \rho \dot{z} |\dot{z}|$, donde C_x , C_y , C_z son coeficientes experimentales, ρ es la densidad del aire y A_c es el área del perfil del CR (Peña *et al.*, 2010). No obstante, puesto que el CR opera a bajas velocidades de traslación, las fuerzas aerodinámicas del cuerpo se pueden despreciar (Powers *et al.*, 2012). De hecho, la gran mayoría de los controladores reportados para CR's desprecian estas fuerzas. Por lo tanto, para el CR las únicas fuentes significativas de las fuerzas y momentos externos son las hélices y la gravedad. Las fuerzas inducidas por ráfagas de viento pueden considerarse como perturbaciones de entrada.

Las fuerzas generadas por las hélices y la gravedad en el marco de referencia inercial del cuerpo están dadas por:

$$F_b = R[0 \ 0 \ mg]^T - [0 \ 0 \ U_z]^T \quad (7)$$

Dónde U_z es definido como la suma de la fuerza de sustentación de todas las hélices. Por lo tanto:

$$F_e = [0 \ 0 \ mg]^T - R^T [0 \ 0 \ U_z]^T \quad (8)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6) y (8) las dinámicas de traslación se pueden expresar como:

$$m\ddot{x} = -U_z (\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\psi))$$

$$m\ddot{y} = -U_z (\cos(\phi)\sin(\psi)\sin(\theta) - \sin(\phi)\cos(\psi)) \quad (9)$$

$$m\ddot{z} = -U_z \cos(\phi)\cos(\theta) + mg$$

Además, los momentos de fuerza externos en el marco de referencia inercial del cuerpo están dados por:

$$M_b = [T_p \ T_q \ T_r]^T \quad (10)$$

Donde T_p , T_q y T_r se definen como el momento de fuerza resultante debido a las hélices en cada eje del cuerpo.

Utilizando el vector de momentos externos, definido en (10), es posible mostrar (omitido aquí debido a la falta de espacio) que la ecuación (2) puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_p + T_q s_\phi t_\theta + T_r c_\phi t_\theta}{I_\alpha} & \frac{T_z}{I_z} \\ \frac{T_q c_\phi}{I_\alpha} - \frac{T_r s_\phi}{I_z} \\ \frac{T_p}{I_\alpha T_r c_\phi + I_z T_q s_\phi} & \frac{T_z}{I_\alpha I_z c_\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi} s_\phi) \\ c_\phi \\ \dot{\phi} \dot{\psi} c_\phi \\ \dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\psi} s_\phi) \\ c_\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(I_z - I_\alpha) \dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}}{I_\alpha} (\dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} s_\phi c_\theta - \dot{\phi} s_\phi t_\theta + \dot{\psi} s_\phi s_\theta) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) c_\phi}{I_\alpha} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\phi) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) s_\phi}{I_\alpha c_\phi} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\phi) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Las ecuaciones (9) y (11) completan el modelo dinámico en espacio de estados del CR, con un vector de estados, $X = (x \dot{x} y \dot{y} z \dot{z} \phi \dot{\phi} \theta \dot{\theta} \psi \dot{\psi})^T$ y con todas las variables en el marco de referencia inercial terrestre. En la siguiente sección los momentos y fuerzas de entrada serán relacionados con los voltajes de los motores eléctricos.

II-A. Hélices y motores eléctricos

La fuerza de sustentación de la hélice se puede aproximar con $F_i = k_p V_i^2$ (Beard & McLain, 2012; Tayebi & McGilvray, 2006), donde V_i es el voltaje que se aplica al motor y la constante k_p se puede caracterizar experimentalmente para cada combinación de motor y hélice. De una manera similar, el momento reactivo generado por una sola hélice se puede aproximar con $T_i = k_m V_i^2$ (Beard & McLain, 2012; Tayebi & McGilvray, 2006), donde la constante k_m puede ser caracterizada experimentalmente para cada combinación de motor y hélice.

Otras fuerzas y momentos inducidos por las hélices son los fenómenos de alabeo y atraso-adelanto de las palas, así como las fuerzas giroscópicas en cada hélice (Bramwell, 2001; Seddon, 1990). No obstante, se ha observado que estos efectos son de menor importancia debido a la rotación simétrica impuesta a las hélices (Hossain *et al.*, 2010; Peña *et al.*, 2010).

Para que el sistema de hélices pueda producir los momentos de fuerza y las fuerzas deseadas, teniendo en cuenta la configuración de las hélices de la Fig. 1, se establece la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_3^2 \\ V_4^2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} U_z \\ T_p \\ T_q \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4k_p & 0 & 1/2\ell k_p & -1/4k_m \\ 1/4k_p & -1/2\ell k_p & 0 & 1/4k_m \\ 1/4k_p & 0 & -1/2\ell k_p & -1/4k_m \\ 1/4k_p & 1/2\ell k_p & 0 & 1/4k_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_z \\ T_p \\ T_q \\ T_r \end{bmatrix} \quad (12)$$

Un hecho importante es que la matriz P puede considerarse como una base con ejes ortogonales, por lo tanto, los efectos de las entradas deseadas $[U_z T_p T_q T_r]$ son

independientes y los voltajes de entrada están bien definidos a partir de las entradas.

III. MODELO DE DISEÑO CUASI-LINEAL

III-A. Puntos de equilibrio

Las ecuaciones (9) y (11), que representan la dinámica del CR en un marco de referencia inercial terrestre, pueden no ser la mejor opción para el diseño de controladores debido a su complejidad. De hecho, muchos de los controladores basados en modelos propuestos en la literatura tienden a ser altamente no lineales debido a esto. No obstante, el vehículo se mantiene normalmente en una vecindad del punto de equilibrio definido por:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= [0 \ 0 \ \psi_0]^T & [x_0 \ y_0 \ z_0]^T \\ \dot{\Omega}_0 &= [0 \ 0 \ 0]^T & V_{e0} = [0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned} \quad (13)$$

Es decir, el vehículo se mantiene en vuelo estacionario o a baja velocidad, lo que implica que el cabeceo y alabeo se mantienen alrededor de cero grados y el rango de operación de estos ángulos es normalmente limitado. Esta condición de funcionamiento es obvia ya que ángulos de cabeceo y/o alabeo altos apuntarían las hélices hacia un lado por lo que sería imposible mantener la sustentación. Este hecho también limita la velocidad de traslación del vehículo, ya que la traslación se consigue a través de ángulos de cabeceo y alabeo. No obstante, los puntos de equilibrio que describen velocidades de traslación constantes producen las mismas aproximaciones lineales ya que las ecuaciones (9) y (11) no dependen de las velocidades de traslación. Esto último debido a que se desprecia la resistencia aerodinámica del cuerpo por operar a bajas velocidades. Por lo tanto el punto de equilibrio (13) es, de hecho, una representación bastante aceptable de la condición normal de funcionamiento del CR.

Las entradas de equilibrio para mantener el punto de equilibrio (13) pueden ser calculadas considerando que $0 = -U_{z0} \cos(\phi_0) \cos(\theta_0) + mg$ donde el subíndice "0" denota el valor de equilibrio de la variable. Las otras entradas de equilibrio se obtienen sustituyendo (13) y $\ddot{\Omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ en (11). Por lo tanto, la entrada de equilibrio para (13) está dada por $U_{z0} = mg$, $T_{p0} = T_{q0} = T_{r0} = 0$.

III-B. Linealización y función de entrada no lineal

A pesar de que es posible obtener directamente una aproximación lineal del sistema (9), (11) alrededor del punto de equilibrio (13), se puede llegar a un mejor modelo mediante la introducción de un elemento no lineal en las entradas nominales como se muestra a continuación

En la sección pasada, las señales de entrada virtuales $[U_z T_p T_q T_r]^T$ fueron introducidas junto con su relación con los voltajes reales del motor eléctrico. Es claro que el propósito de estas señales es simplificar el proceso de diseño del controlador mediante el establecimiento de entradas que estén directamente relacionadas con las variables de estado. Sin embargo, las señales de entrada $[U_z T_p T_q T_r]^T$ fueron establecidas en el marco de referencia inercial del cuerpo y no están directamente relacionadas con las variables de estado en el marco de referencia inercial terrestre. En el caso de la variable z el canal de entrada-salida se establece como

$c_z : U_z \rightarrow z$. Recordando las ecuaciones (9), la entrada de control U_z puede ser propuesta como:

$$U_z(t) = \overline{mg} - \tilde{U}_z(t) \quad (14)$$

Donde $\overline{mg} \approx mg$ y $\tilde{U}_z(t)$ podrían calcularse con un controlador de retroalimentación apropiado.

La ecuación dinámica de x de las ecuaciones (9), introduciendo la entrada (14), da como resultado:

$$\ddot{x} = -\frac{\overline{mg} + \tilde{U}_z(t)}{m} (\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\psi)) \quad (15)$$

Si la señal $\tilde{U}_z(t)$ se considera como un esfuerzo de control emparejado con z , esto es $\tilde{U}_z(s) = C_z(s)e_z(s)$ con $e_z(s) = ref_z - z(s)$, para condiciones de operación cercanas a (13) se tiene que $\tilde{U}_z(t) \approx 0$ lo cual resulta en:

$$\ddot{x} \approx -g (\cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\psi)) \quad (16)$$

Con el fin de analizar la dinámica de traslación de x , el sistema (9), (11) puede ser reescrito con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f_{x0}(X) + g_{x0}(X, T_p, T_q, T_r) \\ y_{x0} &= h_{x0}(X) = x \end{aligned} \quad (17)$$

Con $X = (x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi})^T$. La expresión completa de $f_{x0}(X)$ y $g_{x0}(X, T_p, T_q, T_r)$ se omite debido a la falta de espacio. Sin embargo, también es un reordenamiento directo de (9) y (11). Sustituyendo (16) en (17), la dinámica de entrada-salida de x puede calcularse utilizando las derivadas de Lie como $x^{(IV)} = L_f^4 h(x) + L_g L_f^3 h(x)$ lo que se traduce en:

$$x^{(IV)} = -\overline{g}(\sigma_x + \eta_x + u_x) \quad (18)$$

Los elementos incluidos en σ_x tienen poco efecto sobre la dinámica de x si se toma en cuenta que $\sin(\delta_\phi) \approx \sin(\delta_\theta) \approx 0$, donde $\delta_\phi, \delta_\theta$ son ángulos pequeños. Por otra parte, los términos de η_x representan el acoplamiento dinámico entre los ángulos de Euler, sin embargo, este acoplamiento también es bajo si se considera que $\dot{\theta}\dot{\psi} \approx 0$. Finalmente, los elementos de u_x representan los elementos de entrada. Estos elementos pueden ser aproximados, utilizando las ecuaciones (11) y $\sin(\delta_\phi) \approx \sin(\delta_\theta) \approx 0$ como:

$$\ddot{\phi} \approx \frac{T_p}{I_\alpha} - \frac{I_z}{I_\alpha} \dot{\theta}\dot{\psi} + 2\dot{\theta}\dot{\psi}, \quad \ddot{\theta} \approx \frac{T_q}{I_\alpha} + \dot{\psi}\dot{\phi} - 2\dot{\psi}\dot{\phi} \quad (19)$$

Examinando las ecuaciones (19) y (18) se puede observar que la variable x puede ser actuada por T_q si $\psi \approx 0^\circ$, sin embargo, si $\psi \approx 90^\circ$, la variable x es ahora actuada por T_p . Por otra parte, la dinámica general de la variable x se puede aproximar con $x^{(IV)} \approx -\overline{g} \left(c_\psi \frac{T_q}{I_\alpha} + s_\psi \frac{T_p}{I_\alpha} \right)$, es decir, un integrador cuádruple con una entrada no lineal. Un resultado similar se puede derivar para la variable y , por razones de brevedad, sólo se indica la aproximación resultante

$$y^{(IV)} \approx -\overline{g} \left(s_\psi \frac{T_q}{I_\alpha} - c_\psi \frac{T_p}{I_\alpha} \right).$$

Este análisis permite proponer la siguiente definición de entrada virtual:

$$\begin{bmatrix} T_p \\ T_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & -\sin(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = R_U \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} \quad (20)$$

La ecuación (20) se compone de una rotación con una compensación de signo adicional para la entrada U_x . Esta definición de entrada virtual establece canales de entrada→salida definidos por $U_x \rightarrow x$ y $U_y \rightarrow y$ sin acoplamiento.

III-C. Modelo de diseño cuasi-lineal

El objetivo de control típico del CR es el seguimiento de trayectorias. Por lo tanto, las variables más relevantes son los vectores de posición tridimensional. Además, la guiñada del vehículo también puede ser modificada libremente sin alterar la trayectoria. Se debe tener en cuenta que el punto de equilibrio (13) está definido para valores arbitrarios de x, y, z y ψ . Por otra parte, las variables de actitud θ y ϕ , así como las derivadas de estas variables deben mantenerse cerca de cero para tener equilibrio estático (esto incluye también operación a velocidades constantes). Esto permite definir un vector de salida adecuado para la aproximación lineal deseada. En particular, es posible calcular la aproximación lineal de las ecuaciones (9) alrededor del punto de equilibrio (13), considerando las entradas virtuales definidas por (14) y (20) teniendo en cuenta los siguientes vectores de estado, de entrada y de salida:

$$\begin{aligned} U &= [U_x \ U_y \ \tilde{U}_z \ T_r]^T \quad Y = [x \ y \ z \ \psi]^T \\ X &= [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T \end{aligned} \quad (21)$$

De una manera compacta, la matriz función de transferencia de tal sistema está dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$:

$$G(s) = \text{diag} \left[\frac{g}{I_\alpha s^4} \quad \frac{g}{I_\alpha s^4} \quad \frac{1}{ms^2} \quad \frac{1}{I_z s^2} \right] \quad (22)$$

Esta aproximación lineal coincide con las dinámicas de entrada y salida aclaradas mediante las derivadas de Lie en la última sección. Además, esto demuestra que con el uso de entradas definidas por las ecuaciones (12) y (20) las dinámicas están localmente desacopladas.

El subsistema lineal resultante tiene algunas características muy interesantes:

- El vector de estado contiene 12 variables y la matriz de función de transferencia $G(s)$ es de orden 12. Por lo tanto, ninguna dinámica interna se cancela por la introducción de las transformaciones de entrada (14) y (20).
- El sistema no tiene ceros de transmisión finitos. Por lo tanto, la estabilización de las salidas del sistema (22) garantiza estabilización local del sistema. Es decir, no es **necesario** controlar directamente la actitud del CR.
- Las 4 salidas están totalmente desacopladas.

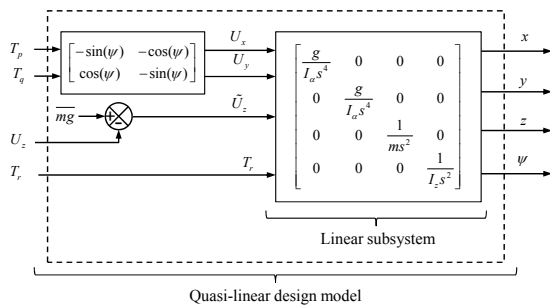


Figura 2. Diagrama de bloques del modelo de diseño cuasi-lineal.

El modelo aproximado resultante se define entonces por las ecuaciones (14), (20) y (22). Un diagrama de bloques de este sistema se muestra en la Fig. 2.

IV. COMPARACIÓN DE MODELOS

En las secciones anteriores se reportaron tres modelos diferentes, un *modelo tradicional no lineal* (TNL) definido por las ecuaciones diferenciales (1)-(2) y las ecuaciones sin memoria (3)-(5) y (7), Un *modelo no lineal modificado* (NLM) con la estructura de espacio de estado tradicional definido por las ecuaciones diferenciales (9) y (11) y un modelo aproximado, denominado *modelo cuasi-lineal* (CL), definido por una etapa no lineal de entrada sin memoria (14), (20) y un sistema lineal desacoplado (22). En esta sección se realizan una serie de simulaciones con el fin de comparar los diferentes modelos.

Un conjunto típico de parámetros para un CR se resume en la Tabla I (Tayebi & McGilvray, 2006).

TABLA I

Parámetro	Parámetros del CR Valor	Parámetro	Parámetros del CR Valor
g	9.81 m/s^2	I_z	$8.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
m	0.468 kg	k_p	2.9×10^{-5}
ℓ	0.225 m	k_m	1.1×10^{-6}
I_a	$4.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$		

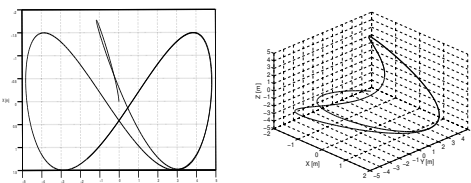


Figura 3. Trayectoria de referencia para el sistema de control CR.

Para que la comparación sea adecuada es necesario diseñar un controlador que estabilice los modelos debido a que los sistemas son inestables en lazo abierto. Además, esto permite también probar la validez del modelo CL para el diseño de controladores. Teniendo en cuenta los parámetros de la Tabla I, un controlador robusto lineal fue diseñado

según la metodología de “loop-shaping” mostrada en (Glover & McFarlane, 1992; Zhou *et al.*, 1996) **utilizando sólo el modelo CL**. Los filtros de ponderación para el lazo abierto ideal para las variables de salida se definieron como:

$$\begin{aligned} g_{dx}(s) &= g_{dy}(s) = 20/s \quad \forall \omega \in [2, 200] \\ g_{dz}(s) &= 12/s \quad \forall \omega \in [1.2, 120] \\ g_{d\psi}(s) &= 40/s \quad \forall \omega \in [3.2, 320] \end{aligned} \quad (23)$$

El controlador resultante fue capaz de estabilizar los tres modelos y de operar con un bajo rango de error de seguimiento (menor al 1%) con las trayectorias utilizadas.

Para todas las simulaciones la trayectoria de referencia se definió como una trayectoria “Lemniscata de Geronon” en el plano xy , definida por $x^4 - k_x x^2 + k_y y^2 = 0$, una oscilación periódica en la altura (z) y una oscilación periódica en la guiñada (ψ). (Fig. 3).

Se llevaron a cabo una serie de simulaciones, en las que todos los modelos fueron operados en lazo cerrado con el mismo controlador y referencia. Primero se realizó una comparación directa de las variables de salida (Fig. 4). En dicha figura se observa que todos los modelos son muy similares, de hecho no es posible discernir ninguna diferencia directamente.

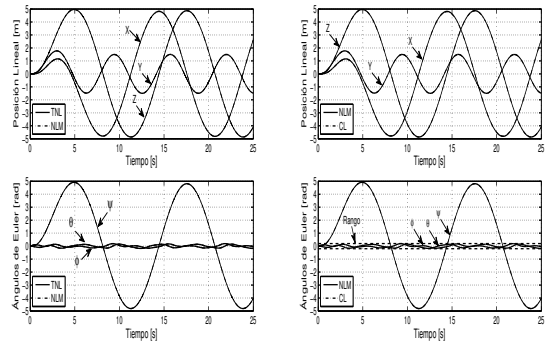


Figura 4. Comparación de las variables de salida.

Al mismo tiempo se calculó el error entre los modelos considerando al modelo TNL como el de referencia. El error para una de estas simulaciones es presentado en la Fig. 5. A partir de esta figura es evidente que el nivel de error del NLM es debido a la resolución numérica del programa. Por otra parte, el error de la aproximación CL es también muy bajo.

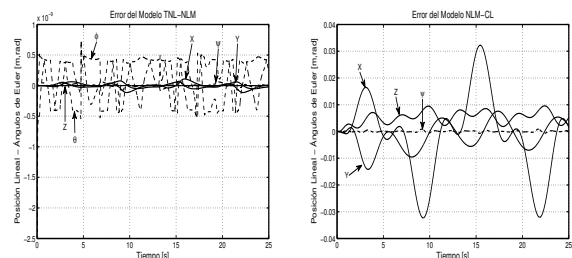


Figura 5. Error de salida del modelo.

Es posible dilucidar todo el rango de validez para el modelo CL repitiendo el procedimiento descrito anteriormente para diferentes rangos de funcionamiento. Una serie de estas simulaciones se llevaron a cabo y los

resultados se resumen en la Tabla II. En esta tabla se presenta el intervalo de funcionamiento para todas las variables y las velocidades de trayectoria junto con su correspondiente *error promedio del modelo*, que se define como $\sum_{i=1}^n \frac{\|e(i)\|}{n}$, donde $e(i)$ es el error de la i -ésima muestra

y n es el número total de muestras. De la Tabla II es posible notar que el modelo CL es bastante exacto incluso hasta en ángulos de alabeo y cabeceo cercanos a $\pi/2$. Este intervalo es suficiente para la mayoría de las maniobras de seguimiento de trayectorias de alto desempeño no acrobáticas, incluso a las más altas velocidades que el vehículo puede alcanzar.

Se puede concluir que el modelo CL es válido hasta el rango de funcionamiento definido por $\theta \in [-1.56, 1.56]$ y $\phi \in [-1.56, 1.56]$ que se traduce en velocidades de funcionamiento de 14,6 m/s, 8,7 m/s y 14,6 m/s para las variables x , y y z , respectivamente (véase la Tabla II).

TABLA II

Resultados de simulación.			
Rango (rad, m)	Salida- error promedio del modelo. (rad, m)	Entrada- error promedio del modelo. (rad, m)	Rango de Velocidades. (rad/s, m/s)
$x \in [-2.5, 2.5]$ $y \in [-0.75, 0.75]$ $z \in [-2.5, 2.5]$ $\theta, \phi \in [-0.1, 0.1]$ $\psi \in [-2.5, 2.5]$	$x = 0.0026$ $y = 0.0011$ $z = 0.0013$ $\psi = 0$	$T_p = 0.0003$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.0097$ $T_r = 0$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.75, 0.75]$ $\dot{z} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{\psi} \in [-1.2, 1.2]$
$x \in [-10, 10]$ $y \in [-3, 3]$ $z \in [-10, 10]$ $\theta, \phi \in [-0.4, 0.4]$ $\psi \in [-10, 10]$	$x = 0.0458$ $y = 0.0182$ $z = 0.0216$ $\psi = 0.0023$	$T_p = 0.0046$ $T_q = 0.0019$ $U_z = 0.1695$ $T_r = 0.0051$	$\dot{x} \in [-5, 5]$ $\dot{y} \in [-3, 3]$ $\dot{z} \in [-5, 5]$ $\dot{\psi} \in [-5, 5]$
$x \in [-28.7, 28.7]$ $y \in [-8.9, 8.9]$ $z \in [-28.7, 28.7]$ $\theta, \phi \in [-1.56, 1.56]$ $\psi \in [-28.7, 28.7]$	$x = 0.3124$ $y = 0.1366$ $z = 0.1749$ $\psi = 0.0515$	$T_p = 0.0494$ $T_q = 0.0352$ $U_z = 1.3947$ $T_r = 0.3054$	$\dot{x} \in [-14.6, 14.6]$ $\dot{y} \in [-8.7, 8.7]$ $\dot{z} \in [-14.6, 14.6]$ $\dot{\psi} \in [-19, 19]$

V. CONCLUSIONES

En este artículo se estudiaron tres modelos de diseño para el vehículo cuadri-rotor. En primer lugar se describe un modelo no lineal en la estructura aeronáutica típica que considera las dinámicas más relevantes. Aunque este modelo es muy útil para fines de descripción y simulación, su estructura no es práctica para el diseño de controladores. Debido a esto, se reestructuró este modelo a la estructura típica de espacio de estados. Este cambio facilita el diseño de sistemas de control no lineales. No obstante, ambos modelos son altamente no lineales lo que complica el diseño de leyes de control simples. Con el fin de simplificar la tarea de diseño de controladores se derivó un modelo cuasi-lineal simplificado. El rango en el que el modelo simplificado es válido fue investigado a fondo en simulación. Los resultados muestran que el modelo cuasi-lineal es válido en un rango de operación muy amplio y que es posible diseñar controladores lineales simples y efectivos a partir de este modelo.

VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer por su apoyo a los proyectos financiados por la UANL, a través del proyecto Paicyt 2011-2013 IT-843-1y a la SEP mediante el proyecto Promep 103.5/12/7884.

REFERENCIAS

- Amiri, N., Ramirez, A. & Davies, R.J. (2013), "Integral Backstepping Control of an Unconventional Dual-Fan Unmanned Aerial Vehicle", *Journal Of Intelligent & Robotic Systems*, **69**(1-4), 147-159.
- Benedict, M., Chopra, I. & Gupta, R. (2011), "Design, Development and Flight Testing of a Twin-Rotor Cyclocopter Micro Air Vehicle", *67th Annual National Forum of the American Helicopter Society*, Virginia Beach, VA: American Helicopter Society.
- Bramwell, A. R. S., Done, G. & Balmford, D. (2001). *Bramwell's Helicopter Dynamics*. Oxford: Butterworth-Heinemann Ltd.
- Choi I., Bang H. (2011), "Adaptive command filtered backstepping tracking controller design for quadrotor unmanned aerial vehicle", *Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers Part G-Journal Of Aerospace Engineering*, **226**(G5), 483-497.
- Daewon, L., Kim, H., Sastry S. (2009), "Feed-back Linearization vs. Adaptive Sliding Mode Control for a Quadrotor Helicopter", *International Journal Of Control Automation And Systems*, **7**(3), 419-428.
- Das, A., Lewis, F. & Subbarao, K. (2009), "Backstepping Approach for Controlling a Quadrotor Using Lagrange Form Dynamics", *Journal Of Intelligent & Robotic Systems*, **56**(1-2), 127-151.
- Davis WR, Kosicki BB, Boroson DM, and Kostishack DF (1998). Micro Air Vehicles for Optical Surveillance. *The Lincoln Laboratory Journal*, **9**(2) 197-214.
- Derafa L., Ouldali A., Madani T., Benallegue A. (2011), "Non-linear control algorithm for the four rotors UAV attitude tracking problem", *The Aeronautical Journal*, **115**(1165).
- Glover, K., and D. McFarlane. (1992) "Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_∞ bounded uncertainty", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-34**(8):821-830.
- Kemin Zhou, John C. Doyle, Keith Glover (1996), *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall.
- M. R. Napolitano (2012), *Aircraft Dynamics: from modeling to simulation*, Wiley, USA.
- M. Raju Hossain, D. Geoff Rideout, and D. Nicholas Krouglicof. (2010). Bond graph dynamic modeling and stabilization of a quad-rotor helicopter. *Simulation Multiconference*. CA, USA,
- Mellinger, D., Michael, N. & Kumar, V. (2012), "Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors", *International Journal of Robotics Research*, **31**(5) 664-674.
- Minh-Duc Hua., Hamel, T., Morin, P. & Samson, C. (2013) "Introduction to Feedback Control of Underactuated VTOL Vehicles: A Review of Basic Control Design Ideas and Principles" *IEEE Control Systems*, **33**(1), 61-75.
- Mokhtari A., M'Sirdi N., Meghriche K., Belaidi A. (2006), "Feedback linearization and linear observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle", *Advanced Robotics*, **20**(1), 71-91.
- Peña, M; Vivas, E; Rodriguez, C; (2010) , "Modelamiento Dinamico y control LQR de un Quadrotor," *AVANCES Investigacion en Ingenieria 13*, 71-86.
- Powers, C., Mellinger, D., Kushleyev, S., Kothmann, B. & Kumar, V. (2012). *Influence of Aerodynamics and Proximity Effects in Quadrotor Flight*. Int. Sym on Experimental Robotics, pp 289-302.
- R. F. Stengel (2004), *Flight Dynamics*, Princeton University Press, USA.
- R. W. Beard, T. W. McLain (2012), *Small Unmanned Aircraft: theory and practice*, Princeton University Press, USA.
- Roberto Naldi, Luca Gentili, Lorenzo Marconi, Andrea Sala (2010), "Design and experimental validation of a nonlinear control law for a ducted-fan miniature aerial vehicle", *Control Engineering Practice*, **18**(7), 747-760.
- Seddon, L. (1990). *Basic aerodynamics helicopters*. BSP Professional.
- Tayebi, A.; McGillvray, S.; (2006) , "Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft," *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, **14**(3), 562- 571.