

Algoritmo para la solución de la asignación de posiciones meta en formaciones de vehículos

Luis García-Delgado, Roberto Gómez-Fuentes, Alejandro García-Juárez, Ana Leal-Cruz,
Dainet Berman-Mendoza, Alicia Vera-Marquina, Armando Rojas-Hernández
Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora,
Rosales y Luis Encinas, Hermosillo, Sonora, México, 83000

Resumen—Este artículo se centra en el desarrollo de una metodología para una óptima asignación de posiciones meta (APM) de vehículos dentro de una formación, conociendo las posiciones iniciales y las posiciones deseadas de la formación a realizar. La metodología de asignación garantizará que la formación sea alcanzada en un período mínimo de tiempo y sin riesgo de colisiones. Se utilizó el algoritmo Húngaro como algoritmo de optimización combinatoria. Dicho algoritmo requiere de una matriz de costos, por lo que se propone una matriz de costos para encontrar una APM óptima. Se realizaron simulaciones con vehículos cuadri-rotor para mostrar el desempeño de dicha propuesta. Se utilizó el método de saturaciones anidadas como estrategia de control para llevar a los vehículos a su posición deseada, y las trayectorias que debieron seguir los vehículos se generaron mediante funciones potenciales artificiales.

Palabras clave: Formación de vehículos, asignación de posición meta, algoritmo Húngaro.

I. INTRODUCCIÓN

El problema de formación involucra agrupar vehículos formando alguna figura, comenzando desde cualesquier posiciones iniciales, y mantener la posición dentro de la formación en tareas de seguimiento. No obstante, la mayoría de los trabajos en la literatura suponen que los agentes dentro de la formación conocen sus posiciones meta correspondientes y no abordan el cómo se les asigna su respectiva posición meta a cada vehículo. Este artículo trata el problema de asignación, es decir, encontrar una manera óptima de combinar o hacer corresponder cada vehículo con alguna de las posiciones meta. Este problema es importante debido a que con un algoritmo confiable para la asignación de posiciones meta (APM) para los vehículos, el programador o usuario se libra de la tarea de asignar por sí mismo dichas correspondencias, lo cual se vuelve una tarea muy difícil a medida que se incrementa el número de vehículos en una formación, y además por sí mismo el usuario no tiene forma de saber si ha realizado una buena APM.

Algunos enfoques de control cooperativo de vehículos no requieren de la APM, como es el caso de los llamados *flocking* [1] o también los llamados *swarms* los cuales no requieren formar una figura en específico, sino más bien fijar distancias mínimas entre ellos, para evitar colisiones [2], [3].

La problemática a tratar en este artículo es más parecida a un problema muy conocido en el campo de vehículos espa-

ciales llamado reconfiguración de la formación. El concepto de reconfiguración de la formación involucra determinar la distancia de separación entre vehículos, posición y orientación, identificando el proceso de transformar de manera óptima una configuración inicial en una configuración final [4]. La reconfiguración no sólo es necesaria inicialmente, sino también en ciertas situaciones a través de la misión. También en formaciones de UAVs es importante cambiar de una formación a otra para responder a distintas amenazas [2].

En el caso de vehículos espaciales, se utiliza el control óptimo generalmente para minimizar energía (combustible) y asegurar evasión de colisiones. Debido a que el control óptimo se resuelve utilizando un algoritmo recursivo, la asignación por este método puede tardar una considerable cantidad de tiempo. En la referencia [5] se utiliza un método de asignación combinatoria para reducir el tiempo de cálculo de la APM, con lo cual lograron reducir el tiempo, en cierta simulación, de 48.32 minutos a 2.98 minutos utilizando la optimización combinatoria y algunas simplificaciones de su método propuesto. Sin embargo, el tiempo al que lo lograron reducir sigue siendo grande, debido a que la matriz de costos para el método combinatorio fue generada utilizando control óptimo.

En el presente trabajo, se utiliza el algoritmo Húngaro para resolver el problema de APM, y se propone una metodología para calcular la matriz de costos, con la cual se puede obtener una combinación óptima. Además, la metodología propuesta asegura evasión de colisiones y un tiempo mínimo en la realización de la formación, con lo cual se minimiza la energía utilizada por los vehículos. La propuesta presentada es fácil de implementar en cualquier formación, y no requiere la aplicación continua del algoritmo durante la ejecución de la tarea de formación. Por lo tanto dicha metodología propuesta reduce el tiempo computacional en comparación con otras propuestas referenciadas. La APM debe ser ejecutada al inicio de la tarea de formación y cada vez que se vaya a cambiar la figura de formación deseada. La efectividad del algoritmo es probada mediante resultados de simulación, con lo cual se comprueba que provee resultados óptimos en términos de rapidez, seguridad y eficiencia.

El artículo está organizado de la siguiente manera: la Sección II presenta un modelo dinámico para el cuadri-

rotor, y también controles de altitud y guiñada. En la Sección III se definen las funciones potenciales artificiales que generan las trayectorias que deben seguir los vehículos, y en la Sección IV se presenta el control de posición por medio del método de saturaciones anidadas. Los principales resultados del trabajo son el desarrollo de una metodología para APM (en la Sección V) y la comparación en resultados de simulación (en la Sección VI). Finalmente, en la Sección VII se exponen las conclusiones de este trabajo.

II. MODELO DINÁMICO

Las coordenadas generalizadas para el cuadri-rotor son las siguientes

$$\mathbf{q} = (x, y, z, \phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^6 \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\xi} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ denota la posición del centro de masa del vehículo, relativa a un marco inercial \mathcal{I} , y $\boldsymbol{\eta} = (\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3$ representa los ángulos de orientación (alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente) del vehículo.

El modelo dinámico, del cuadri-rotor [6], que se utilizará en este trabajo es

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= u(\cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi), \\ m\ddot{y} &= u(\sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi), \\ m\ddot{z} &= u \cos\theta \cos\phi - mg, \\ \ddot{\psi} &= \tau_\psi, \quad \ddot{\theta} = \tau_\theta, \quad \ddot{\phi} = \tau_\phi \end{aligned}$$

II-A. Control de Guiñada y de Altitud

Para poder mantener $\psi_i = 0 \forall t > 0$, el control de guiñada utilizado es

$$\tau_{\psi_i} = -k_{p\psi}\psi_i - k_{v\psi}\dot{\psi}_i \quad (2)$$

donde $k_{p\psi}$ y $k_{v\psi}$ denotan las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente, del control PD de guiñada.

Y para mantener una altitud constante deseada z_d , el control de altitud a utilizar es

$$u_i = [(k_{pz}\tilde{z}_i - k_{vz}\dot{\tilde{z}}_i) + mg] \frac{1}{\cos\theta_i \cos\phi_i} \quad (3)$$

el cual es un control PD con compensación de gravedad y el término del denominador es utilizado para simplificar el modelo. $\tilde{z}_i = z_{id} - z_i$ es el error de altitud, k_{pz} y k_{vz} son constantes, m denota la masa del vehículo y g es la constante de gravedad.

Aplicando (3) y (2) al sistema, después de un tiempo finito se tendrá que $\tilde{z}_i, \dot{\tilde{z}}_i, \psi_i, \dot{\psi}_i \rightarrow 0$, por lo que el modelo dinámico de cada vehículo se puede ver como

$$\ddot{x}_i = g \tan\theta_i, \quad \ddot{\theta}_i = \tau_{\theta_i} \quad (4)$$

$$\ddot{y}_i = -g \frac{\tan\phi_i}{\cos\theta_i}, \quad \ddot{\phi}_i = \tau_{\phi_i} \quad (5)$$

III. FUNCIONES POTENCIALES

Una vez que los vehículos alcanzan la altura y orientación deseadas (constantes), los vectores translacionales se pueden representar sólo como

$$\boldsymbol{\xi}_i = [x_i \ y_i]^T \quad (6)$$

III-A. Definición de Funciones Potenciales

La distancia entre un vehículo i y otro j , y también entre un vehículo i y su posición meta, respectivamente, se definen como

$$L_{ij} = \|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_i\|; \quad L_{ig} = \|\boldsymbol{\xi}_{g_i} - \boldsymbol{\xi}_i\| \quad (7)$$

y los errores de distancia son

$$\tilde{L}_{ij} = L_{ijd} - L_{ij}; \quad \tilde{L}_{ig} = -L_{ig} \quad (8)$$

donde L_{ijd} es la separación deseada entre los vehículos i y j .

Las funciones de energía potencial artificial entre dos vehículos, y con respecto a la posición meta, son expresadas por

$$\mathcal{U}_{ij} = \frac{1}{2}k_f \tilde{L}_{ij}^2; \quad \mathcal{U}_{ig} = \frac{1}{2}k_g \tilde{L}_{ig}^2 \quad (9)$$

donde k_f es la ganancia inter-vehicular de formación, y k_g es la ganancia de posición meta. La energía potencial para el vehículo i es entonces

$$\mathcal{U}_i = \sum_{j \neq i}^n \mathcal{U}_{ij} + \mathcal{U}_{ig} \quad (10)$$

La fuerza atractiva correspondiente está dada por el gradiente negativo de la energía potencial (10). Entonces

$$\mathbf{F}_{att,i} = -\nabla \mathcal{U}_i = \sum_{j \neq i}^n \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ig} \quad (11)$$

$$= \sum_{i \neq j}^n k_f \tilde{L}_{ij} \frac{\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_i}{L_{ij}} + k_g \tilde{L}_{ig} \frac{\boldsymbol{\xi}_g - \boldsymbol{\xi}_i}{L_{ig}} \quad (12)$$

III-B. Fuerzas Repulsivas

Si se realiza una buena APM, ningún vehículo se interpone en la trayectoria de otro, por lo que no debería haber riesgo de colisiones, y no es necesario aplicar fuerzas repulsivas inter-vehiculares. Sin embargo, para asegurar evasión de colisiones en caso de perturbaciones, y también en el caso de tener una mala APM (lo cual se comparará en simulación), se define la fuerza repulsiva

$$\mathbf{f}r_{1ij} = \begin{cases} \|\mathbf{F}_{att,i}\| \frac{\boldsymbol{\xi}_i - \boldsymbol{\xi}_j}{L_{ij}}, & L_{ij} \leq L_{rep_i} \\ 0, & L_{ij} > L_{rep_i} \end{cases} \quad (13)$$

donde L_{rep_i} es la distancia a la cual un vehículo i puede evadir colisionar con un vehículo j , y tal distancia se define como

$$L_{rep_i} = \frac{L_{max}}{\dot{x}_{max}} \|\dot{\boldsymbol{\xi}}_i\| + L_{x4} + L_{ad} \quad (14)$$

donde L_{max} es la distancia a la cual el vehículo, yendo a máxima velocidad, puede evadir la colisión, \dot{x}_{max} es la velocidad máxima del vehículo, L_{x4} es la distancia máxima desde el centro del vehículo hasta la punta de alguna hélice y L_{ad} es una distancia adicional para asegurar evasión de colisiones (para más detalles consulte la referencia [7]). Por lo tanto, la distancia repulsiva L_{rep_i} depende de la velocidad actual del vehículo i , por consecuencia, dicha

distancia variable es una ventaja sobre una distancia fija ya que permite que los vehículos se muevan de una forma fluida y no muy restrictiva utilizando la fuerza repulsiva solamente cuando es necesario.

En los resultados de simulación se mostrará el caso de una mala APM, en cuyo caso, algunas veces la fuerza repulsiva $f r_{1ij}$ no es suficiente para hacer que el vehículo evada rápidamente colisiones debido a que se crean mínimos locales en las fuerzas, por lo cual se propone agregar un segundo término repulsivo $f r_{2ij}$

$$f r_{2ij} = \begin{cases} k_{rep} \left(\frac{1}{L_{ij}} - \frac{1}{L_0} \right) \frac{\xi_i - \xi_j}{L_{ij}} \mathbf{R}, & L_{ij} \leq \frac{2}{3} L_{max} \\ 0, & L_{ij} > \frac{2}{3} L_{max} \end{cases} \quad (15)$$

donde $k_{rep} > 0$ es constante, y R es una matriz de rotación que redirige la fuerza repulsiva (15) un ángulo de $\pi/2$ lo cual hace que los vehículos que se acercan lo suficiente evadan la colisión o los mínimos locales rodeándose uno al otro para continuar su trayecto a la posición meta. La matriz R se define como

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Entonces, para un vehículo i , la fuerza repulsiva es

$$F_{rep,i} = \sum_{j \neq i}^n (f r_{1ij} + f r_{2ij}) \quad (17)$$

Por lo tanto, la fuerza artificial total que actúa en un vehículo i es

$$F_i = F_{att,i} + F_{rep,i} \quad (18)$$

IV. CONTROL DE POSICIÓN

Si se imponen cotas muy pequeñas sobre θ_i y ϕ_i , de tal forma que $\tan(\theta_i) \approx \theta_i$, y de igual forma con ϕ_i , el modelo dinámico para el vehículo i se reduce a

$$\ddot{x}_i = g\theta_i, \quad \ddot{\theta}_i = \tau_{\theta_i}, \quad (19)$$

$$\ddot{y}_i = -g\phi_i, \quad \ddot{\phi}_i = \tau_{\phi_i}, \quad (20)$$

el cual se puede ver como dos sistemas independientes, donde cada uno se compone de cuatro integradores en cascada.

IV-A. Control por Saturaciones Anidadas

Este es un método de control no lineal que se aplica a sistemas de integradores en cascada con una entrada, y consiste en realizar un cambio de variables del sistema original, después estas nuevas variables se acomodan en forma de saturaciones anidadas (Ver referencia [8]).

Dado que el objetivo de este artículo no es el control de posición utilizado, por cuestiones de espacio no se desarrollarán las ecuaciones. El lector puede consultarlas en [7].

De acuerdo con el método de saturaciones anidadas, el control de cabeceo (θ, x) está dado por

$$\tau_{\theta_i} = -\sigma_{b_4}(k_4 z_{4x_i} + \sigma_{b_3}(k_3 z_{3x_i} + \sigma_{b_2}(k_2 z_{2x_i} + \sigma_{b_1}(k_1 z_{1x_i})))) \quad (21)$$

donde b_1, \dots, b_4 son las cotas de las funciones saturación.

De forma similar, el control de alabeo (ϕ, y) está dado por

$$\tau_{\phi_i} = -\sigma_{b_4}(k_4 z_{4y_i} + \sigma_{b_3}(k_3 z_{3y_i} + \sigma_{b_2}(k_2 z_{2y_i} + \sigma_{b_1}(k_1 z_{1y_i})))) \quad (22)$$

V. ASIGNACIÓN DE POSICIONES META

Partiendo del hecho de que se tienen n vehículos y, por lo tanto, n posiciones meta a ser ocupadas por los vehículos, la APM es el hecho de designar una posición meta para cada vehículo. Con el propósito de realizar una asignación óptima, se puede utilizar un algoritmo de optimización combinatoria. En este trabajo se ha implementado el algoritmo Húngaro, el cual resuelve el problema de asignación con un tiempo de complejidad de $O(n^3)$.

V-A. Teoría de Grafos

Un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}; \mathcal{E})$ es una representación de un conjunto de objetos (vértices \mathcal{V}), donde algunos pares de objetos se conectan por enlaces (aristas \mathcal{E}) [9].

Un grafo bipartita, $\mathcal{G} := (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2; \mathcal{E})$, es un grafo tal que para cualesquiera dos vértices, $v_1 \in \mathcal{V}_1$ y $v_2 \in \mathcal{V}_2$, $v_1 v_2$ forman una arista en \mathcal{G} .

V-B. Algoritmo Húngaro

Partiendo de un grafo bipartita completo $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{T}; \mathcal{E})$ con n vértices de posiciones iniciales (\mathcal{S}) y n vértices de posiciones finales (\mathcal{T}), y cada arista tiene un costo no negativo $c(i, j)$.

Una correspondencia en \mathcal{G} es un subconjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ tal que ninguna arista en \mathcal{M} tenga vértices en común. Una correspondencia perfecta es aquella en la cual cada vértice en \mathcal{S} tiene una correspondencia con otro en \mathcal{T} . El objetivo es encontrar una correspondencia perfecta \mathcal{M} con mínimo costo.

V-C. Matriz de Costos

La principal contribución de este artículo es presentar una estrategia para generar la matriz de costos con la cual se pueda obtener una APM que produzca resultados óptimos. En [7] se sugirió utilizar una matriz de distancias \mathbf{Lg} que consta de la distancia entre cada vehículo y cada posición meta, de la siguiente manera

$$\mathbf{Lg} = \begin{bmatrix} Lg_{1,1} & Lg_{1,2} & \cdots & Lg_{1,n} \\ Lg_{2,1} & Lg_{2,2} & \cdots & Lg_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Lg_{n,1} & Lg_{n,2} & \cdots & Lg_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

donde $Lg_{i,j} = \|\xi_{gj} - \xi_i^0\|$. Sin embargo, se observó que esta no es muy buena opción de matriz de costos, pues tanto más lejos esté el centro geométrico de las posiciones iniciales al centro geométrico de las posiciones meta, el desempeño de la APM empeora, como se demostrará en los resultados de simulación.

Para solucionar el problema mencionado, una vez que se tienen las posiciones iniciales (o actuales) $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ y las posiciones deseadas $\xi_g = \{\xi_{g_1}, \dots, \xi_{g_n}\}$, se puede calcular la media aritmética de ambas cantidades

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \xi_i, \quad \bar{\xi}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \xi_{g_i}$$

y después se le resta a cada posición la media, de la siguiente forma

$$\xi_i^* = \xi_i - \bar{\xi}, \quad \xi_{g_i}^* = \xi_{g_i} - \bar{\xi}_g$$

La distancia entre ξ_i^* y $\xi_{g_j}^*$ es

$$l_{ij}^* = \|(\xi_i^*) - \xi_{g_j}^*\|$$

y con dichas distancias se construye la matriz de costos C_l como

$$C_l = \begin{bmatrix} l_{11}^* & l_{12}^* & \dots & l_{1n}^* \\ l_{21}^* & l_{22}^* & \dots & l_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}^* & l_{n2}^* & \dots & l_{nn}^* \end{bmatrix} \quad (24)$$

Con la matriz de costos C_l la APM resultante es la mejor distribuida espacialmente sin importar si se separan mucho los centros geométricos de las figuras de posiciones iniciales y meta.

VI. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

Las simulaciones se llevaron a cabo para vehículos cuadri-rotore con idénticos parámetros. Los parámetros se muestran en la Tabla I.

TABLA I: Parámetros y valores de constantes.

Tipo	Parámetro	Valor
Modelo del vehículo	m	1 kg
	g	9.81 m/s ²
Radio del vehículo	L_{x4}	0.4 m
Constantes del Controlador	k_1, k_2, k_3, k_4	1
Cotas del controlador	b_2, b_2, b_3, b_4	0.1, 0.2, 0.4, 0.8

La distancia $L_{max} = 1.629m$ y $\dot{x}_{max} = 0.981m/s$ (consultar [7]), y con un valor arbitrario $L_{ad} = 0.5m$, se puede calcular L_{rep_i} .

VI-A. Formaciones y GPA

Se simularon formaciones de 10 vehículos y se utilizó la APM para dos cambios de formación. Para las mismas dos formaciones a realizar se utilizaron 2 propuestas distintas de matriz de costo para resolver el algoritmo Húngaro: a) la primera matriz de costos es C_l de la Ecuación (24); b) la segunda es Lg de la Ecuación (23). Se mostrará que la matriz de costos C_l produce la mejor APM; la matriz Lg da una mala asignación si el centro geométrico de las posiciones iniciales y el de las posiciones meta se alejan,

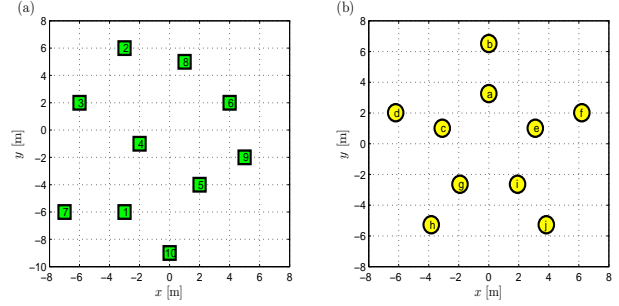


Figura 1: (a) Posiciones iniciales. (b) Primera formación.

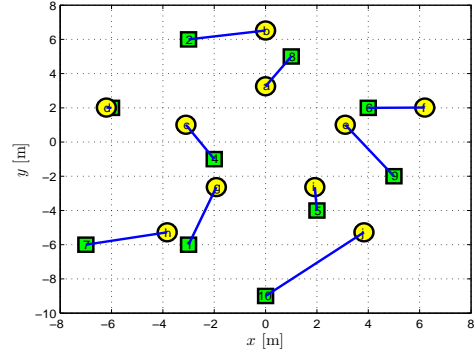


Figura 2: APM para las posiciones iniciales y finales mostradas en la Figura 1 (a) y (b), usando la matriz de costos C_l .

por lo cual esta segunda no es muy buena opción como matriz de costos.

En la primera formación, la configuración inicial y la figura deseada tienen su centro geométrico cerca del origen del marco inercial, como se muestra en la Figura 1-(a) y 1-(b). Utilizando la matriz de costos C_l , la asignación obtenida es $\mathcal{M} = \{(1,g), (2,b), (3,d), (4,c), (5,i), (6,f), (7,h), (8,a), (9,e), (10,j)\}$, como se muestra en la Figura 2. Solucionando la APM con la matriz de costos Lg , la asignación obtenida es similar en 8 correspondencias, y es $\mathcal{M} = \{(1,g), (2,b), (3,d), (4,c), (5,i), (6,e), (7,h), (8,a), (9,f), (10,j)\}$; se señalaron en negritas las asignaciones diferentes.

En la segunda formación, el centro geométrico de la nueva figura inicial y la deseada están alejados. La forma de estrella de la Figura 1-(b), es la nueva posición inicial y la configuración deseada es la que aparece en la Figura 3, la cual tiene un desplazamiento de 15 m a la derecha del marco inercial. Con la elección de matriz de costos C_l la APM resultante se muestra en la Figura 3-(a). Seleccionando Lg como matriz de costos, la APM se muestra en la Figura 3-(b).

A simple vista, no se pueden tener argumentos para determinar cuál es la mejor APM. Por lo tanto, es necesario establecer algunos puntos de comparación en el desempeño de la formación, como por ejemplo, la rapidez en alcanzar la formación y el riesgo de colisión entre vehículos.

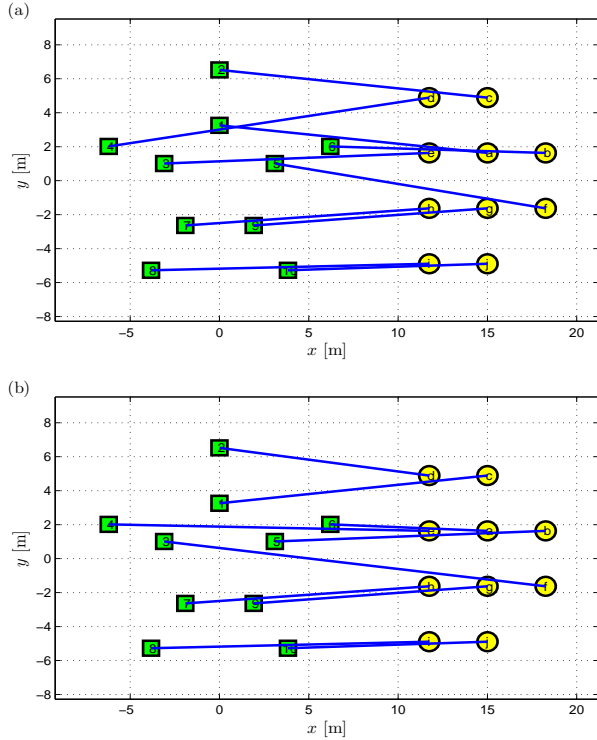


Figura 3: (a) APM usando C_l . (b) APM usando L_g .

En la Figura 4 se observa que la norma de las distancias a posiciones meta $\|L_{ig}\|$, la cual es menor para la opción C_l y también se ve que dicha curva decrece más rápido que para la opción L_g , lo que significa que para la APM con C_l los vehículos alcanzan más rápido su posición meta.

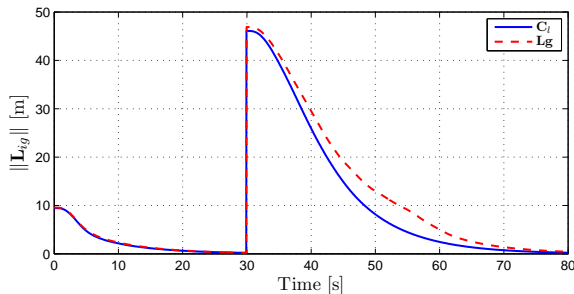


Figura 4: Gráficas de $\|L_{ig}\|$.

La gráfica $\min(L_{ij})$, que se muestra en la Figura 5, indica la distancia mínima inter-vehicular $L_{ij} \forall i, j \mid i \neq j$, de donde observamos que para el caso de L_g , del segundo 37 al segundo 57, algunos vehículos estuvieron muy cercanos a la distancia de colisión ($2L_{x4}$), mientras que para el caso de C_l los vehículos nunca estuvieron cerca de colisionar. Estos resultados indican que con una buena APM el riesgo de colisión es mínimo.

Finalmente, la Figura 6 muestra la norma de las fuerzas repulsivas, $\|F_{rep}\|$, de donde se observa que para el caso de C_l apenas y se utilizaron fuerzas repulsivas, mientras que

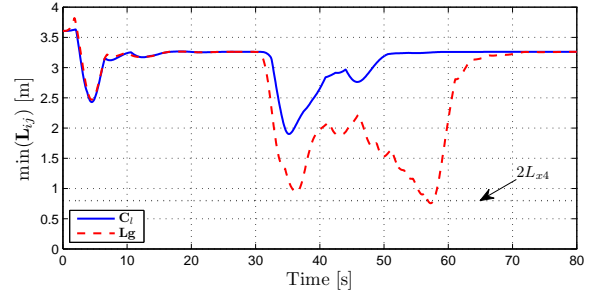


Figura 5: Gráficas de $\min(L_{ij})$.

para el caso de L_g las fuerzas repulsivas actuaron alrededor de 30 segundos. Estos resultados indican que con una buena APM, las funciones repulsivas para evasión de colisiones no son necesarias, debido a que no hay riesgo de colisión en las trayectorias de los vehículos a su posición meta, sin embargo, se recomienda utilizar funciones repulsivas para prevenir colisiones en caso de que se presenten perturbaciones.

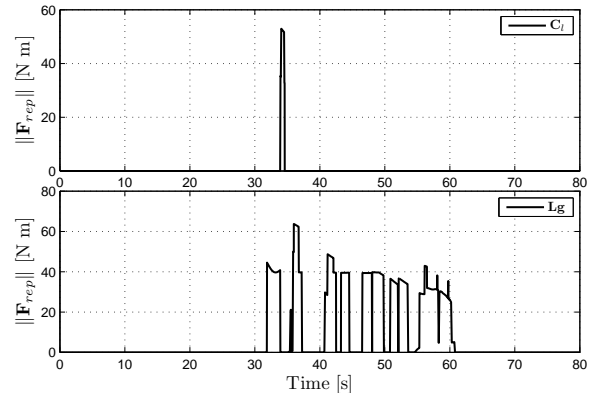


Figura 6: Gráficas de $\|F_{rep}\|$.

VI-B. Análisis Cuantitativo

El tiempo en que se realiza la APM para 10 vehículos es menor a 2 ms. La manera de probar que la APM propuesta en este artículo produce resultados óptimos en el comportamiento de la formación es ejecutar una simulación para cada combinación posible de posiciones iniciales y deseadas, y después de tener los resultados de todas las pruebas compararlos para determinar el mejor. El número de todas las combinaciones posibles de posiciones iniciales-meta está dado por $n!$, donde n es el número de vehículos. Entonces, en una formación de 10 vehículos, existen $3'628,800$ diferentes combinaciones de APM, de modo que tratar de simular todas las combinaciones llevaría mucho tiempo. Por lo tanto, realizamos dicho análisis en formaciones de 3, 4 y 6 vehículos. Por cuestiones de espacio sólo se expondrán los resultados de una formación de 6 vehículos, considerando que las conclusiones para distinto número de vehículos fueron las mismas

Los criterios de evaluación usados para determinar la mejor APM, están dados por los siguientes parámetros:

1. $\|\mathbf{L}_{ig}(0)\|$. Es la norma Euclideana del vector de distancias L_{ig} , en tiempo $t = 0$, es decir, $\mathbf{L}_{ig}(0) = [L_{1g}(0) \dots L_{ng}(0)]^T$.
2. T_{ss} . Es el tiempo en el cual se considera que la formación llega al estado estacionario. El criterio que se tomó para definir el estado estacionario fue cuando $\|\mathbf{L}_{ig}(t)\| < 0.5\text{m}$.
3. d_{ij} . Es la mínima distancia inter-vehicular alcanzada, $\min(L_{ij})$. $\mathbf{L}_{ij}(t)$ es la matriz de todos las distancias inter-vehiculares L_{ij} .
4. F_{rep} . Es una cantidad relacionada con el total de fuerzas repulsivas que actúan durante el desarrollo de la formación. $F_{rep} = \|(\|\mathbf{F}_{rep}\|)\|$.

El mejor comportamiento de la APM se determinará de la siguiente forma: se debe alcanzar la formación con el menor tiempo T_{ss} y sin riesgo de colisiones, es decir, una distancia intervehicular d_{ij} suficientemente grande, y mínimas fuerzas repulsivas F_{rep} .

Con 6 vehículos existen 720 posibles combinaciones de posiciones inicial-deseada. Se realizaron todas las combinaciones para una formación con condiciones iniciales dadas por $\xi_i = ['1', '2', '3', '4', '5', '6']^T = [(0, 0), (0, 2.8), (2.8, 2.8), (2.8, 0), (0, -2.8), (2.8, -2.8)]^T$, y posiciones deseadas dadas por $\xi_g = ['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f']^T = [(10,0), (10, 2.8), (7.337, 0.865), (12.663, 0.8652), (12.663, -2.265), (11.646, -2.265)]^T$. En la Tabla II se muestran los valores de los 6 mejores tiempos T_{ss} obtenidos. Los valores de la primera columna indican

TABLA II: Resultados numéricos de simulaciones de una formación de 6 vehículos para diferentes combinaciones de APM.

GPA	T_{ss} (seg)	$\ \mathbf{L}_{ig}(0)\ $ (m)	d_{ij} (m)	F_{rep}
f,a,d,b,e,c	26.85	22.658	0.851	271.357
a,c,d,b,e,f	27.00	21.607	0.878	204.913
c,a,b,d,e,f	27.05	21.468	0.930	154.375
a,c,b,f,e,d	27.05	21.762	0.876	273.533
c,b,d,a,e,f	27.10	21.355	1.883	0
a,c,b,d,e,f *	27.10	21.355	1.747	0

La combinación de APM que obtiene el algoritmo utilizando la matriz C_l es el valor que aparece con un '*', es decir, el del sexto renglón. Podemos observar que en cuanto a tiempo T_{ss} es el quinto mejor tiempo (al igual que el del quinto renglón). Se puede pensar que los primeros 4 renglones presentan una mejor respuesta que la APM obtenida por el método propuesto, sin embargo observamos que en esas simulaciones se alcanzaron distancias intervehiculares (d_{ij}) cercanas a la colisión y por lo tanto gran actividad de las fuerzas repulsivas (F_{rep}), así que algunas perturbaciones pueden provocar colisiones. Se simularon después las mismas 6 combinaciones de APM, pero sin utilizar fuerzas repulsivas, y se observó que para las

primeras cuatro combinaciones de la Tabla II se presentaron colisiones y el tiempo de llegada fue el mismo que para los renglones 5 y 6. Por lo tanto las dos respuestas óptimas, en cuanto a tiempo de llegada y bajo riesgo de colisión son las de los renglones 5 y 6.

Después de simular distintas formaciones para distinto número de vehículos, se encontró lo siguiente: la APM con el método propuesto está relacionada con la menor distancia $\|\mathbf{L}_{ig}(0)\|$; la menor distancia $\|\mathbf{L}_{ig}(0)\|$ está relacionada con el menor tiempo de llegada T_{ss} ; cuando se logran encontrar combinaciones que resultan en un menor T_{ss} , se debe a que las fuerzas repulsivas ayudan a la formación a llegar antes, pero hay cierto riesgo de colisión; en caso de que la geometría de las posiciones iniciales y deseadas lo permita, puede existir más de una combinación con mínima distancia $\|\mathbf{L}_{ig}(0)\|$, pero el algoritmo sólo selecciona una de ellas.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una metodología para re-actualizar una óptima APM. La APM se resuelve mediante un algoritmo de optimización combinatoria, el cual necesita una matriz de costos apropiada para realizar una asignación óptima. El desempeño de la APM se analizó simulando una formación de 10 vehículos cuadri-rotor utilizando un esquema de formación basado en funciones potenciales y un control de los vehículos basado en saturaciones anidadas. Los resultados de simulación muestran que la metodología de APM propuesta probó ser confiable en minimizar el tiempo de alcanzar la formación, minimizar la distancia recorrida por el grupo de vehículos y minimizar el riesgo de colisiones.

REFERENCIAS

- [1] Magnus Lindhé, Petter Ögren, and Karl Henrik Johansson. Flocking with obstacle avoidance: A new distributed coordination algorithm based on voronoi partitions. In *2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Apr 2005.
- [2] Laura E. Barnes, Mary Anne Fields, and Kimon P. Valavanis. Swarm formation control utilizing elliptical surfaces and limiting functions. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 39(6):1434–1445, Dec 2009.
- [3] Jianghai Hu, Maria Prandini, and Claire Tomlin. Interesting conjugate points in formation constrained optimal multi-agent coordination. In *2005 American Control Conference*, Jun 8 - 10 2005.
- [4] Jamie Walls, Ayanna Howard, Abdollah Homaifar, and Bahram Kimiaghali. A generalized framework for autonomous formation reconfiguration of multiple spacecraft. In *2005 IEEE Aerospace Conference*, pages 397–406, Mar 5 - 12 2005.
- [5] Taeyoung Lee, Melvin Leok, and N. Harris McClamroch. A combinatorial optimal control problem for spacecraft formation reconfiguration. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, Dec 12 - 14 2007.
- [6] P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul. Stabilization of a mini rotorcraft having four rotors. *IEEE Control Systems Magazine*, 25(6):45–55, dec 2005.
- [7] Luis García, Alejandro Dzul, Víctor Santibáñez, and Miguel Llama. Quad-rotors formation based on potential functions with obstacle avoidance. *IET Control Theory and Applications*, 6(12):1787 – 1802, Aug 2012.
- [8] A. R. Teel. Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems and Control Letters*, 1992.
- [9] M. H. Alsuwaiyel. *Algorithms: Design Techniques and Analysis (Lecture Notes Series on Computing)*. World Scientific, 1999.