

Predictor híbrido para sistemas lineales con retardo de tiempo.

R. Buenfil Hernández and B. del Muro Cuéllar
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán,
Instituto Politécnico Nacional, Santa Ana 1000 México D.F, 04430
E-mail:zeat_s10@hotmail.com, bdelmuro@yahoo.com

Resumen—En el presente trabajo se considera el problema de estabilización y control de sistemas lineales con retardo en el lazo directo. Es conocido que los retardos complican el análisis de estabilidad y el diseño de controladores adecuados. Se propone una metodología para diseñar un predictor de estados continuos para sistemas con retardo. La clave en la propuesta es garantizar la existencia del dispositivo predictor, independientemente de cuestiones como el orden de la planta, su inestabilidad o el tamaño del retardo. Se ilustra la aplicación del resultado mediante simulaciones numéricas en ejemplos académicos.

Palabras clave: Predictivo híbrido, retardo de tiempo, sistemas inestables.

I. INTRODUCCIÓN

Los retardos de tiempo están presentes prácticamente en todos los sistemas dinámicos, principalmente debido a fenómenos como el transporte de información, material o de energía, sin embargo toman importancia cuando el retardo es relativamente grande en comparación con la constante de tiempo del sistema. En este contexto, el retardo se convierte en una situación compleja desde el punto de vista de control. Los retardos significativos pueden ser encontrados principalmente en procesos químicos y las cadenas de fabricación, originados por mecanismos tales como el transporte de material, bucles de reciclado o incluso en el modelado de sistemas de alto orden (Skogestad, 2004) y (Kolmanovskii, 1992). Varias estrategias de control se han desarrollado para hacer frente a los retardos de tiempo. Tal vez la estrategia más popular es el predictor o estrategias basadas en la observación, que consiste en contrarrestar el retardo de tiempo y sus efectos, por medio de esquemas destinados a predecir los efectos de las entradas en las señales futuras. El predictor compensador de Smith (SPC) (Smith, 1957), es la estrategia de predicción más común en la literatura, que proporciona una estimación de la salida futura por medio de un esquema de observación. La principal limitación de esta estrategia es que solo puede ser aplicada a las sistemas estables. Con el fin de solucionar este problema, muchas modificaciones al predictor de Smith se han reportado en la literatura. Por ejemplo, Seshagiri (Seshagiri, 2007), presenta una modificación eficiente para el SCP, con el fin de controlar sistemas de primer orden con retardo de tiempo. Su metodología se limita a los sistemas que satisfacen $\tau < 1.5\tau_{un}$, donde τ es la magnitud del retardo de tiempo y τ_{un} es la constante de tiempo inestable. El caso particular de los sistemas inestables de primer orden

con retardo de tiempo ha sido ampliamente discutido en la literatura. En (Nesimioglu, 2010), se proporcionan una parametrización de controladores proporcionales. En (Hwang, 2004), se muestra la técnica de D-partición, que se utiliza para estimar los límites de estabilización de el controlador PID y en (Silva,2005) y (Silva, 2002), utilizando una extensión del teorema de Hermite-Bielhler, se da una parametrización completa de los controladores PID estabilizantes para sistemas de primer orden con retardo. Es importante tener en cuenta que todos estos resultados proporcionan un controlador de estabilización restringido a $\tau < 2\tau_{un}$. En (del Muro, 2012), se analiza el uso de observador (predictor), con especial atención al caso continuo de primer orden lineal de procesos sujetos a grandes retardos en la trayectoria entrada-salida, con especial interés al caso $\tau > 2\tau_{un}$. En ese trabajo se proporciona un controlador que permite la estabilización de los sistemas con $\tau < 3\tau_{un}$. En (Marquez, 2012), se utiliza el mismo enfoque incluyendo el uso de controladores PID y permitiendo estabilizar los sistemas con retardo restringido a $\tau < 4\tau_{un}$. El caso general de sistemas inestables de orden superiores con retardo de tiempo sigue siendo un desafío. Un enfoque tradicional considera un modelo discreto de la planta retardada, permitiendo así el diseño de un controlador digital. Esto implica algunas restricciones como lo son el hecho de que el retardo debe ser un múltiplo entero del periodo de muestreo. Los procesos a considerar en este trabajo son sistemas lineales, posiblemente inestables, de alto orden con retardo en la trayectoria entrada-salida y cuya magnitud de retardo es considerable. Se propone una estrategia de control (continua) mediante retroalimentación estática de los estados estimados. La parte más importante de la propuesta corresponde al observador (o predictor) de estados: un observador de estados continuo pero que garantiza la convergencia del error de estimación a cero gracias a una inyección discreta de la señal de error. El trabajo está organizado de la manera siguiente: en la Sección II se da el planteamiento del problema. En la Sección III se propone la metodología para realizar el predictor híbrido, para la estabilización y control de los sistemas antes mencionados. En la Sección IV se proporciona un ejemplo para mostrar la respuesta del sistema aplicando el predictor híbrido y con otros ejemplos se realiza la comparación del predictor híbrido con el predictor discreto para mostrar las ventajas. Por último en la Sección V se dan las conclusiones.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere la función de transferencia de un sistema lineal con una entrada, una salida y retardo de tiempo en el lazo directo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} \quad (1)$$

$U(s)$ es la señal de entrada, $Y(s)$ es la señal de salida, $\tau > 0$ es el tiempo de retardo conocido, $N(s)$ es el polinomio numerador y $D(s)$ es el polinomio denominador del sistema. Utilizando una retroalimentación estática de salida:

$$U(s) = R(s) - Y(s)k, \quad (2)$$

donde $R(s)$ es una entrada de referencia y el término “ k ” es la ganancia, como se ve en la Figura 1.

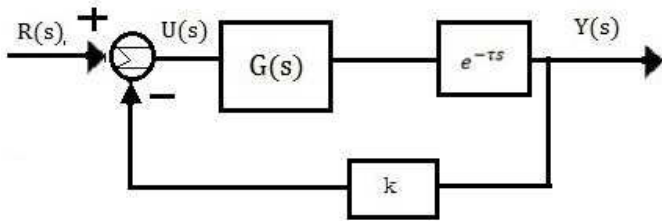


Figura 1. Esquema del sistema con retardo y retroalimentación estática de la salida.

Se obtiene el siguiente sistema a lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s)e^{-\tau s}}{D(s) + N(s)e^{-\tau s}k}. \quad (3)$$

Como podemos observar al cerrar el lazo de control, obtenemos una nueva ecuación característica que posee el término del retardo $e^{-\tau s}$ tanto en el numerador como en el denominador, dificultando un análisis de estabilidad ya que tendremos un número infinito de polos. En trabajos reportados en la literatura se utilizan predictores analógicos con aproximación de Padé, pero estos se vuelven complejos por el orden de la aproximación.

Al diseñar predictores continuos el problema estriba en garantizar la convergencia de las señales reales contra las estimadas. Nuestra propuesta consiste en usar una inyección discreta de la señal de error, misma que garantiza la convergencia deseada, logrando además una predicción continua de las señales deseadas.

III. ESTRATEGIA PROPUESTA

La estrategia de control propuesta en este trabajo consiste en una retroalimentación estática de los estados estimados. La estimación de tales estados, también llamada predicción, se realiza mediante un esquema de predicción analógica, contempla únicamente una inyección digital de la señal de error disponible a la salida. El esquema de control consta de los compensadores $F' = [f_1, f_2, \dots, f_n]$, que reubicarán los polos del sistema y que serán calculados a partir del modelo analógico sin retardo. El vector ganancia $G' = [g_1, g_2, \dots, g_n]$, (donde $[G']$ es la transpuesta de $[G]$), perteneciente al estimador de estado, se determina a partir de CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

un modelo matemático discreto con retenedor de orden cero, reubicando los polos. Consta de dos partes; una procedente directamente de la parte lineal libre del retardo y la otra obtenida del término retardo. A continuación se muestra la metodología propuesta para obtener el predictor. Dado que la inyección de la señal de error al observador será discreta, necesitaremos un periodo de muestreo T , y para obtener el periodo de muestreo consideremos:

$$T = \frac{\tau}{n} \quad (4)$$

donde n es el número entero de particiones.

Para discretizar el término del retardo, es necesario recordar la siguiente propiedad de la transformada z :

$$\mathbb{Z} \{G(s)e^{-\tau s}\} = z^{-n} \mathbb{Z} \{G(s)\}, \quad (5)$$

donde $\mathbb{Z} \{*\}$ denota la transformada “ z ” de $\{*\}$, τ es el valor conocido del retardo de tiempo y n sigue siendo el número entero de particiones seleccionadas para seccionar el retardo, tomando en cuenta que este número de particiones aumentara el orden de nuestro sistema, entre mayor sea dicho número, sera mejor la repuesta del sistema pero también sera mayor la dificultad para resolver este sistema.

Para la parte del sistema libre de retardo obtendremos la representación en variables de estados de la función de transferencia de la ecuación (1), asumiendo que tratamos con sistemas estrictamente propios tenemos lo siguiente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Para obtener el vector de retroalimentación del estado $F' = [f_1, f_2, \dots, f_n]$, tenemos:

$$\dot{x} = (A - BF)x(t) + Br(t) \quad (7)$$

$$A_F = (A - BF) \quad (8)$$

Reubicando los polos del sistema continuo la ecuación característica queda:

$$\det(sI - A_F) = 0 \quad (9)$$

Observe la Figura 2 en donde se muestra el esquema del control estática de los estados sin el retardo.

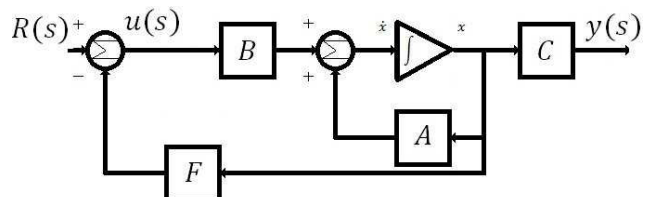


Figura 2. Control por retroalimentación de estados

Procederemos ahora al diseño del observador híbrido. Teniendo la representación matemática en variables de estado continuos (6), procederemos a discretizar dicha representación, para obtener el sistema discreto, a partir de las expresiones bien conocidas, ver por ejemplo (Ogata, 1996)

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d U(k) \quad (10)$$

donde:

$$A_d = e^{A(T)} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}|_{t=T} \quad (11)$$

$$B_d = \int_0^T e^{A(T-\phi)} B d\phi \quad (12)$$

y donde T es el periodo de muestreo.

Pero esta discretización, es la forma tradicional respetando el mapeo de la entrada hacia los estados del sistema, si la aplicamos a un predictor híbrido que es un predictor continuo que emplea compensadores discretos para ajustar la estimación de los estados a través de la señal de error esto no sería adecuado y por eso es necesario tener la discretización del sistema respetando el mapeo desde los estados hacia la salida, o como se podría decir emplearemos la dualidad del sistema para que puedan actuar los compensadores. Si bien no es muy difícil deducir esta representación discreta, por cuestiones de espacio no daremos los detalles aquí, pero es fácil observar que corresponde con la versión dual de la representación dada anteriormente, i.e.,

$$\bar{A}_d = e^{A'(T)} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A')^{-1}|_{t=T} \quad (13)$$

$$\bar{C}_d = \int_0^T e^{A'(T-\phi)} C' d\phi, \quad (14)$$

donde A' y C' son las matrices transpuestas de A y C , respectivamente.

Observe la Figura 3 en donde se muestra el diagrama del sistema discretizado, para su uso en el diseño del predictor. Como podemos ver, dentro del recuadro punteado se encuentra la discretización del sistema y fuera de este se encuentra la discretización del retardo, que como se puede apreciar depende de las n particiones seleccionadas, con lo cual nuestro sistema analizado desde la dinámica de los estados hacia la salida $y(k)$, aumentara en dimensión dependiendo de las particiones n .

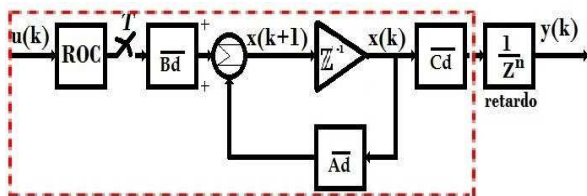


Figura 3. Diagrama del sistema discreto.

Entonces procedemos a realizar la extensión de la matriz de variables de estados discretos, que incluye el sistema y el termino de retardo de tiempo.
CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

$$\bar{\bar{A}}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{C}_d & \bar{C}_d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{A}_d & \bar{A}_d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{A}_d & \bar{A}_d \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{\bar{B}}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\bar{\bar{C}}_d = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] \quad (17)$$

Ahora que ya tenemos completa la discretización del sistema, procederemos a calcular los controladores digitales G , a través de la estrategia de control de retroalimentación estática de la salida estabilizante. Vea la Figura 4.

Analizando obtenemos lo siguiente:

$$\bar{\bar{A}}_{dG} = (\bar{\bar{A}}_d - G\bar{\bar{C}}_d) \quad (18)$$

Para reubicar los polos del sistema discreto tenemos la siguiente ecuación característica:

$$\det(zI - \bar{\bar{A}}_{dG}) = 0 \quad (19)$$

Así obtenemos la representación general del predictor híbrido como se muestra en la Figura 4.

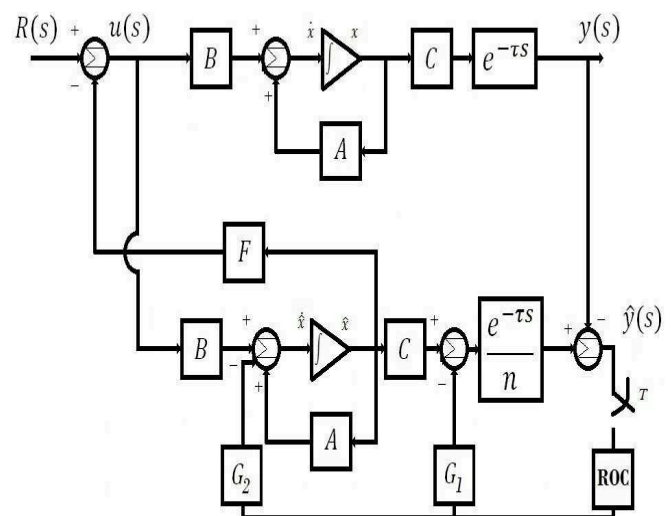


Figura 4. Predictor híbrido

Como se observa tenemos G_1 que es el vector de ganancias para inyectar la señal de error a la parte del retardo y G_2 que inyecta la misma señal de error pero al sistema antes de ser retardado.

IV. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en simulaciones numéricas del predictor híbrido.

Ejemplo 1, suponga el sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+2)(s-1)} e^{-1.5s} \quad (20)$$

Separamos el termino de retardo de tiempo y aplicando la ecuación((6)), obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] x(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Discretizando el termino de retardo de tiempo $T = 1.5$, aplicando la ecuación (5) y seleccionando $n = 5$

$$\mathbb{Z} \{G(s)e^{-1.5s}\} = z^{-5} \mathbb{Z} \{G(s)\} \quad (22)$$

Obteniendo el periodo de muestreo con la ecuación (4)

$$T = \frac{1.5}{5} = 0.3 \quad (23)$$

Discretizamos aplicando la ecuación (13) y (14), obteniendo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.0828 & 0.2670 \\ 0.5340 & 0.8158 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0.3084 \quad 0.0414] x(k) \end{aligned} \quad (24)$$

Aplicando las ecuaciones (15), (16) y (17), tenemos la matriz extendida:

$$\overline{\overline{A}}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3084 & 0.0414 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0828 & 0.2670 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5340 & 0.8158 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\overline{\overline{B}}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\overline{\overline{C}}_d = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (27)$$

Para obtener el vector de controladores G aplicamos la ecuación (19) reubicando los 7 polos discretos en 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 y 0.6, consiguiendo:

$$G = \begin{bmatrix} -0.2013 \\ 0.6269 \\ 0.6045 \\ 0.8457 \\ 1.1402 \\ 4.3991 \\ 4.3990 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Aplicando la ecuación (9), obtenemos el vector de los compensadores F reubicando los 2 polos continuos en -1 y -3:

$$F = [5 \quad 3] \quad (29)$$

Al aplicarle el esquema predictor híbrido, obtenemos la respuesta del sistema obtenido incluyendo condiciones iniciales en el estado 2 de -0.1. Ver la Figura 5:

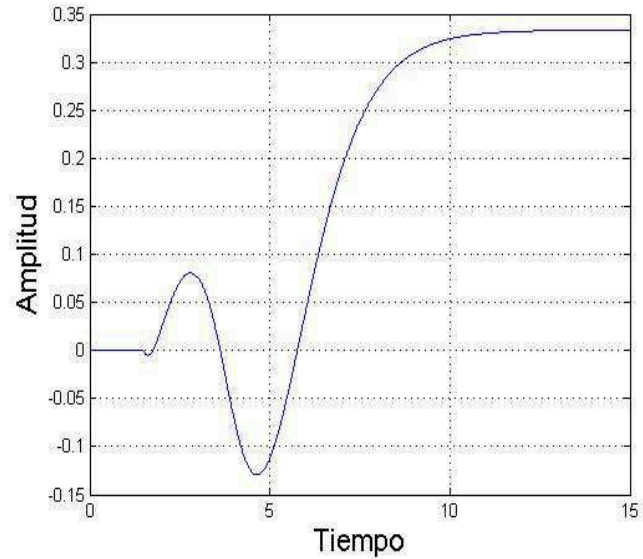


Figura 5. Respuesta del sistema Ejemplo 1.

En la Figura 6, se ve la señal de error, la cual podemos describir como una señal suave, con una amplitud pequeña y que converge rápidamente a cero.

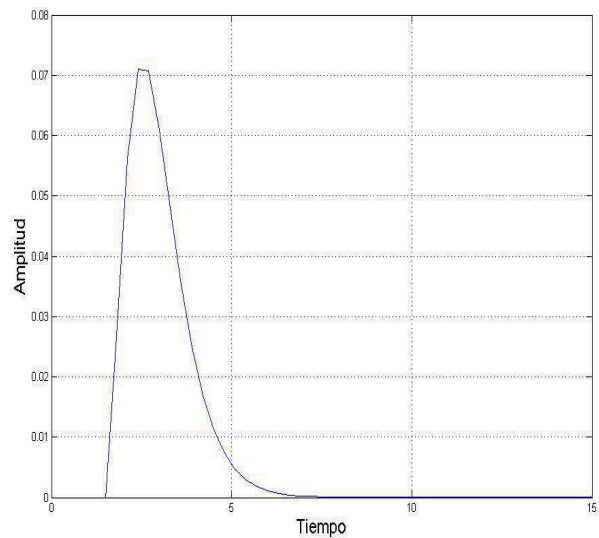


Figura 6. Señal de error del Ejemplo 1.

En el siguiente ejemplo mostraremos la comparación del predictor híbrido contra el predictor discreto.

Ejemplo 2, sea el siguiente sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} e^{-2s}. \quad (30)$$

Como se observa es un sistema con dos polos inestables y el retardo es de 2 unidades de tiempo lo cual representa dificultad para controlar el sistema. En la Figura 7, se muestra la comparación de la respuesta del sistema al aplicarle el predictor híbrido acción y el predictor discreto. También hay que mencionar que se aplicaron condiciones iniciales de 0.1 en el estado dos para ambos predictores.

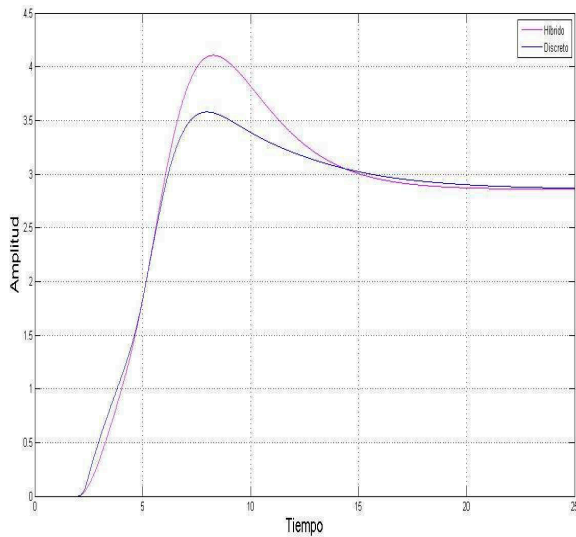


Figura 7. Comparación predictores Ejemplo 2.

Como se puede ver, la respuesta del predictor híbrido representada con la línea color magenta, es una señal que presenta un sobreimpulso mayor pero se logra estabilizar en un periodo de tiempo menor comparándola con el predictor discreto en color azul. En la Figura 8, se puede ver la comparación de las señales de error, que muestra la señal correspondiente al predictor híbrido en color magenta, que es una señal suave con menor amplitud y converge a cero en tiempo menor, mientras que la señal de color azul correspondiente a la señal de error del predictor discreto es una señal abrupta y converge a cero en un periodo de tiempo mayor.

Se decidió realizar un ejemplo más para mostrar la diferencia existente entre los dos predictores, este ejemplo consiste en el mismo sistema pero aumentando el valor del retardo.

Ejemplo 3, considere el sistema:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} e^{-2.8s}. \quad (31)$$

Como se aprecia la complejidad para controlar el sistema aumenta ya que el valor del retardo de 2.8 unidades de tiempo es considerable. En la Figura 9, se muestra la comparación de las respuestas del sistema al aplicarle los dos predictores. Aplicaremos las mismas condiciones iniciales del ejemplo 2. CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

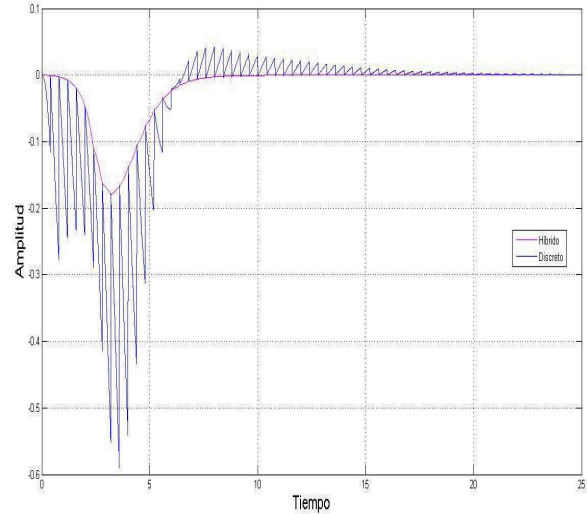


Figura 8. Comparación señal de error Ejemplo 2.

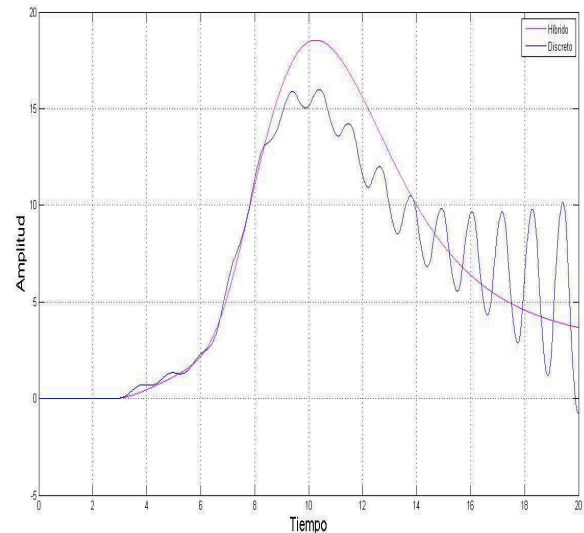


Figura 9. Comparación predictores Ejemplo 3.

La señal del predictor híbrido, de color magenta, se logra estabilizar a pesar de que el retardo sea de 2.8 unidades de tiempo y como se puede observar la señal de color azul del predictor discreto no se puede estabilizar ante esta magnitud de retardo, en la Figura 10 se ve la comparación de las señales de error y el motivo por el cual el predictor discreto no logra estabilizar el sistema debido a que la señal de color azul no logra converger a cero y en contraste la señal de color magenta del predictor híbrido es una señal suave que tiende rápidamente a cero.

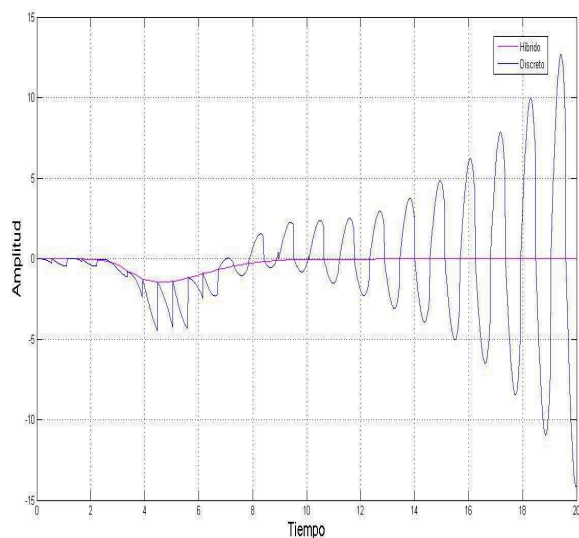


Figura 10. Comparación señal de error Ejemplo 3.

Como se observa en estos dos ejemplos el predictor híbrido tiene una mejor respuesta de estabilización ante el predictor discreto e incluso en el Ejemplo 3 el predictor híbrido es el único en estabilizar el sistema. Se realizaron diversos ejemplos que por falta de espacio no se expusieron en este texto pero en los cuales el predictor híbrido mostró ser superior que el predictor discreto.

V. CONCLUSIÓN

En este trabajo se abordó el problema de la estabilización y control de sistemas de alto orden y con retardo en el lazo directo. Para solucionar este problema se propone una metodología para el diseño de predictores híbridos, con la finalidad de estimar la variable de estado antes del retardo. Dicha estrategia esta basada en el uso de un predictor analógico que se sirve de la inyección de la señal de error en forma discreta. De esta forma se obtiene una predicción analógica de las señales internas de la planta. En este trabajo usamos un vector de ganancias para reubicar los polos de la planta, pero pudiera usarse otro tipo de estrategia, como por ejemplo alguna de tipo integral. Se comprueba la eficacia del método propuesto mediante simulaciones numéricas y la ventaja que tiene en comparación al predictor discreto.

REFERENCIAS

- Skogestad (2004) "Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning," *J. Process Control*, Vol. 13, pp. 291–309.
- Kolmanovskii, V. and A. Myshkis (1992). *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Smith O. J. M (1957). "Closer control of loops with dead time," *Chem. Eng. Prog.*, Vol. 53, No. 5, pp. 217–219.
- Seshagiri, R. A., V. S. R. Rao, and M. Chidambaram (2007). "Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (FOPTD) processes," *Ind. Eng. Chem. Res.*, Vol. 46, No. 13, pp. 4561–4571.
- Nesimioglu, B. S.; Soylemez, M. T. A (2010). Simple derivation of all stabilizing proportional controllers for first order time-delay systems. *Asian J. Control*, 14, 1–7.
- Hwang, C. and Hwang, J. (2004). Stabilization of first-order plus dead-time unstable processes using PID controllers. *IEE Proc. Control Theory Appl.* 151, 89–94.

Silva, G. J. and Bhattacharyya, S. P. (2005). *PID controllers for time-delay systems*; Birkhuser: Boston.

Silva, G. J., Datta, A. and Bhattacharyya, S. P. (2002). New Result on the Synthesis of PID Controllers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 47, 241–252.

Basilio del Muro Cuéllar, Juan Francisco Márquez Rubio Martín Velasco-Villa, and José Álvarez-Ramírez (2012). On the Control of Unstable First Order Linear Systems with Large Time lag: Observer Based Approach. *European Journal of Control*. Vol 18 No. 5 ISSN: 0947-3580 Vol. 5

JF Marquez, B. del Muro Cuéllar, M. Velasco Villa and D.F. Novella (2012). Observer–PID Stabilization Strategy for Unstable First Order Linear Systems with Large Time Delay. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 51 (25), pp 8477–8487 Publication Date (Web): June 7, (Article) ISSN: 0888-5885. DOI: 10.1021/ie201793j

K. Ogata (1996), *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, Segunda edición, Editorial PEARSON Prentice Hall.