

Cinemática de Posición de un Mecanismo Paralelo tipo 3-CUP

Israel Soto, Omar Martínez y Ricardo Campa
Instituto Tecnológico de la Laguna
Torreón, Coah, México
israel_kb@ieee.org

Resumen—En este documento se presenta el análisis de la cinemática directa e inversa de posición de un mecanismo paralelo de 3 grados de libertad, del tipo conocido como 3-CUP. Este mecanismo está constituido por dos cuerpos rígidos, uno fijo (base) y otro móvil (plataforma), conectados entre sí por tres cadenas cinemáticas seriales del tipo CUP, donde las iniciales C, U, y P denotan la presencia de una articulación cilíndrica, una universal y una prismática, en cada cadena. En el análisis se emplearon herramientas de geometría y álgebra vectorial. Al final, de forma numérica, se hace una validación de los modelos cinemáticos obtenidos.

Palabras clave: robot paralelo, cinemática de posición, mecanismo 3-CUP, punto de Fermat

I. INTRODUCCIÓN

Un mecanismo paralelo comúnmente consiste de una plataforma móvil acoplada a una base fija por medio de varias cadenas cinemáticas seriales, conocidas como piernas. El interés por estudiar este tipo de mecanismo es debido a sus cualidades, tales como precisión, rigidez y gran capacidad de carga. Las principales desventajas son su limitado espacio de trabajo y su compleja cinemática de posición. En (Merlet, 2006) se presentan varias arquitecturas mecánicas de robots paralelos así como diferentes aplicaciones.

En general, para designar mecanismos paralelos cuyas piernas están repartidas simétricamente y tienen la misma composición, se usa la notación N-TTT, donde N denota el número de piernas y TTT es una cadena que indica el tipo de articulaciones que compone cada pierna. En la tabla I se muestran los diferentes tipos de articulaciones existentes.

TABLA I
TIPOS DE ARTICULACIONES

Articulación	Símbolo	g.d.l	Movimientos simples
Prismática	P	1	1 traslación
Rotacional	R	1	1 rotación
Helicoidal	H	1	1 traslación y 1 rotación (dependientes)
Cilíndrica	C	2	1 traslación y 1 rotación
Universal	U	2	2 rotaciones
Planar	E	3	2 traslaciones y 1 rotación
Esférica	S	3	3 rotaciones

Por ejemplo, la arquitectura típica de la conocida plataforma de Stewart se clasifica como un mecanismo tipo 6-UPS, ya que está formada por 6 piernas, cada una conteniendo

una articulación universal, una prismática y una esférica, en serie.

El número de grados de libertad (g.d.l.) de una articulación (columna 3 de la tabla I) indica el número de movimientos independientes (libres) que se permiten entre los dos eslabones que une tal articulación. Las articulaciones R y P se consideran simples, en el sentido de que cada una de ellas tiene sólo un movimiento (de rotación y traslación, respectivamente). Las demás articulaciones se consideran compuestas por varias articulaciones simples; por ejemplo, la articulación cilíndrica puede verse como la combinación de una articulación P y una R; en el caso de una articulación helicoidal, también hay una rotación y una traslación, pero esos movimientos no son independientes, tal como ocurre en un tornillo. Para más información sobre los diferentes tipos de articulaciones consultar (Tsai, 1999).

El análisis cinemático de mecanismos paralelos con movilidad completa, es decir con 6 g.d.l., se puede encontrar desde hace años en la literatura (ver (Hunt, 1983) y (Fichter, 1986)). Sin embargo, para ciertas aplicaciones no siempre se requieren mecanismos de 6 g.d.l., por lo que, recientemente, mecanismos paralelos con menos de 6 g.d.l. han atraído la atención de varios investigadores. En (Rodríguez-Leal *et al.*, 2011) se puede encontrar una clasificación de este tipo de mecanismos.

El robot paralelo estudiado en este documento es precisamente un mecanismo espacial de movilidad restringida, de 3 g.d.l., del tipo 3-CUP, el cual ha sido propuesto en (Rodríguez-Leal y Dai, 2010), inspirado en el mecanismo 3-PSP, ya estudiado por (Di Gregorio y Parenti-Castelli, 2001).

En la figura 1 se muestra una imagen CAD del mecanismo 3-CUP que se estudia. La cinemática inversa de posición fue presentada por primera vez en (Cuan-Urquiza *et al.*, 2011) y, más recientemente, en (Cuan-Urquiza y Rodríguez-Leal, 2013). En esta última referencia, además de la cinemática de posición (directa e inversa), se presenta la cinemática de velocidad, el análisis de singularidades y del espacio de trabajo de este mecanismo.

El objetivo del presente trabajo es presentar un procedimiento alternativo para obtener la cinemática de posición del mecanismo 3-CUP. La idea clave de este procedimiento es el empleo del llamado punto de Fermat.

En la sección II se describen precisamente los conceptos

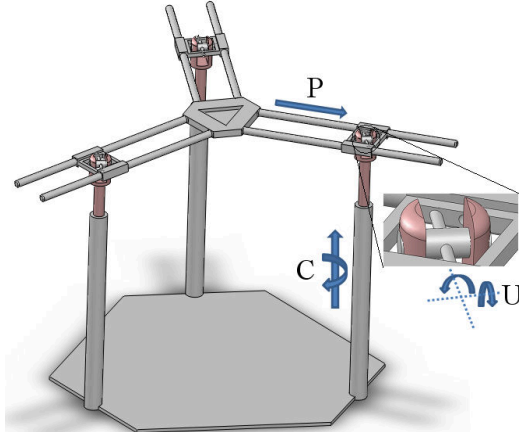


Figura 1. Mecanismo 3-CUP

relacionados con a) el modelado cinemático de posición de robots paralelos, y b) el punto de Fermat. Posteriormente, en la sección III, se describe con más detalle el mecanismo 3-CUP, mientras que en la sección IV se desarrolla el análisis de la cinemática directa e inversa de posición. Para validar los resultados obtenidos, se llevó a cabo una evaluación numérica, que se presenta en la sección V. Finalmente, en la sección VI se dan las conclusiones de este estudio.

II. CONCEPTOS PRELIMINARES

II-A. Cinemática de posición de mecanismos paralelos

Un mecanismo está formado por un conjunto de cuerpos rígidos (eslabones) unidos entre sí por medio de articulaciones. Normalmente uno de los eslabones se mantiene siempre fijo y es conocido como la base del mecanismo. Del resto de los eslabones, generalmente hay uno que resulta de interés y del cual se desea tener control sobre su postura, (es decir, su posición y orientación en el espacio). Este eslabón o elemento de interés es comúnmente conocido como elemento terminal del mecanismo.

Se le llama cadena cinemática a cualquier serie de eslabones conectados dentro del mecanismo; si entre la base y el elemento terminal existe solo una cadena cinemática, se dice que es un mecanismo de cadena cinemática abierta o mecanismo tipo serie. Si entre la base y el elemento terminal existe más de una cadena cinemática entonces se habla de un mecanismo de cadena cinemática cerrada, mecanismo tipo paralelo o, simplemente, mecanismo paralelo.

Se le llama configuración de un mecanismo a la ubicación en el espacio de todos los eslabones del mecanismo en un tiempo determinado. Y debe notarse que en un mecanismo tipo serie el número de g.d.l que determinan su configuración es igual al número de g.d.l acumulado de todas sus articulaciones. Sin embargo, en un mecanismo tipo paralelo, debido no sólo a la existencia de cadenas cinemáticas cerradas, sino también a la colocación de las articulaciones en esas cadenas, existen restricciones holonómicas que reducen el número de g.d.l (es decir, la movilidad) del mecanismo

paralelo. Muchas veces es necesario hacer un análisis de movilidad para determinar exactamente el número de g.d.l del mecanismo. En (Dai *et al.*, 2006) se propone un método para análisis de movilidad empleando teoría de tornillos.

Considérese en general un mecanismo con m articulaciones simples, pero sólo n g.d.l (con $m \leq n$), entonces es claro que deben existir $m - n$ restricciones holonómicas que limitan el movimiento de tal mecanismo. Además, debe resultar claro que un mecanismo de n g.d.l. requiere sólo de n actuadores simples (ya sea traslacionales o rotacionales) para tener control sobre el mismo.

Sea a el número de actuadores simples en un mecanismo de n g.d.l., si $a = n$ entonces se dice que el mecanismo es completamente actuado, si $a < n$ entonces es un mecanismo subactuado; si $a > n$ entonces el mecanismo es sobreactuado (o que tiene redundancia de actuación). Se le llama articulaciones activas a las que son actuadas, mientras que las que no tienen actuador se conocen como articulaciones pasivas.

Por otra parte, el número de g.d.l necesarios para determinar la postura (posición y orientación) de un cuerpo rígido que se mueve libremente en el espacio es seis, siendo tres para la posición y tres para la orientación. Por esta razón, cualquier mecanismo espacial con movilidad completa debe tener al menos 6 g.d.l.

Un mecanismo espacial con movilidad restringida es aquel en el que el elemento terminal no puede moverse libremente y por tanto su espacio de postura es de menos de 6 g.d.l.

Ahora es posible definir la cinemática de posición de un mecanismo como la relación entre las variables de configuración libres (asociadas a las articulaciones activas) y las variables de postura libres del elemento terminal del mecanismo.

Sea \mathbf{q} el vector que agrupa las n variables de configuración (o, como se les conoce comúnmente, variables articulares) de las articulaciones activas (es decir, $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \in \mathbb{R}^n$); además, sea \mathbf{x} el vector de $r \leq 6$ variables de postura libres del elemento terminal del mecanismo (i.e., $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r]^T \in \mathbb{R}^r$); entonces la cinemática directa de posición es una función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ que permite obtener \mathbf{x} a partir de \mathbf{q} , esto es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}); \quad (1)$$

mientras que la función inversa, $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$, es conocida, como la cinemática inversa de posición del mecanismo:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

II-B. El punto de Fermat

A principios del siglo XIX el matemático francés Pierre de Fermat planteó el siguiente problema de geometría: “Dados tres puntos en el plano, encontrar un cuarto punto tal que la suma de las distancias de ese punto a los tres puntos dados sea la mínima”. Se sabe que para 1640 el problema había sido resuelto por el italiano E. Torricelli.

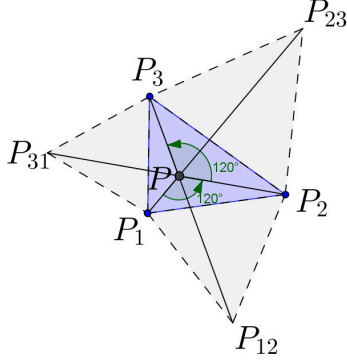


Figura 2. Ubicación del punto de Fermat en un triángulo.

Es por eso que al punto que da solución a tal problema se le conoce como punto de Fermat o punto de Torricelli (Clapham y "Nicholson, 2009) (Bottema, 2008).

Si P_1 , P_2 y P_3 son los tres puntos conocidos, que forman el triángulo mostrado en la figura 2, entonces el punto de Fermat P , es tal que la función $d(P, P_1) + d(P, P_2) + d(P, P_3)$ es mínima, donde $d(\cdot, \cdot)$ da la distancia entre los puntos en el argumento.

Una propiedad importante del punto de Fermat es que si todos los ángulos interiores del triángulo $P_1P_2P_3$ son menores de 120° , entonces el punto P permanece en el interior del triángulo y coincide con el llamado primer centro isogónico del triángulo, para el cual se satisface que los ángulos $\angle P_1PP_2$, $\angle P_2PP_3$ y $\angle P_3PP_1$ son iguales a 120° .

Para el caso en el que uno de los ángulos interiores del triángulo $P_1P_2P_3$ sea mayor de 120° , el punto de Fermat deja de coincidir con el primer centro isogónico y se demuestra que está colocado justamente en el vértice del ángulo obtuso.

Considerese el triángulo mostrado en la figura 2, el primer punto isogónico de un triángulo cualquiera se obtiene de la siguiente manera (Chuang y Li, 2009):

- En cada lado del triángulo $P_1P_2P_3$, y hacia la parte exterior del mismo, se dibuja un triángulo equilátero, para obtener los puntos P_{12} , P_{23} P_{31}
- Se trazan rectas que unan los nuevos vértices de esos triángulos equiláteros a los vértices opuestos del triángulo original (es decir, P_1 con P_{23} , P_2 con P_{31} y P_3 con P_{12})
- Las tres rectas se intersectan en el primer centro isogónico (o punto de Fermat).

III. MANIPULADOR 3-CUP

El manipulador paralelo 3-CUP fue propuesto inicialmente en (Rodríguez-Leal y Dai, 2010) como una modificación al mecanismo 3-PSP (Di Gregorio y Parenti-Castelli, 2001) con el que tiene muchas similitudes. De hecho, de acuerdo a la tabla I, las cadenas cinemáticas CUP y PSP tienen exactamente el mismo número y tipo de

articulaciones simples. Y como se explica en (Rodríguez-Leal *et al.*, 2011) tanto el mecanismo 3-CUP como el 3-PSP son mecanismos de movilidad restringida con sólo 3 g.d.l. en la postura del elemento terminal.

La figura 1 muestra uno de los posibles diseños físicos del mecanismo 3-CUP. Se trata de una base en forma de triángulo equilátero horizontal, donde en cada vértice del triángulo se coloca la articulación cilíndrica que sostiene a una plataforma móvil triangular (que hace las veces de elemento terminal) a través de una articulación universal y un deslizador que funciona como articulación prismática en cada una de las piernas del mecanismo.

Para fines del análisis cinemático, a la base del mecanismo se le asocia un marco coordenado $\Sigma_B(X_B, Y_B, Z_B)$ que se coloca en el centro del triángulo equilátero, con el eje X_B orientado hacia uno de los vértices (ver figura 3), de modo que si cada lado del triángulo equilátero mide h entonces los vectores de posición de los vértices de la base (denotados en la figura 3 como A_1 , A_2 y A_3) serían:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{bmatrix} \frac{h}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ a_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{h}{2\sqrt{3}} & \frac{h}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \\ a_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{h}{2\sqrt{3}} & -\frac{h}{2} & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Respecto a la plataforma móvil, según el diseño de la figura 1 se trata también de un triángulo equilátero, en cuyo centroide se coloca el marco $\Sigma_P(X_P, Y_P, Z_P)$ con el eje Z_P perpendicular a la plataforma y X_P apuntando en la dirección del punto P_1 , colocada en la intersección de la plataforma y la línea vertical que pasa por A_1 . De manera similar, los puntos P_2 y P_3 se colocan en la intersección de la plataforma móvil y las líneas verticales que pasan por A_2 y A_3 , respectivamente.

En otras palabras, si z_1 , z_2 y z_3 son las coordenadas z de los puntos P_1 , P_2 y P_3 , respectivamente, en el marco Σ_B , entonces los vectores de posición de esos puntos son:

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{bmatrix} \frac{h}{\sqrt{3}} & 0 & z_1 \end{bmatrix}^T, \\ p_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{h}{2\sqrt{3}} & \frac{h}{2} & z_2 \end{bmatrix}^T, \\ p_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{h}{2\sqrt{3}} & -\frac{h}{2} & z_3 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Ahora bien, el triángulo $P_1P_2P_3$ no es en general equilátero (salvo cuando la plataforma móvil es horizontal) pero debe resultar claro que el origen de Σ_P se encuentra justamente en el primer centro isogónico (o punto de Fermat) de ese triángulo.

En la sección siguiente se explica como utilizar este hecho para obtener la cinemática directa de posición de la plataforma 3-CUP.

IV. CINEMÁTICA DE POSICIÓN DEL MECANISMO 3-CUP

Para comenzar el análisis es necesario establecer cuáles serán las variables articulares activas y cuales las variables

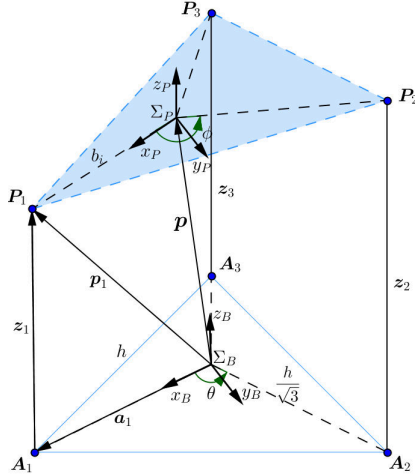


Figura 3. Esquema del mecanismo 3-CUP

de postura de la plataforma móvil (ver sección II).

Dado que se considera que los actuadores del mecanismo son tornillos colocados en el interior de las articulaciones cilíndricas (que permiten controlar sólo el movimiento de traslación correspondiente) se tomarán como variables articulares activas las coordenadas z_1 , z_2 y z_3 de la figura 3, es decir $\mathbf{q} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$.

Supóngase que, en el caso general, la posición de la plataforma móvil del mecanismo está determinada por las coordenadas cartesianas del origen del marco Σ_P con respecto al marco Σ_B , denominadas simplemente x , y y z ; mientras que para la orientación se usan los ángulos de Euler (α, β, γ) convención XYZ respecto al marco fijo (ver (Craig, 2004)).

Pero la plataforma móvil del mecanismo 3-CUP tiene movilidad restringida a sólo 3 g.d.l., por lo que sólo es necesario especificar 3 variables de postura en el vector \mathbf{x} .

En (Di Gregorio y Parenti-Castelli, 2001) se hace un análisis cinemático del mecanismo 3-PSP y se menciona que como variables de postura libres de la plataforma se pueden seleccionar:

- las tres coordenadas de posición: $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$.
- la coordenada z y los ángulos α y β : $\mathbf{x} = [z \ \alpha \ \beta]^T$.

Para el análisis que se presenta a continuación se selecciona la opción b).

IV-A. Cinemática directa

El primer paso es caracterizar el plano de la plataforma móvil (donde está el triángulo $P_1P_2P_3$). De geometría analítica se sabe que si \mathbf{n} es un vector normal a un plano y tiene componente a , b y c , es decir

$$\mathbf{n} = [a \ b \ c]^T$$

entonces la ecuación del plano es

$$ax + by + cz - d = 0, \quad (4)$$

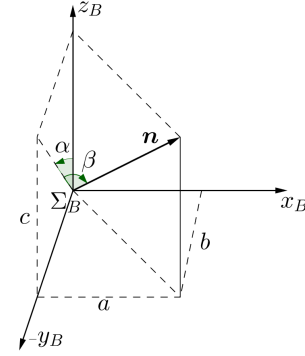


Figura 4. Vector normal al plano del efector final.

donde d es tal que la distancia del origen al plano es

$$\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Dado que los puntos P_1 , P_2 y P_3 , con coordenadas dadas por (3), pertenecen al plano de la plataforma, deben satisfacer la ecuación (4), así que se puede formar un sistema de ecuaciones para resolver a , b y c en función de z_1 , z_2 y z_3 ; el resultado es:

$$a = \frac{\sqrt{3}d(-2z_1 + z_2 + z_3)}{h(z_1 + z_2 + z_3)} \quad (5)$$

$$b = \frac{3d(z_3 - z_2)}{h(z_1 + z_2 + z_3)} \quad (6)$$

$$c = \frac{3d}{(z_1 + z_2 + z_3)} \quad (7)$$

En la figura 4 se ha representado el vector \mathbf{n} en el marco de la base, y además se han señalado los ángulos α y β (que dan las rotaciones alrededor de X_B y Y_B). De la figura se puede concluir que esos ángulos son

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-b}{c}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}\right) \quad (8)$$

y sustituyendo (5)-(7) se obtiene α y β en función de \mathbf{q} .

Ahora se procede a determinar la ubicación del origen del marco Σ_P , el cual, como ya se dijo, se encuentra en el punto de Fermat del triángulo $P_1P_2P_3$ así que se seguirá el procedimiento indicando en la sección II para determinarlo, véase la figura 5.

Primeramente, se seleccionan los lados P_1P_2 y P_3P_1 como la base de los triángulos equiláteros. (Nótese que no es necesario el tercer triángulo equilátero ya que el punto de Fermat se localiza sólo con dos). Los lados seleccionados están dados por los vectores.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1.$$

En seguida se determina la ubicación del punto medio de esos mismos lados de los triángulos equiláteros,

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}, \quad \mathbf{m}_2 = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3}{2},$$

y se especifica un vector unitario en dirección al nuevo

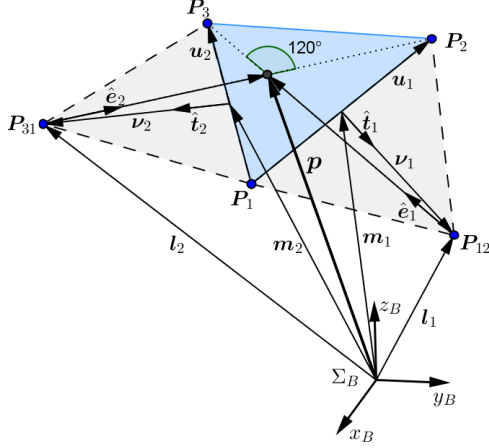


Figura 5. Localización del punto de Fermat en el mecanismo 3-CUP

vértice de cada triángulo equilátero (puntos P_{12} y P_{31} en la figura 5) mediante

$$\hat{t}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{u}_1 \times \mathbf{n}\|}, \quad \hat{t}_2 = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{u}_2\|}.$$

Hay que recordar que la altura de cualquier triángulo equilátero está dada por $\frac{\sqrt{3}}{2}b_s$, donde b_s es la base del triángulo, de modo que se pueden definir los vectores que van de los puntos medios de los lados P_1P_2 y P_1P_3 a los puntos P_{12} y P_{31} respectivamente. Tales vectores están dados por

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\mathbf{u}_1\| \hat{t}_1, \quad \boldsymbol{\nu}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\mathbf{u}_2\| \hat{t}_2.$$

Así que los vectores de posición de los puntos P_{12} y P_{31} serían

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{m}_1 + \boldsymbol{\nu}_1, \quad \mathbf{l}_2 = \mathbf{m}_2 + \boldsymbol{\nu}_2.$$

Falta encontrar las rectas que unen los puntos P_3 con P_{12} y P_2 con P_{31} . Los vectores unitarios en la dirección de esas rectas son:

$$\hat{e}_1 = \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{l}_1}{\|\mathbf{p}_3 - \mathbf{l}_1\|}, \quad \hat{e}_2 = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{l}_2}{\|\mathbf{p}_2 - \mathbf{l}_2\|}$$

que se usan en la ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{l}_1 + \lambda \hat{e}_1, \quad (9)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{l}_2 + \zeta \hat{e}_2. \quad (10)$$

En el punto de intersección de ambas líneas se satisface

$$\mathbf{p} = \mathbf{l}_1 + \lambda \hat{e}_1 = \mathbf{l}_2 + \zeta \hat{e}_2 \quad (11)$$

Multiplicando (11) por \hat{e}_1^T y por \hat{e}_2^T , se obtiene, respectivamente

$$\lambda = \hat{e}_1^T (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) + \zeta \hat{e}_1^T \hat{e}_2, \quad (12)$$

$$\zeta = \hat{e}_2^T (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) + \lambda \hat{e}_2^T \hat{e}_1, \quad (13)$$

sustituyendo (13) en (12) y teniendo en cuenta que $\hat{e}_1^T \hat{e}_2 = \hat{e}_2^T \hat{e}_1 = -\frac{1}{2}$,

$$\lambda = \frac{4\hat{e}_1^T (\mathbf{l}_2 - \mathbf{l}_1) - 2\hat{e}_2^T (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2)}{3} \quad (14)$$

Así que usando

$$\mathbf{p} = \mathbf{l}_1 + \lambda \hat{e}_1 \quad (15)$$

con λ dada por (14) es posible encontrar el vector \mathbf{p} , que da la ubicación del origen del marco Σ_P , con respecto al marco Σ_B . Y dado que \mathbf{l}_1 y \hat{e}_1 se pueden poner en función de los vectores \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 y \mathbf{p}_3 y \mathbf{n} , que a su vez dependen de z_1 , z_2 y z_3 , es posible determinar no sólo la coordenada z de la postura sino también la x y la y (ya que $\mathbf{p} = [x \ y \ z]^T$) en función del vector \mathbf{q} .

IV-B. Cinemática inversa

La cinemática inversa de este mecanismo fue obtenida de manera similar a como se hizo en (Cuan-Urquiza *et al.*, 2011), aunque las expresiones obtenidas para la solución son más simples.

La ecuación de lazo cerrado para la pierna i se puede definir con respecto al marco Σ_B como

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p} + b_i {}^B R [\cos(\phi_i) \ \sin(\phi_i) \ 0]^T \quad (16)$$

donde $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 120^\circ$, $\phi_3 = 240^\circ$ y

$${}^B R = \begin{bmatrix} C_\gamma C_\beta & C_\gamma S_\beta S_\alpha - S_\gamma C_\alpha & C_\gamma S_\beta C_\alpha + S_\gamma S_\alpha \\ S_\gamma C_\beta & S_\gamma S_\beta S_\alpha + C_\gamma C_\alpha & S_\gamma S_\beta C_\alpha - C_\gamma S_\alpha \\ -S_\beta & C_\beta S_\alpha & C_\beta C_\alpha \end{bmatrix}$$

es la matriz de rotación de Σ_P con respecto a Σ_B para la convención de ángulos de Euler XYZ respecto al marco fijo; se usa la notación simplificada para senos y cosenos ($C_\cdot = \cos(\cdot)$, $S_\cdot = \sin(\cdot)$) y b_i son las distancias de los vértices del triángulo de la plataforma móvil al origen de Σ_P .

La ecuación (16) genera tres ecuaciones para cada pierna, es decir, nueve ecuaciones con nueve incógnitas (b_1 , b_2 , b_3 , z_1 , z_2 , z_3 , x , y , γ), las cuales fueron resueltas con Mathematica.

Las coordenadas articulares activas son

$$z_1 = z - b_1 S_\beta \quad (17)$$

$$z_2 = \frac{(2z + b_2 S_\beta + \sqrt{3} b_2 S_\alpha C_\beta)}{2} \quad (18)$$

$$z_3 = \frac{(2z + b_3 S_\beta - \sqrt{3} b_3 S_\alpha C_\beta)}{2} \quad (19)$$

donde

$$b_1 = h \frac{(3C_\alpha^2 C_\beta^2 + 2C_\alpha C_\beta - 4C_\beta^2 + 3)}{2\sqrt{3}C_\alpha C_\beta (1 + C_\alpha C_\beta)},$$

$$b_2 = \frac{h((C_\alpha + C_\beta) + \sqrt{3}S_\beta S_\alpha)}{\sqrt{3}C_\alpha (1 + C_\alpha C_\beta)},$$

$$b_3 = \frac{h((C_\alpha + C_\beta) - \sqrt{3}S_\beta S_\alpha)}{\sqrt{3}C_\alpha (1 + C_\alpha C_\beta)}.$$

Además la posición de la plataforma queda definida por

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} - \frac{b_1(C_\alpha + C_\beta)C_\beta}{(1 + C_\alpha C_\beta)}, \quad y = -\frac{b_1 S_\alpha S_\beta C_\beta}{(1 + C_\alpha C_\beta)}$$

y el ángulo de orientación queda expresado mediante

$$\gamma = \arccos\left(\frac{C_\alpha + C_\beta}{1 + C_\alpha C_\beta}\right) \quad (20)$$

V. VALIDACIÓN NUMÉRICA

Con el propósito de probar que las ecuaciones obtenidas en la sección anterior son correctas, se propusieron dos configuraciones diferentes para el mecanismo 3-CUP. Como primer paso, se propusieron valores numéricos para las variables articulares z_1 , z_2 y z_3 , y se usaron las expresiones (15) y (8) para obtener las variables de la postura de la plataforma (x, y, z, α, β) , para obtener γ se usó la expresión (20) y también se obtuvieron las distancias de b_i . Como segundo paso se tomaron los valores obtenidos en el paso anterior para z , α y β y se utilizaron las expresiones (17)-(19) para obtener las variables articulares del mecanismo. Lo anterior se realizó considerando sólo $h = 0.5$.

La figuras 6 y 7 muestran las dos configuraciones solicitadas al mecanismo paralelo 3-CUP y la tabla II muestra los valores de entrada (en negrita) y los valores obtenidos de la cinemática directa e inversa de este mecanismo paralelo de tres g.d.l.. Se observa que los valores numéricos obtenidos son iguales, por lo que se validan los modelos cinemáticos directo e inverso.

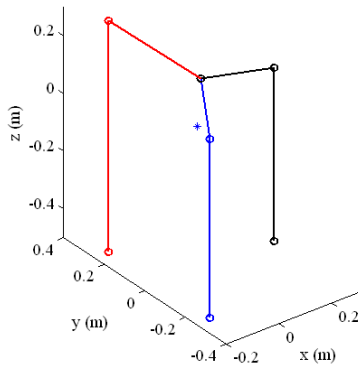


Figura 6. Primera configuración del mecanismo 3-CUP.

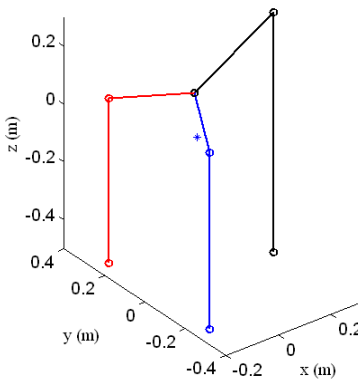


Figura 7. Segunda configuración del mecanismo 3-CUP.

VI. CONCLUSIONES

En este documento se explica como obtener el modelo cinemático directo e inverso de posición de un mecanismo

TABLA II
CONFIGURACIONES DEL MECANISMO 3-CUP

Variable (unidades)	Cinemática Directa		Cinemática Inversa	
	primera	segunda	primera	segunda
x (m)	0.0039	-0.0178	0.0039	-0.0178
y (m)	-0.0117	-0.0063	-0.0117	-0.0063
z (m)	0.1681	0.1606	0.1681	0.1606
α (rad)	0.3455	-0.0798	0.3455	-0.0798
β (rad)	0.2346	-0.5047	0.2346	-0.5047
γ (rad)	0.0411	0.0206	0.0411	0.0206
z_1 (m)	0.1	0.33	0.1	0.33
z_2 (m)	0.3	0.07	0.3	0.07
z_3 (m)	0.12	0.11	0.12	0.11
b_1 (m)	0.2931	0.3502	0.2931	0.3502
b_2 (m)	0.3284	0.2999	0.3284	0.2999
b_3 (m)	0.2847	0.2792	0.2847	0.2792

paralelo espacial de tres g.d.l conocido como 3-CUP. La obtención del modelo cinemático directo de posición se realizó aplicando análisis vectorial y un concepto geométrico conocido como punto de Fermat. Este concepto podría ser utilizado para el análisis de posición de mecanismos similares al presentado en este documento

VII. AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado parcialmente por, DGEST y CONACYT (proyecto 60230).

REFERENCIAS

- Bottema, O. (2008). *Topics in Elementary Geometry*. Springer.
- Chuang, P. J. y B. Y. Li (2009). An efficient data dissemination scheme for sensor networks. En: *Algorithms and Architectures for Parallel Processing* (A. Hua y S. Chang, Eds.). pp. 729-740. Springer.
- Clapham, C. y J. Nicholson (2009). *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics*. Oxford University Press.
- Craig, J. J. (2004). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson Prentice Hall. USA.
- Cuan-Urquiza, E., E. Rodriguez-Leal y J. S. Dai (2011). Mobility analysis and inverse kinematics of a novel 2R1T parallel manipulator. En: *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference*. Washington, DC, USA.
- Cuan-Urquiza, E. y E. Rodriguez-Leal (2013). Kinematic analysis of the 3-CUP parallel mechanism. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* **29**, 382-395.
- Dai, J. S., Z. Huang y H Lipkin (2006). Mobility of overconstrained parallel mechanisms. *Journal of Mechanical Design* **128**, 220-229.
- Di Gregorio, R. y V. Parenti-Castelli (2001). Position analysis in analytical form of the 3-PSP mechanism. *ASME Journal of Mechanical Design* **123**, 51-55.
- Fichter, E. F. (1986). A Stewart platform-based manipulator: General theory and practical construction. *International Journal of Robotic Research* **5**, 157-182.
- Hunt, K. H. (1983). Structural kinematics of in-parallel actuated robot-arms. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design* **105**, 705-712.
- Merlet, J. P. (2006). *Parallel Robots*. Springer-Verlag.
- Rodriguez-Leal, E., J. S. Dai y G. R. Pennock (2011). On the mobility of 3-dof parallel manipulators via screw theory. En: *Robotics: State of the Art and Future Trends* (G. Legnani y I. Fassi, Eds.). pp. 75-110. Nova Science Publishers Inc.
- Rodriguez-Leal, E. y J. S. Dai (2010). *Evolutionary Design of Parallel Mechanism*. Lambert Academic Publications.
- Tsai, L.W. (1999). *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley and Sons. USA.