

Generación de una Ruta al Caos en una clase de sistemas de tercer orden

O. Soto, J. Alvarez

Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones,
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada,
Km 107 Carretera Tijuana-Ensenada, 22860 Ensenada, Baja California, México
osoto@cicese.edu.mx, jqalvar@cicese.mx

Resumen— El desarrollo de técnicas de control para la generación de comportamiento caótico en sistemas que no lo presentan ha sido estudiado anteriormente; sin embargo, en el presente artículo se plantea un objetivo de control diferente: no sólo lograr la presencia de comportamiento caótico, sino que se llegue a dicho comportamiento siguiendo una Ruta al Caos en particular en sistemas de tercer orden.

Palabras clave: Sistemas Caóticos; Control de Sistemas Lineales; Control de Sistemas No Lineales

I. INTRODUCCIÓN

Diversos métodos han sido utilizados para la obtención de comportamiento caótico en sistemas que no lo presentan. Esto se ha logrado utilizando algunas técnicas de retroalimentación. Sin embargo, la generación de diversos escenarios que conducen al comportamiento caótico (rutas al caos) no ha sido investigada completamente.

Algunos de los trabajos presentes en la literatura mencionan diversas soluciones para la generación de caos, por mencionar algunos ejemplos, en (Tang, 2001) y en (Zhong, 2001) se obtiene comportamiento caótico utilizando la función cuadrática $x|x|$, y se verifica de forma matemática la generación de caos, sin embargo, las conclusiones a las que llegan los autores en (Tang, 2001) se centran en el papel de la función especial $x|x|$ en la generación de caos en sistemas no autónomos, y no en la ruta al caos a seguir.

En (Zhong, 2001) se utiliza un controlador dinámico pero se sigue el mismo análisis básico al utilizado en (Tang, 2001) para encontrar los parámetros que generan comportamiento caótico. Al igual que en (Tang, 2001) los autores no realizan un análisis sobre la ruta al caos que sigue el sistema.

En (Wallace, 2003) se hace una continuación del trabajo presentado en (Tang, 2001), sólo que ahora se centra en sistemas autónomos lineales de tercer orden y se utiliza un control por retroalimentación simple, de la forma $g(x)=\beta x|x|$, se realiza un análisis de bifurcaciones y se verifica la existencia de caos basándose en el teorema de

Shilnikov. En dicho artículo se hace un análisis más detallado de las bifurcaciones que aparecen al variar los parámetros, pero tampoco se establece la ruta al caos que sigue el sistema ni se analizan los diagramas de bifurcación.

Otro método utilizado para generar caos es el presentado en (Ren, 2006), el cual consiste en una retroalimentación directa con retardos. El controlador propuesto por los autores tiene una forma similar al propuesto por (Pyragas, 1992) para la eliminación de caos y se demuestra que también puede ser utilizado para generar ésta dinámica consiguiendo que, de esta manera, con una misma estructura del controlador sea posible diseñar un sistema que se comporte de forma caótica o no, según se desee. A pesar de lo anterior, los autores aclaran que su trabajo solo investiga la efectividad del método propuesto, mientras que queda abierta una investigación más a fondo sobre el aspecto teórico de la retroalimentación directa retardada tanto para generar caos, como para eliminarlo, aunque no se estudia la ruta que se sigue en la generación de caos.

En (Starkov, 2004) también se busca inducir comportamiento caótico a un sistema por medio de retroalimentación retardada en tiempo; sin embargo se hace de forma indirecta, por lo que es necesario agregar una señal sinusoidal en la entrada de control. El método propuesto por los autores en (Starkov, 2004) cuenta con el sustento matemático con el que soportan sus conclusiones, lo que ayuda a realizar un mejor análisis y permite establecer que es un esquema semiglobal de generación de caos y que puede ser aplicado a un grupo grande de sistemas continuos polinomiales, pero tampoco incluye un análisis sobre la ruta al caos que se sigue.

Los autores de (Guan, 2010) utilizan lógica difusa en el controlador por retroalimentación con retardos, algo novedoso en comparación con los demás artículos, pero sólo se centra en el surgimiento de dinámica caótica.

En (Alvarez, 2000) se propone utilizar un controlador retroalimentado para linealizar el sistema en lazo cerrado y después aplicar un segundo controlador que contenga un mapeo no lineal del sistema retardado, de manera que se puedan producir oscilaciones periódicas y caos. La

estrategia presentada puede ser bastante útil, ya que se pueden eliminar dinámicas no deseadas, aunque tampoco se analiza de manera explícita la ruta al caos que sigue el sistema controlado.

Como se puede apreciar por los ejemplos mencionados, el enfoque que se ha dado a los trabajos de generación de caos ha sido solamente que se presente la dinámica caótica, no tomando en cuenta la ruta que se sigue para el surgimiento de dicha dinámica.

Antes de proseguir es importante aclarar que la frase "Ruta al Caos" se refiere al proceso por el cual un conjunto atractor simple de un sistema dinámico (como puede ser un punto fijo o una órbita periódica) se convierte en caótico a medida que un parámetro externo es variado.

A continuación se presentan tres formas en que los atractores caóticos pueden surgir mientras se varía un parámetro. Estas son las más conocidas rutas al caos, más no las únicas. Se explicarán de manera breve.

- Duplicación de periodo. En esta ruta al caos, el punto fijo u órbita periódica pierde estabilidad hacia una órbita del doble de periodo a medida que el parámetro pasa por un valor crítico. En algún valor de parámetro posterior, se presenta un nuevo valor crítico, por lo que la órbita de periodo doble pierde estabilidad hacia una órbita de periodo cuádruple, y así sucesivamente (Feigenbaum, 1978, 1979).
- Intermitencia. Para valores del parámetro ligeramente mayores al valor crítico, el sistema se mantiene en la vecindad de la órbita periódica hasta que es interrumpido por un "impulso" en el cual exhibe un posible comportamiento irregular. Eventualmente, la trayectoria reingresa a la región cercana a la órbita periódica y se repite el proceso (Pomeau y Manneville, 1980; Manneville y Pomeau, 1980).
- Ruelle-Takens-Newhouse. Para un valor crítico del parámetro el punto fijo pierde estabilidad en una bifurcación tipo Hopf y surge una órbita periódica estable, al siguiente valor crítico del parámetro aparece otra bifurcación Hopf formando un toroide (T^2), una nueva bifurcación Hopf aparece al siguiente valor crítico del parámetro formando un 3-toroide (T^3). Para $n \geq 3$ cada campo vectorial constante en el toroide T^n puede ser perturbado por una cantidad arbitrariamente pequeña a un nuevo campo vectorial con atractor caótico (Newhouse, Ruelle y Takens, 1978).

Para el presente artículo se eligió la ruta al caos por duplicación de periodo, esto debido a que es una de las más conocidas y a que presenta un diagrama de Feigenbaum característico, con lo cual se puede verificar

de forma cualitativa que la ruta al caos deseada se presenta.

Dentro de los sistemas que pueden presentar ruta al caos por duplicación de periodo, se han considerado como base para el presente trabajo los propuestos por (Sprott, 1994, 2010), los cuales son sistemas continuos de tres dimensiones que presentan uno o dos términos no lineales.

En (Sprott, 2010) se presenta una amplia gama de sistemas con características similares. Se eligieron los sistemas de Sprott debido a que son sistemas polinomiales y presentan únicamente no linealidades cuadráticas, lo que facilita su análisis.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el presente artículo se plantea como objetivo el hacer que un sistema de tercer orden presente comportamiento caótico siguiendo una ruta al caos deseada, en este caso la ruta por duplicación de periodo. Para conseguir dicho objetivo se utilizan sistemas de Sprott como referencia, por las características mencionadas anteriormente.

Dentro de la gama disponible de sistemas en (Sprott, 2010) se eligieron aquellos que presentaban una estructura más simple, consistiendo únicamente de cinco términos (dos de ellos no lineales) o seis términos (con uno de ellos no lineal) y se hizo un análisis de cada uno de ellos, para ver cuales presentaban la ruta al caos deseada. A continuación se presentan algunos de los sistemas que cumplen con dicha característica: en la Fig.1 se muestra el sistema SQ_D , cuyas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + z, \\ \dot{z} &= xz + 3y^2.\end{aligned}\tag{1}$$

En la Fig.2 se muestra el sistema SQ_I , sus ecuaciones son

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -0.2y, \\ \dot{y} &= x + z, \\ \dot{z} &= x + y^2 - z.\end{aligned}\tag{2}$$

En la Fig.3 se muestra el sistema SQ_J , con ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2z, \\ \dot{y} &= -2y + z, \\ \dot{z} &= -x + y + y^2.\end{aligned}\tag{3}$$

Por último, en la Fig.4 se muestra el sistema SQ_K , cuyas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= xy - z, \\
 \dot{y} &= x - y, \\
 \dot{z} &= x + 0.3z.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

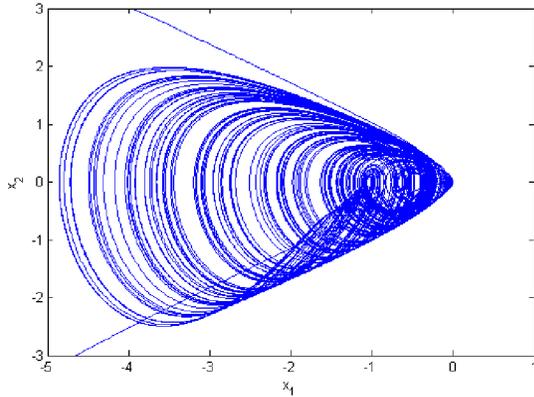


Figura 1. Sistema SQ_D

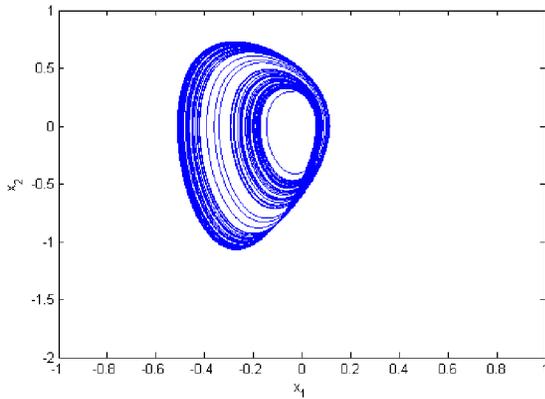


Figura 2. Sistema SQ_I

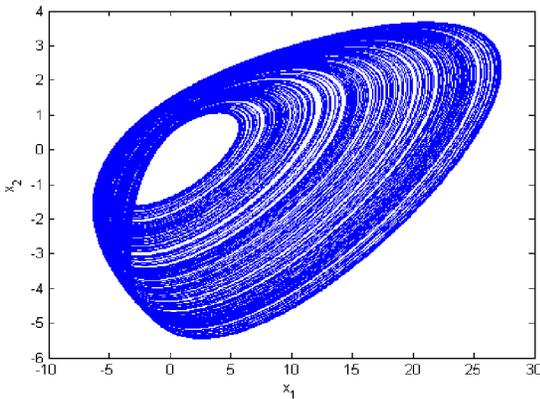


Figura 3. Sistema SQ_J

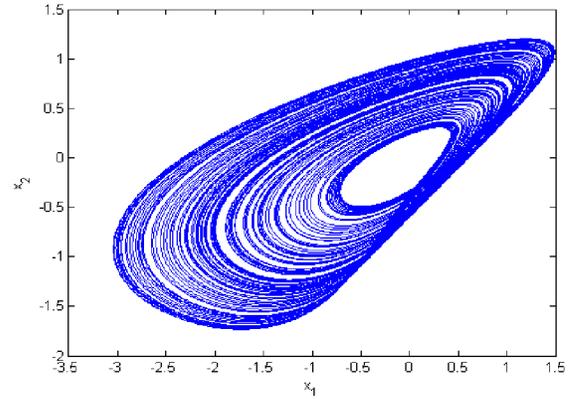


Figura 4. Sistema SQ_K

Para hacer un mejor análisis de los sistemas estudiados se realizó una transformación de coordenadas de los mismos para que queden de la forma canónica:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2, \\
 \dot{z}_2 &= z_3, \\
 \dot{z}_3 &= f(z) + g(z)u.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Una vez realizada la transformación de los sistemas que cumplen con las características deseadas, se eligió al sistema SQ_I transformado (6) debido a que solamente presenta un término no lineal, en la Fig. 5 se muestra el diagrama de bifurcación obtenido con los valores nominales de θ_i , $i=2, 3, 4$, (i.e. $\theta_2=0.2$, $\theta_3=1$, $\theta_4=5$) al variar el coeficiente θ_1 de x_1 , donde se puede apreciar que efectivamente se sigue la ruta al caos por duplicación de periodo.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= -\theta_1 x_1 - \theta_2 x_2 - \theta_3 x_3 - \theta_4 x_2^2.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

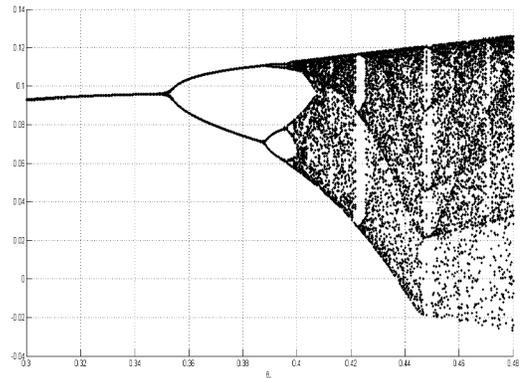


Figura 5. Diagrama de Feigenbaum del sistema SQ_I

Un aspecto importante de indicar es que la ruta al caos que sigue el sistema SQ_I no es robusta, en el sentido de que una variación mayor al 1% en los parámetros θ_i , $i=2, 3, 4$ de los elementos en la tercera ecuación de (6) da como resultado la desaparición de la ruta deseada, para compensar esto se procedió a robustecer el sistema utilizando estrategias de control óptimo y de control no lineal.

III. DISEÑO DEL CONTROL

A. Sistema SQ_I robustecido

El primer controlador desarrollado para robustecer el sistema fue con control óptimo. Se tiene el sistema con incertidumbre

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -(\theta_1 + \Delta_1)z_1 - (\theta_2 + \Delta_2)z_2 \\ &\quad - (\theta_3 + \Delta_3)z_3 - (\theta_4 + \Delta_4)z_2^2 + u,\end{aligned}\quad (7)$$

donde Δ_i y θ_i , $i=1, 2, 3, 4$, representa la incertidumbre y los valores nominales del parámetro i -ésimo, respectivamente. Para el diseño de la ley de control se asume que $\Delta_i = 0$ y se define el error como $e_i = x_i - z_i$, con lo que la dinámica del error está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \\ \dot{e}_3 &= -0.4e_1 - 0.2e_2 - e_3 - 10x_2e_2 + 5e_2^2 - u.\end{aligned}\quad (8)$$

Tomando en cuenta únicamente la parte lineal obtenemos las matrices A y B del error

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & -0.2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\quad (9)$$

Se propone la funcional de costo

$$J = \int_0^{\infty} (\lambda e^T e + u^2) dt, \quad (10)$$

con $Q = I$ y $R = 1$, y se calcula la matriz de ganancias utilizando las ecuaciones de Riccati. La ley de control queda de la forma

$$u = -R^{-1}B^T K e. \quad (11)$$

En la Fig. 6 se puede apreciar el efecto del controlador, ya que, a pesar de que se tiene una incertidumbre paramétrica del 100%, la ruta al caos por duplicación de periodo se mantiene.

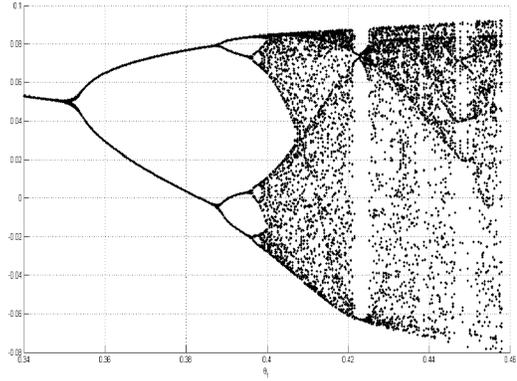


Figura 6. Diagrama de Feigenbaum del sistema SQ_I con 100% de incertidumbre paramétrica utilizando control óptimo

A continuación se procedió a utilizar un control no lineal, con el objetivo de mejorar aún más la robustez de la presencia de la ruta al caos deseada ante incertidumbres en los parámetros.

Se tiene el modelo de referencia

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= f_m(x_m) + g_m(x_m)u_m, \\ y_m &= h_m(x_m),\end{aligned}\quad (12)$$

y al modelo de la planta

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= f_p(x_p) + g_p(x_p)u_p, \\ y_p &= h_p(x_p),\end{aligned}\quad (13)$$

con grado relativo r_m y r_p , respectivamente. Se define el error como $e = y_p - y_m$, por lo que la dinámica del error está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{y}_p - \dot{y}_m \\ &= \frac{\partial h_p}{\partial x_p} (f_p + g_p u_p) - \frac{\partial h_m}{\partial x_m} (f_m + g_m u_m) \\ &= L_{f_p} h_p + L_{g_p} h_p u_p - (L_{f_m} h_m + L_{g_m} h_m u_m),\end{aligned}\quad (14)$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= e_2, \\
\dot{e}_2 &= e_3, \\
&\vdots \\
\dot{e}_{r_p-1} &= e_{r_p}, \\
\dot{e}_{r_p} &= L_{f_p}^{r_p} h_p - L_{f_m}^{r_p} h_m \\
&\quad + L_{g_p} L_{f_p}^{r_p-1} h_p u_p - L_{g_m} L_{f_m}^{r_p-1} h_m u_m \\
&= -\alpha_1 e_1 - \dots - \alpha_{r_p} e_{r_p},
\end{aligned} \tag{15}$$

de donde se despeja la ley de control

$$u_p = \frac{-\alpha e - L_{f_p}^{r_p} h_p + L_{f_m}^{r_p} h_m + L_{g_m} L_{f_m}^{r_p-1} h_m u_m}{L_{g_p} L_{f_p}^{r_p-1} h_p}, \tag{16}$$

que, al sustituir los valores de la planta y el modelo, queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
u_p &= -\alpha e + (0.4 + \Delta_1)x_{1p} + (0.2 + \Delta_2)x_{2p} \\
&\quad + (1 + \Delta_3)x_{3p} + (5 + \Delta_4)x_{2p}^2 \\
&\quad - 0.4x_{1m} - 0.2x_{2m} - x_{3m} - 5x_{2m}^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Se utilizaron los mismos valores de la matriz de ganancias obtenidas para el control óptimo. En la Fig. 7 el diagrama de Feigenbaum obtenido con una incertidumbre paramétrica del 100% y se puede apreciar como, efectivamente, se mantiene la ruta al caos por duplicación de periodo.

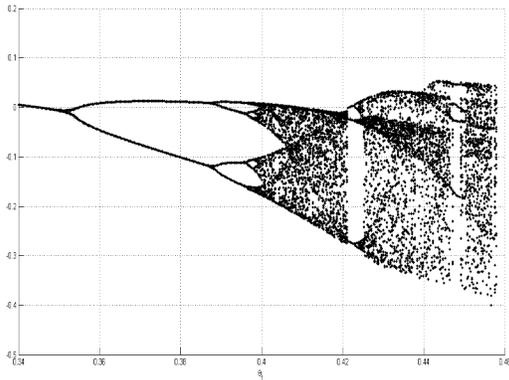


Figura 7. Diagrama de Feigenbaum del sistema SQ_I con 100% de incertidumbre paramétrica utilizando control no lineal

B. Péndulo simple con motor

Para probar que el controlador no lineal puede imponer

la ruta al caos deseada en otros sistemas se eligió como planta de prueba el modelo de un péndulo simple con fricción, al cual se le agrega un motor, en (18) se muestran las ecuaciones de éste modelo.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -a \sin(x_1) - bx_2 + kx_3, \\
\dot{x}_3 &= -cx_3 + du,
\end{aligned} \tag{18}$$

Para ser congruente con los cálculos hechos para el ejemplo anterior, se transformó el modelo del péndulo a la forma canónica, la cual se muestra en:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
\dot{x}_3 &= -ac \sin(x_1) - bcx_2 - (b+c)x_3 \\
&\quad - ax_2 \cos(x_1) + kdu.
\end{aligned} \tag{19}$$

Para el cálculo de la ley de control se sigue el mismo procedimiento utilizado para robustecer al sistema SQ_I con el control no lineal, aprovechando que ambos sistemas tienen la estructura de la forma canónica, por lo que se llega a la misma ley de control, solo que al sustituir los valores de la planta quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
u_p &= -\alpha e + ac \sin(x_{1p}) + bcx_{2p} \\
&\quad + (b+c)x_{3p} + ax_{2p} \cos(x_{1p}) \\
&\quad - 0.4x_{1m} - 0.2x_{2m} - x_{3m} - 5x_{2m}^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

El diagrama de Feigenbaum obtenido para el péndulo con motor controlado se muestra en la Fig. 8 y se puede apreciar que efectivamente presenta el escenario de ruta al caos deseado.

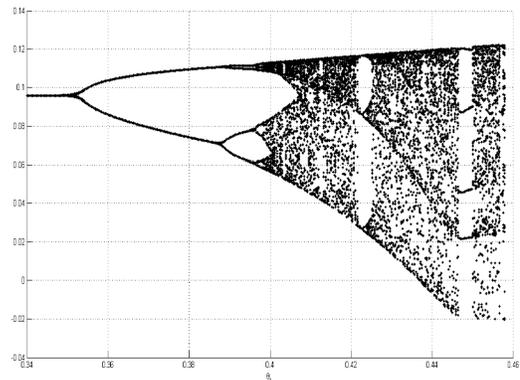


Figura 8. Diagrama de Feigenbaum del sistema de péndulo con motor utilizando control no lineal

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el surgimiento de comportamiento caótico en una clase de sistemas de tercer orden, teniendo como objetivo principal que lo hiciera siguiendo una ruta al caos específica, en este caso ruta al caos por duplicación de periodo.

Se mostró que, en el sistema base estudiado (SQ), la ruta al caos por duplicación de periodo no es robusta en el sentido que desaparece con la presencia de incertidumbres paramétricas superiores al 1%, por lo que se aplicaron técnicas de control óptimo y de control no lineal con el fin de robustecer la presencia de la ruta al caos deseada.

La misma técnica de control no lineal se aplicó a un sistema de tercer orden (péndulo simple con fricción al cual se le agrega un motor), el cual no presentaba comportamiento caótico, y se logró inducir no solamente dicho comportamiento, sino que también se logró que surgiera siguiendo la ruta al caos deseada, probando así la efectividad de la técnica de control propuesta.

REFERENCIAS

- Alvarez, J. Inducing Periodic Oscillations and Chaos in Continuous Systems via Time-Delay Controllers. 2nd International Conference Control of Oscillations and Chaos, COC 2000, 217-220.
- Alvarez, J., Curiel, E., Verduzco, F. Complex dynamics in classical control systems; Systems & Control Letters 31 (1997) 277-285.
- Eckmann, J.-P., Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. Reviews of Modern Physics, Vol. 53, No. 4, Part 1, October 1981.
- Feigenbaum, M. J., 1978, J. Stat. Phys. 19, 25.
- Feigenbaum, M. J., 1979a, J. Stat. Phys. 21, 669.
- Guan, H, Zhao, Y, Sun, Q, Liu, Y, Zhang, T. Anticontrol of chaos for a class of stable smooth-air-gap PMSM systems via delayed feedback control. 2nd International Conference on Industrial and Information Systems, 121-124, 2010.
- Manneville, P., y Y.Pomeau, 1980, Physica D 1, 219.
- Newhouse, S., D. Ruelle, y F. Takens, 1978, Commun. Math. Phys. 64, 35.
- Pomeau, Y., y P. Manneville, 1980, Commun. Math Phys. 77, 189.
- Pyragas, K., 1992 Continuous control of chaos by self-controlling feedback. Phys. Lett. 170A, 421-428.
- Ren, H P, Han, C Z. Chaotifying Control of Permanent Magnet Synchronous Motor. IEEE 5th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC2006) pp. 1-5.
- Sprott, J. C.; Some simple chaotic flows; Phys. Rev. E 50, pp. R647-650, (1994).
- Sprott, J. C.; Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows, World Scientific Publishing Co., 2010.
- Starkov, K, Chen, G. Chaotification of polynomial continuous-time systems and rational normal forms. Chaos, Solutions and Fractals 22, 849-856, (2004).
- Tang, K S, Man, K F, Zhong G Q, and Chen, G. Generating Chaos via xbl. IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 48, No. 5, 636-641, May 2001.
- Wallace K. S. Tang, G. Q. Zhong. Chaotification of linear continuous-time systems using simple nonlinear feedback. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No. 10, 3099-3106, (2003).
- Zhong, G Q, Man, K F, and Chen, G. Generating Chaos via dynamical controller. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 11, No. 3, 865-869, (2001).