

Comparación de un algoritmo de control moderno y uno difuso en un péndulo invertido rotacional

J. Díaz-Salgado, D. S. Pichardo-Cruz

Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, Departamento de Ingeniería Mecatrónica
Ecatepec, Edo. de México, México
Teléfono: (55) 50-00-23-00

Resumen- En este trabajo se presenta la comparación de dos algoritmos de control para la regulación de un péndulo invertido rotacional. El primer algoritmo es un control por retroalimentación de estados diseñado utilizando la linealización por serie de Taylor de un modelo dinámico de cuarto orden del sistema. El segundo algoritmo es un controlador difuso que utiliza el error de posición y su derivada como variables difusas. Ambos algoritmos utilizan observadores de orden reducido para estimar las derivadas de las posiciones angulares y el error de posición respectivamente. Se comparan parámetros de desempeño, robustez ante una perturbación endógena y tiempo de ejecución requerido por ambos algoritmos, tanto en simulación como en un prototipo comercial ROTPEN Quanser® con pruebas experimentales. La comparación es un resultado preliminar que busca determinar cuál de los dos algoritmos ofrece la mejor relación desempeño/robustez/costo al ser implementado en un microcontrolador específico.

Palabras clave: Control Difuso, Observadores, Péndulo de Furuta.

I. INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido rotacional es un sistema no lineal subactuado, de dos grados de libertad y un sólo actuador que ha servido de plataforma experimental para una enorme cantidad de algoritmos de control, estimación y observación en forma analítica, simulada y experimental. Por lo regular existen dos retos de control: (i) levantar el péndulo balanceándolo a partir de su punto de equilibrio estable para luego estabilizarlo en el punto de equilibrio inestable y (ii) equilibrar al péndulo en su punto de equilibrio inestable aun en la presencia de perturbaciones. Para ambos retos de control se han utilizado técnicas de control clásico, moderno e inteligente. (J. Yi, N., 2000; Jyoti Krishen, et al., 2006; S. Yurkovich, et al.1996; Yamakita, et al 1992).

Mientras que las técnicas de control clásico y moderno requieren de un modelo matemático del sistema para el diseño del controlador, el diseño de un controlador difuso,

en cambio, sólo requiere de la transcripción de la experiencia humana sobre el comportamiento dinámico del sistema a un conjunto de reglas de inferencia, razón por la que este enfoque se ha utilizado para controlar procesos y sistemas que son difíciles de modelar (Uzunovic, et. al., 2011). Como es bien sabido, ambos enfoques tienen sus ventajas y desventajas. En muchos sistemas dinámicos, donde se cuenta con un buen modelo matemático se han mostrado ejemplos de controladores que pueden ofrecer características de robustez y desempeño similares, utilizando uno u otro enfoque (Precup, et al., 2006).

Por otro lado, para la implementación en tiempo real de algoritmos de control avanzado comúnmente se han utilizado dispositivos programables como los microprocesadores y microcontroladores, los FPGA's (Field Programmable Gate Array) y los DSP's (Digital Signal Processor). Cuando se trata de minimizar costos los primeros son los más adecuados y permiten escoger entre un par de opciones: (i) un microprocesador de propósito general con hardware y software especializado (PC), con mayor costo y sobrados recursos computacionales y (ii) un microcontrolador embebido de bajo costo diseñado "a la medida" para cubrir las necesidades específicas del sistema a controlar en cuanto a: (i) capacidad de procesamiento, (ii) tasa de muestreo y (iii) con la mínima cantidad de interfaces con el ser humano (Ibrahim, 2006). Mientras que la primera opción es muy socorrida en el ámbito académico, por la facilidad que ofrece para la implementación de los algoritmos diseñados, la segunda es una forma que ha sido explotada mayormente en el ámbito industrial en la búsqueda de crear dispositivos comercializables, con portabilidad, bajo costo y bajo consumo de energía y recursos.

Teniendo esto en cuenta, en el presente trabajo se hace la comparación de dos algoritmos de control para la estabilización de un péndulo invertido rotacional utilizando un controlador moderno y otro difuso. La comparación es un resultado preliminar que busca determinar cuál de los dos algoritmos ofrece la mejor relación desempeño/robustez/costo al ser implementado en un sistema embebido

El trabajo está organizado del siguiente modo: primero se

presenta el modelo matemático del sistema, a continuación el diseño de ambos esquemas de control, en la siguiente sección se presentan los resultados obtenidos en las pruebas simuladas y experimentales donde se analiza el desempeño y robustez del sistema y el recurso computacional utilizado por cada algoritmo. Finalmente se presentan las conclusiones

II. MODELO MATEMÁTICO

En esta sección se presenta el modelo matemático del péndulo rotacional invertido. Este modelo será utilizado para las pruebas en simulación y para el diseño del controlador por retroalimentación de estados.

El diagrama de cuerpo libre (Fig. 1) muestra las referencias de las ecuaciones del sistema (Fantoni, 2003): θ_0 (θ_1) es el ángulo que forma el brazo (el péndulo) con respecto al plano horizontal x - y (plano vertical). Los parámetros que corresponden al péndulo son: m masa, I_p e I_b momento de inercia del péndulo y brazo respectivamente y, l longitud a partir del centroide.

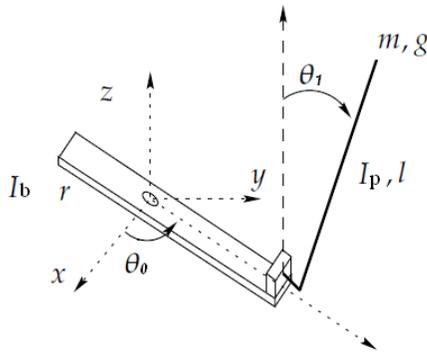


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre

Las componentes de posición del extremo del péndulo están dadas por:

$$\begin{aligned} x_p &= r \sin \theta_0 - l \sin \theta_1 \cos \theta_0 \\ y_p &= r \cos \theta_0 - l \sin \theta_1 \sin \theta_0 \\ z_p &= l \cos \theta_1 \end{aligned} \quad \dots(1)$$

Las componentes de velocidad se obtienen a partir de (1) como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= r \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 + l \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \sin \theta_0 - l \dot{\theta}_0 \cos \theta_1 \cos \theta_0 \\ \dot{y}_p &= -r \dot{\theta}_0 \sin \theta_0 + l \dot{\theta}_0 \sin \theta_1 \cos \theta_0 - l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_0 \\ \dot{z}_p &= l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad \dots(2)$$

por lo que la velocidad del péndulo $v_p^2 = \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2$ es:

$$v_p^2 = r^2 \dot{\theta}_0^2 + l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_0^2 \sin^2 \theta_1 - 2rl \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad \dots(3)$$

Las energías cinética y potencial del sistema son respectivamente:

$$T = \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{1}{2} I_p (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1)^2 \quad \dots(4)$$

$$V = mgl(\cos \theta_1 - 1) \quad \dots(5)$$

Utilizando las ecuaciones (3-5), el lagrangiano $\mathcal{L} = T - V$ queda definido como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \\ & \frac{1}{2} k_1 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} k_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\dot{\theta}_0 \sin \theta_1)^2 - k_3 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - \\ & k_4 (\cos \theta_1 - 1) \end{aligned} \quad \dots(6)$$

Donde las constantes son: $k_1 = I_b + mr^2$, $k_2 = I_p + ml^2$, $k_3 = mrl$, $k_4 = mgl$.

En el modelo se considera la función de disipación de energía para incluir los efectos de fricción tanto en el brazo como en el péndulo:

$$D = \frac{1}{2} b_p \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} b_b \dot{\theta}_0^2 \quad \dots(7)$$

El modelo de fricción considerado es el de fricción viscosa (Cazzolato, 2008). Los coeficientes de fricción viscosa de cada elemento se denotan por b_b y b_p respectivamente.

Utilizando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \tau_i$$

donde: ($q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_0$) son las coordenadas generalizadas, $\tau_1 = 0$ y $\tau_2 = \tau_m$ son las fuerzas generalizadas, τ_m es el par entregado por el motor, las ecuaciones de movimiento del sistema están dadas por:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 &= \\ & \left[\frac{1}{k_1 + k_2 \sin^2 \theta_1 - \frac{k_3^2}{k_2} \cos^2 \theta_1} \right] \left[\tau_m - \sin \theta_1 \cos \theta_1 \left(2k_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. k_3 \dot{\theta}_0^2 \cos \theta_1 - \frac{k_3 k_4}{k_2} \right) - k_3 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - b_b \dot{\theta}_0 - \right. \\ & \left. \frac{k_3 b_p}{k_2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \right] = f_{\theta_0} \end{aligned} \quad \dots(10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \\ & \left[\frac{1}{k_1 + k_2 \sin^2 \theta_1 - \frac{k_3^2}{k_2} \cos^2 \theta_1} \right] \left[\frac{k_3}{k_2} \cos \theta_1 \left[\tau_m - \right. \right. \\ & \left. \left. \sin \theta_1 \cos \theta_1 \left(2k_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_0 - k_3 \dot{\theta}_0^2 \cos \theta_1 - \frac{k_3 k_4}{k_2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. k_3 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - b_b \dot{\theta}_0 - \frac{k_3 b_p}{k_2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \right] \right] + \dot{\theta}_0^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \\ & \frac{k_4}{k_2} \sin \theta_1 - \frac{b_p}{k_2} \dot{\theta}_1 = f_{\theta_1} \end{aligned} \quad \dots(11)$$

A partir de este par de ecuaciones diferenciales (10-11) se obtiene una representación no lineal en variables de estado

del sistema.

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (12a)$$

$$y(t) = g(x) \quad (12b)$$

Donde: $x = [\theta_0 \ \dot{\theta}_0 \ \theta_1 \ \dot{\theta}_1]^T$ es el vector de estado, $y = \theta_1 = g(x)$ es la salida medida, $u = \tau_m$ es la entrada de control, y

$$f(x, u) = [\dot{\theta}_0 \ f_{\theta_0} \ \dot{\theta}_1 \ f_{\theta_1}] \quad \dots(13)$$

es el vector de funciones.

2.1. Linealización del modelo

La representación no lineal en variables de estado (12) se linealiza alrededor del punto de equilibrio inestable $(*, 0, 0, 0)$, para obtener una aproximación lineal del sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \dots(14a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \dots(14b)$$

Sustituyendo los parámetros del equipo SRV02, Rot-Pen (Figura 2).

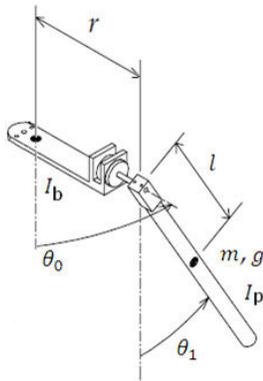


Figura 2: Sistema Rot-Pen

tomados de la hoja técnica del fabricante (Tabla 1),

TABLA I. PARÁMETROS

Parámetro	Valor
I_b	$0.0043 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
r	0.14 m
m	0.1068 kg
I_p	$0.0015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
l	0.158 m
g	$9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
b_p	$0.035 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$
b_b	$0.0005 \frac{\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$

Se obtiene una representación lineal en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17.815 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4.251 & 52.533 & 0.042 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -30.502 \\ 0 \\ 121.458 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Este modelo nos muestra que el sistema es localmente controlable y observable, ya que las respectivas matrices de controlabilidad y observabilidad tienen rango completo. Por otro lado los eigenvalores del sistema son: $(0, 6.400, 1.504, -7.863)$ lo que nos muestra que el sistema es localmente inestable, ya que tiene un polo con parte real cero, dos con parte real negativa y otro con parte real positiva.

III. DISEÑO DEL CONTROLADOR POR RETROALIMENTACIÓN DE ESTADOS

En esta sección se diseña el controlador por retroalimentación de estados (Fig. 3). Por lo pronto se asume que todos los estados son medidos (en la sección V se muestra como utilizando observadores de estado se pueden recuperar los estados no medidos).

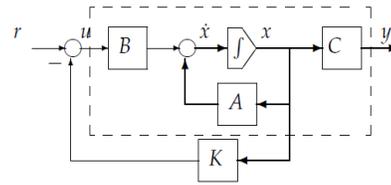


Fig. 3. Diagrama de bloques de la retroalimentación de estados

El diseño consiste en proponer la siguiente señal de control:

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \quad \dots(16)$$

para obtener la ecuación en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad \dots(17)$$

y proponer arbitrariamente los valores propios del sistema. Se propone un polinomio deseado de cuarto orden:

$$\det(sI - (A - Bk)) = s^4 + 86 + 2070s^2 + 10225 + 41000 \quad \dots(21)$$

El polinomio deseado coloca un par de polos complejos conjugados con frecuencia natural $\omega_n = 5$ y factor de amortiguamiento $\xi = 0.5$, y un par de polos reales no dominantes posicionados en -40 y -41 . Estas posiciones deseadas buscan que el sistema responda aproximadamente cinco veces más rápido ($t_s = 2.5$ s) que la respuesta a lazo abierto en el punto de equilibrio estable ($t_s = 12.3$ s) y con un sobrepaso máximo de 16% (Pichardo, 2012). A partir del polinomio deseado se obtiene el vector de ganancias:

$$K = [10.8863 \quad 2.0410 \quad 18.8843 \quad 1.2210]$$

IV. CONTROLADOR DIFUSO

El controlador difuso (Fig. 4) utilizado para la comparación es el presentado en el trabajo de (Liu, et. al 2009) donde se estabiliza un sistema carro péndulo en su punto de equilibrio inestable tanto en simulación como experimentalmente. El diseño original se modificó en los universos de discurso a $[-5,5]$, $[-5,5]$ y $[-12,12]$ para las señales de error, derivada de error y voltaje del motor respectivamente. Esto se hizo por que en nuestro caso las mediciones de las entradas se hacen en grados y el motor de CD tiene un voltaje máximo de 12V. Este controlador considera el uso de funciones de membresía tipo triangular y defuzificación tipo centroide y utiliza tres ganancias: de las variables de entrada (error y derivada del error de posición) y de la variable de salida (voltaje del motor), (8.1, 0.8, 1.3) respectivamente.

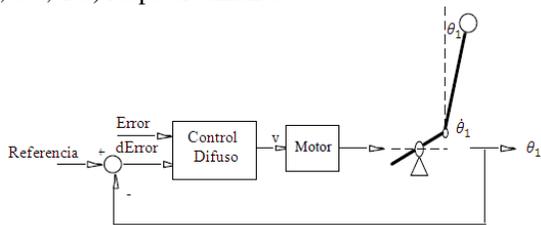


Fig. 4. Diagrama de bloques del control difuso

Además, el sistema de inferencia difusa utilizado es tipo Mamdani (Fig. 5 y Tabla II) y utiliza cuarenta y nueve reglas de inferencia difusa (Tabla II) sus características se resumen en la Tabla III.

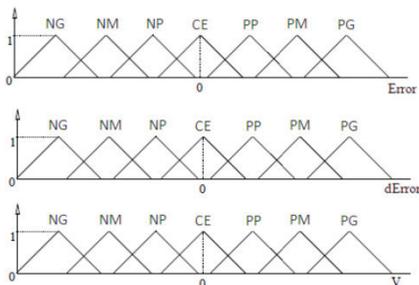


Fig. 5. Funciones de membresía del control difuso

TABLA II. Reglas del control difuso

Error \ dError	NG	NM	NP	CE	PP	PM	PG
NG	NG	NG	NG	NG	NG	NM	CE
NM	NG	NG	NG	NG	NM	CE	PM
NP	NG	NG	NG	NM	CE	PM	PG
CE	NG	NG	NM	CE	PM	PG	PG
PP	NG	NM	CE	PM	PG	PG	PG
PM	NM	CE	PM	PG	PG	PG	PG
PG	CE	PM	PG	PG	PG	PG	PG

TABLA III. CARACTERÍSTICAS

Tipo de sistema de inferencia difuso	Mamdani
Método and	Min
Método or	Max
Método de fuzificación	Centroide
Implicación	Min
Agregación	Max
Entradas	2
Salidas	1
Reglas	49

V. IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL

Para la implementación experimental se utiliza un prototipo comercial ROTPEN Quanser® y el software MATLAB®. Los algoritmos fueron programados en Simulink y para el algoritmo difuso se utiliza el editor FIS (Fuzzy Inference System) del FUZZY Toolbox.

La implementación experimental del controlador por retroalimentación de estados requiere de las señales de velocidad del brazo y del péndulo ($\dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1$), mientras que el controlador difuso requiere de la derivada del error de posición. Ya que en particular nuestro sistema no cuenta con sensores para medir las velocidades, se utiliza un observador de orden reducido (Stefani, 1994) (Figura 5), para la estimación de las velocidades del brazo, del péndulo y la derivada del error de posición. Este diseño permite obtener la derivada de una señal con mayor robustez que un observador de orden completo. El observador se implementó en los tres casos con la misma ganancia ($G=20$).

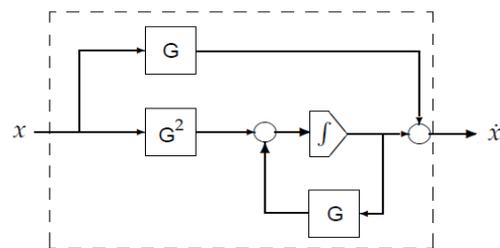


Fig. 5. Observador de orden reducido

VI. COMPARACIÓN DE LOS CONTROLADORES

En esta sección se muestran resultados en simulación y experimentales donde se comparan tres aspectos de los algoritmos: (i) desempeño, (ii) robustez y (iii) tiempo de ejecución.

6.1. Desempeño

Las pruebas de desempeño se realizan en forma simulada con condiciones ideales y consisten en regular al péndulo en su punto de equilibrio inestable con una desviación inicial de 5°.

Los resultados, resumidos en la Tabla III muestran que el control difuso supera en simulación en desempeño al control por retroalimentación de estados en regulación, (Figura 6), aunque con la clara desventaja de requerir una mayor amplitud en la señal de control (Figura 7).

TABLA III
Desempeño de los controladores

	%OS	t_s [s]	$u_{m\acute{a}x}$ [V]
Regulación			
Retro. edos.	55	1.8	7
Difuso	20	0.5	23

6.2. Robustez

La prueba de robustez se realiza experimentalmente y consiste en introducir una perturbación endógena golpeando al péndulo una vez equilibrado. Para obtener un valor cuantitativo de robustez ante esta perturbación se obtiene la desviación máxima que cada algoritmo puede soportar sin perder el equilibrio (Tabla IV), y el tiempo que tarda en llegar de nuevo al estado estacionario.

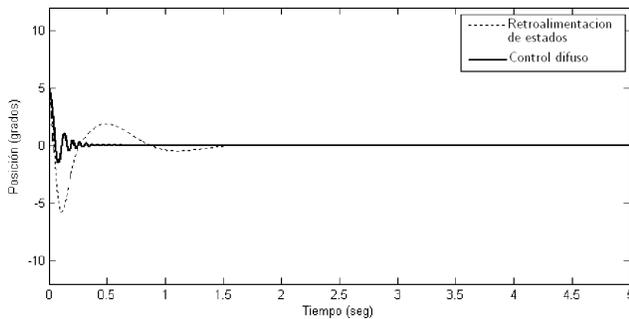


Fig. 6. Prueba de desempeño

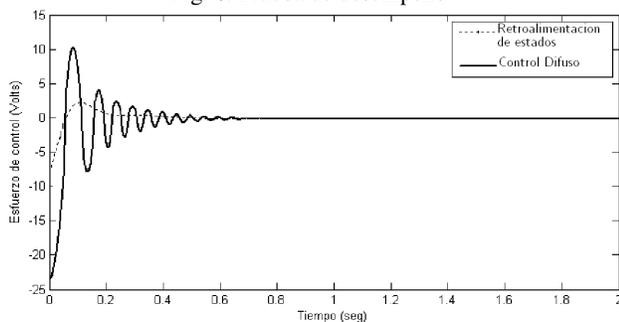


Fig. 7. Prueba de desempeño señal de control

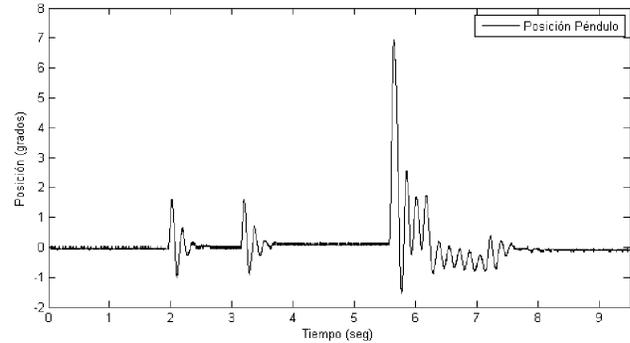


Fig. 8. Prueba de robustez control difuso

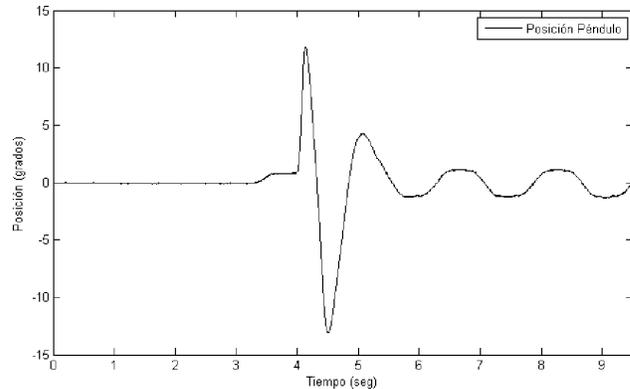


Fig. 9. Prueba de robustez control por retroalimentación de estados

TABLA IV
Robustez ante una perturbación endógena

	t_s [s]	$\theta_{m\acute{a}x}$ [°]
Retro. edos.	2	12
Difuso	2	6.8

Es claro que el control por retroalimentación de estados propuesto (Fig. 9) muestra mayor robustez ante esta perturbación pues soporta amplitudes de casi el doble que el controlador difuso utilizado (Fig. 8). Cabe señalar que el tiempo de asentamiento del control por retroalimentación de estados ($t_s \approx 2$ s) se aproxima al forzado por par de polos dominantes en la dinámica deseada a lazo cerrado ($t_s = 2.5$ s).

6.3. Tiempo de ejecución

El último parámetro de comparación es el tiempo de ejecución de los algoritmos (Fig 10). El tiempo incluye en ambos casos el algoritmo de observación y fue tomado con los algoritmos ejecutándose en MATLAB Simulink en una PC. Como se puede apreciar el tiempo consumido por el algoritmo difuso es de 333.7 μ s, mientras que el algoritmo por retroalimentación de estados consume 10.5 μ s, es decir es 33 veces menor.

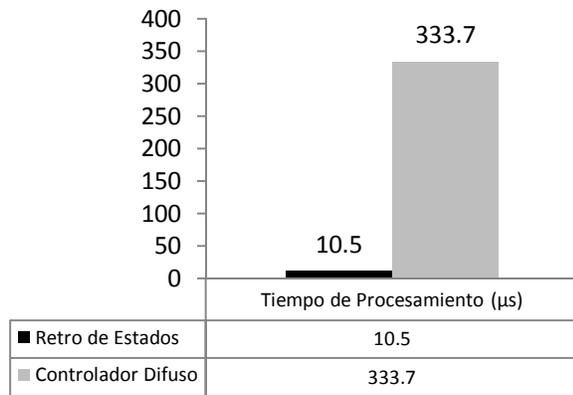


Fig. 10. Tiempo de ejecución de los algoritmos

6.3. Resultados

Bajo condiciones ideales en simulación el controlador difuso muestra mejor desempeño que su contraparte, mientras que este último presenta una mayor robustez ante una perturbación en pruebas experimentales. Esto se puede deber a un exceso en las ganancias del controlador difuso lo que implica una mayor afectación debida al ruido de medición.

Por otro lado, el tiempo de ejecución, en una PC muestra claramente que la implementación en hardware del controlador difuso requiere de un mayor tiempo de procesamiento, al menos con las librerías y algoritmos propios de MATLAB.

VII. CONCLUSIONES

Se presenta la comparación de un algoritmo de control moderno y uno difuso para la regulación de un péndulo invertido rotacional. Ambos algoritmos utilizan observadores de orden reducido para estimar las derivadas de las posiciones angulares y el error de posición respectivamente. Se comparan parámetros de desempeño, robustez ante una perturbación endógena y tiempo de ejecución requerido por ambos algoritmos cuando se ejecutan en una PC con el software y las librerías de MATLAB (R2008a). Los resultados muestran que para esta planta en particular y la estructura y parámetros de ambos controladores: (i) el control difuso supera en desempeño al controlador por retroalimentación de estado en simulación, (ii) el control difuso es superado en robustez y tiempo de ejecución por su contraparte en las pruebas experimentales. Aunque ambos algoritmos se pueden mejorar tanto estructuralmente como en la sintonización de sus parámetros, (por ejemplo, modificando la base de reglas o las funciones de pertenencia del control difuso) los resultados aquí mostrados consisten en el paso preliminar de la implementación de ambos algoritmos en un microcontrolador, para tratar de obtener una relación desempeño/robustez/costo entre ambos enfoques de control para esta planta y un dispositivo de hardware en

particular.

El siguiente paso de esta investigación es realizar la comparación implementado los algoritmos en (i) un microcontrolador genérico de muy bajo costo como el Texas Instruments® MSP430 y (ii) un microcontrolador con hardware especializado en lógica difusa, como el Freescale® 9S12. Una vez hecho esto se podrá realizar una comparación más completa que incluya parámetros como: tamaño de código, cantidad de RAM utilizada y potencia consumida por el dispositivo.

REFERENCIAS

- Yi J., Yubazaki N.. Stabilization Control of Inverted Pendulum System. Artificial Intelligence in Engineering, 14, P.p. 153-163, 2000.
- Krishen J., Becerra, V. M.. Efficient Control of a Rotary Inverted Pendulum Based on LQR Mapping. International Symposium on Intelligent Control, IEEE P.p 2701-2706. 2006.
- Yurkovich, S., and Widjaja, M., Control of a double-inverted pendulum. Control Eng. Practice, 4, P.p. 455-469, 1996.
- Yamakita, M. Furuta, VVS Adaptive Control based on Nonlinear Model for TITech pendulum. IEEE P.p.1488-1493. 1992.
- Uzunovic, T; Turkovic, I. Implementation of Microcontroller Based Fuzzy Controller, IS'2012 - 2012 6th IEEE International Conference Intelligent Systems, Proceedings, p 310-315, 2012, IS'2012 - 2012 6th IEEE International Conference Intelligent Systems, Proceedings
- Precup, R.E. and S.Pretil, S., "Stability and Sensitivity analysis of Fuzzy Control systems". Mechatronic Applications, Acta Polytechnica Hungarica, pp. 61-76., 2006
- Fantoni, I., and Lozano, R., Non -linear Control for Underactuated Mechanical Systems, Springer, 2003.
- Cazzolato, B. and Prime, Z. (2008). The dynamics of the furuta pendulum. Technical report, The University of Adelaide.
- Ibrahim, A. M., Introduction to applied fuzzy electronics, Prentice Hall, 2006.
- Akhtaruzzaman, Md. Shafie, A. A., "Modeling and Control of a Rotary Inverted Pendulum Using Varios Methods, comparative assessment and result analysis". International Conference on Mechatronics and Automation. IEEE, p.p 1342-1347, 2010.
- Pichardo, D.S. Diseño de un sistema de Control para la Estabilización de un Péndulo Invertido Rotacional, Tesis, Maestria, TESE, Mexico, 2012
- Liu, Y., Chen, Z., Xue, D., Xu, X., Real-Time Controlling of Inverted pendulum by Fuzzy Logic, Int. Conf. on Automation and Logistics, Shenyang, China, 2009.
- Stefani, R.T., Savant Jr. C.J., Shahian, B. and Hostetter, G.H. Design of Feedback Control Systems, third ed., Saunders College Publishing, Florida, 1994.
- Chen Wei Ji; Fang Lei; Lei Kam Kin "Fuzzy logic controller for an inverted pendulum system", Proc. IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems, Vol.1, pp. 185-191, 2001.