

Diseño de superficies deslizantes con base en criterio LQ Singular

I. Castillo-López
Facultad de Ingeniería-UNAM
Coyoacán DF 04510, México

Resumen—Uno de los métodos más populares para el diseño de superficies por modos deslizantes está basado en la solución del problema de estabilización óptima singular (SOSP, por sus siglas en inglés) con índice 1. Este permite el diseño de superficies deslizantes convencionales (de primer orden).

En el presente artículo se revisa la noción de singularidad del SOSP. Entonces, se muestra que la solución del SOSP de índice arbitrario puede ser considerada como el conjunto de deslizamiento: la superficie deslizante es diseñada como la solución del SOSP con el índice de singularidad correspondiente. Finalmente, un controlador por modos deslizantes del mismo orden es seleccionado para asegurar la convergencia en tiempo finito a la superficie diseñada.

Palabras clave: Modos Deslizantes, Diseño de Superficies, criterio LQ singular.

I. INTRODUCCIÓN

El *Control por Modos Deslizantes* (SMC, por sus siglas en inglés) es bien conocido por ser una herramienta muy eficiente para la compensación de perturbaciones o incertidumbres acopladas (V. Utkin, 1991), (C. Edwards and S. Spurgeon, 1998).

Los modos deslizantes convencionales (de primer orden) requieren el diseño de una superficie deslizante de grado relativo uno. Por otro lado, los *Controladores por Modos Deslizantes de Orden Superior* (HOSMC, por sus siglas en inglés), aseguran la estabilización en tiempo finito de los estados de cualquier sistema SISO controlable, incluso en presencia de perturbaciones o incertidumbres acopladas. Más aun, cuando el orden del HOSMC y el grado relativo del sistema coinciden ya no es necesario el diseño de una superficie (A. Levant, 2003), (Levant, A., 2005), (Laghrouche, S., Plestan, F., Glumineau, 2007), (Dinuzzo, F., Ferrara, A., 2009). En presencia de no idealidades (discretización, retardos, ruido, etc.), HOSMC proveen la máxima precisión asintótica posible (A. Levant, 2007), (A. Levant, 2010).

En ocasiones no existe una ventaja real en usar el máximo orden del HOSMC porque la precisión de la realización está restringida por la velocidad de los sensores y actuadores. Además, la complejidad computacional del HOSMC incrementa con el orden del algoritmo. Esto significa que es razonable tener la posibilidad diseñar el HOSMC de orden mayor a uno pero menor al orden del sistema, y por lo tanto la superficie deslizante del orden correspondiente.

Es conocido que el diseño de modos deslizantes convencionales consiste en dos pasos (V. Utkin, 1991), (C. Edwards and S. Spurgeon, 1998):

- Diseño de una superficie deslizante con grado relativo uno.
- Diseño de un controlador por modos deslizantes convencional asegurando convergencia en tiempo finito a la superficie diseñada.

Una forma posible de elegir el conjunto deslizante de dimensión $(n - 1)$ es el uso de un criterio de desempeño *Lineal Cuadrático* (LQ, por sus siglas en inglés). La superficie de deslizamiento es diseñada como la solución del problema óptimo LQ singular con una matriz de ponderación de los estados simétrica positiva definida Q y de “control sin costo” (V. Utkin, 1991), (C. Edwards and S. Spurgeon, 1998), (A. Luk’yanov and V. Utkin, 1982), (A. Poznyak, Y. Shtessel, and C. Jimenez, 2003), (A. Loukianov, M. Basin, and M. Hernandez-Gonzalez, 2011). Después, un controlador convencional puede ser diseñado para asegurar la convergencia en tiempo finito a la superficie óptima. De la teoría de control óptimo singular (H. J. Kelley, 1964), (J. Speyer and D. Jacobson, 1971), (R. Gabasov and N. Choksy, 2001) se sabe que cuando la matriz de ponderación de los estados es positiva semidefinida, la dimensión del conjunto óptimo estabilizante es menor que $(n - 1)$.

El propósito de este artículo es mostrar cómo el orden del modo deslizante puede ser elegido con base en el orden de la singularidad del criterio de desempeño dado. Después se utiliza el conjunto óptimo estable como la superficie deslizante, y posteriormente es posible el diseño de un controlador Cuasi-Continuo del orden correspondiente.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea el sistema perturbado lineal invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + f(t, x)), \quad (1)$$
$$\|x_0\| \leq L, \quad L \in \mathbb{R}^+,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la *matriz del sistema*, $B \in \mathbb{R}^n$ es la *matriz de control*, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el *vector de estado*, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada escalar de control, $f(t, x)$ es una perturbación acoplada con una cota conocida $|f(t, x)| < F \in \mathbb{R}^+$ que puede representar tanto perturbaciones externas como dinámicas acotadas no modeladas del sistema. Se supone el par (A, B) *controlable* y $\text{rango}(B) = 1$.

Los modos deslizantes son robustos con respecto a perturbaciones acopladas, sin embargo, para el diseño de la superficie deslizante, se considera el sistema nominal con

una función de costo de “control sin costo”, es decir, que es singular con respecto al control $u(t)$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2)$$

$$J(x(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x(t)^T Q x(t)) dt, \quad (3)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es *simétrica y positiva semidefinida*.

Para solucionar el SOSP, es necesario aplicar una transformación del sistema (2) a la forma *canónica de controlador* (sección III). El criterio de desempeño (2) también necesita ser transformado para mantener el sentido de ponderación de los estados del sistema original.

Después, en la sección IV se hace la definición de *orden de singularidad* del índice de desempeño del SOSP, y se elige el orden de la superficie de deslizamiento a diseñar.

En la sección V se hace el diseño de la superficie deslizante del orden correspondiente a la solución del SOSP y, en la sección VI, se realiza el diseño del HOSMC asegurando la convergencia en tiempo finito a la superficie de deslizamiento propuesta.

III. TRANSFORMACIÓN DEL SISTEMA Y DEL ÍNDICE DE DESEMPEÑO

III-A. Transformación a forma Canónica de Controlador

Dado que el par (A, B) se asume controlable, entonces existe una transformación no singular T , tal que el sistema

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (4)$$

está en la forma *Canónica de Controlador*. Donde $z = Tx$, $\bar{A} = TAT^{-1}$, $\bar{B} = TB$, y $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

La matriz \bar{A} tiene la forma de *Brunovsky*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ son los coeficientes del polinomio característico.

III-B. Transformación del Índice de Desempeño

La matriz de ponderación Q debe ser transformada para mantener el sentido de la ponderación al sistema (4)

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{Q}_{11} & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{21} & \tilde{Q}_{22} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$\tilde{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $\tilde{Q}_{22} \in \mathbb{R}$.

En modos deslizantes convencionales, el sistema (4) es particionado con las mismas dimensiones que \bar{Q} en (5), el vector de estado es dividido en dos conjuntos $z = [\bar{z}_1^T \ \bar{z}_2^T]^T$, donde $z_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ y $z_2 \in \mathbb{R}$. La variable \bar{z}_2

se toma como control virtual para estabilizar el subsistema \bar{z}_1 . Los bloques $\tilde{Q}_{11} \geq 0$ y $\tilde{Q}_{22} > 0$ son utilizados para ponderar los estados \bar{z}_1 y el control virtual \bar{z}_2 , respectivamente. Esto lleva a un problema regular de control óptimo de orden reducido usualmente resuelto mediante la *Ecuación Algebraica de Riccati* (ARE, por sus siglas en inglés). Entonces el control estabilizante $\bar{z}_2 = -K\bar{z}_1$ es diseñado, y la superficie deslizante se selecciona como $\sigma = \bar{z}_2 + K\bar{z}_1$ con *grado relativo* $r = 1$.

Los Modos Deslizantes convencionales no consideran el caso cuando $\tilde{Q}_{22} = 0$ y de aquí surge un nuevo problema debido a que la solución del SOSP no tiene grado relativo uno.

IV. ORDEN DE SINGULARIDAD DEL SOSP

IV-A. Caso de Orden Superior

Proposición 1: Si $\tilde{Q}_{22} = 0$ en (5), debido a las propiedades de simetría y positividad semidefinida de \bar{Q} , todos los elementos de \tilde{Q}_{12} y \tilde{Q}_{21} son cero.

Esto significa que en general la matriz \bar{Q} sólo puede tener la forma

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-k \text{ columnas } k\text{-columnas cero}}$

$\bar{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$ es una matriz *simétrica positiva semidefinida*, $\bar{Q}_{22} > 0$, $\bar{Q}_{22} \in \mathbb{R}$, y por consiguiente el índice de desempeño tiene la forma

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{11} \bar{z}_1(t) + 2\bar{z}_1^T(t) \bar{Q}_{12} \bar{z}_2(t) + \bar{z}_2^T(t) \bar{Q}_{22} \bar{z}_2(t)) dt \quad (7)$$

Definición 1: El Orden de Singularidad es el número $i = k + 1$, donde k es el número de columnas (o renglones) cero sobre \bar{Q} tales que $\bar{Q}_{22} > 0$.

Para eliminar los términos cruzados en (7), se introduce el cambio de variable:

$$\nu = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T \bar{z}_1 \quad (8)$$

Finalmente, el índice de desempeño es

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\bar{z}_1^T(t) \underbrace{(\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T)}_{=\hat{Q}} \bar{z}_1(t) + \nu^T(t) \underbrace{\bar{Q}_{22}}_{=\hat{R}} \nu(t)) dt \quad (9)$$

Nótese que después de la transformación T y el cambio de variable ν , el índice de desempeño (3) que era singular con respecto al control $u(t)$, se ha convertido en uno no singular con matrices de ponderación $\hat{Q} = \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12}^T$, y $\hat{R} = \bar{Q}_{22}$, y ν como el *control virtual*

V. DISEÑO DE SUPERFICIE DE ORDEN SUPERIOR

V-A. Partición del sistema

Después de la partición de \bar{Q} , es necesario hacer la misma partición al sistema (4). El vector de estado es particionado en tres subconjuntos $z = [\bar{z}_1^T \ \bar{z}_2^T \ \bar{z}_3^T]^T$ donde \bar{z}_1 es la dinámica de orden reducido a estabilizar, \bar{z}_2 un control virtual y \bar{z}_3 el resto de las variables de estado.

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 &= [z_1 \ \dots \ z_{n-i}]^T \\ \bar{z}_2 &= z_{n-i+1} \\ \bar{z}_3 &= [z_{n-i+2} \ \dots \ z_n]^T\end{aligned}\quad (10)$$

Con las particiones, se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\bar{z}_2, \quad (11)$$

donde $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$, y $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-i)}$. Nótese que \bar{Q}_{11} tiene la misma dimensión que \bar{A}_{11} .

Debido a la forma de Brunovsky de \bar{A} , las particiones \bar{A}_{11} y \bar{A}_{12} tienen la forma *Canónica de Controlador*

$$\bar{A}_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n-i \text{ columnas}}; \bar{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} n-i \text{ renglones}$$

Finalmente, después del cambio de variables (8), el subsistema (11) es

$$\dot{\bar{z}}_1 = (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\nu, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)} \\ \hat{B} &= \bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-i)}\end{aligned}, \quad (13)$$

V-B. Solución de la ecuación algebraica de Riccati

El sistema (2) y el índice de desempeño (3) han sido transformados de un problema de control óptimo singular a un sistema de orden reducido (12), optimizado con respecto a un índice de desempeño no singular (9), que usualmente es resuelto mediante (ARE).

$$P\hat{A} + \hat{A}^T P + \hat{Q} - P\hat{B}(\hat{R})^{-1}\hat{B}^T P = 0 \quad (14)$$

y P es la única solución positiva definida de la ecuación matricial de Riccati, si el par (\hat{A}, \hat{D}) es observable, con \hat{D} una matriz tal que $\hat{D}^T \hat{D} = \hat{Q}$ (Moore, B. and Anderson, BDO, 1971).

V-C. Control Virtual y Diseño de Superficie

Podemos construir un control óptimo virtual (bajo las condiciones de controlabilidad de (A, B) y la observabilidad de (\hat{A}, \hat{D}) (Moore, B. and Anderson, BDO, 1971) con la matriz P , solución de (ARE), y el cambio de variable (8),

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= -K\bar{z}_1 \\ &= -(\hat{R})^{-1}(\hat{B}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1, \\ &= -(\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1\end{aligned}\quad (15)$$

que provee estabilidad en lazo cerrado al subsistema (12), y entonces, la superficie de modos deslizantes de grado relativo $r > 1$ es

$$\sigma = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1 \quad (16)$$

Proposición 2: El Orden de Singularidad del índice de desempeño es igual al **grado relativo** de la superficie deslizante diseñada.

Prueba: Se obtiene de las ecuaciones (16), (10) y de la forma original de cadena de integradores de \bar{A} del sistema (4) que la k -ésima derivada temporal de la *superficie deslizante* es

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)} &= z_{(n-i+2)} + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(1)}, \\ \sigma^{(2)} &= z_{(n-i+3)} + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(2)}, \\ &\vdots \\ \sigma^{(k)} &= z_{(n-i+1+k)} + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(k)},\end{aligned}\quad (17)$$

donde $\bar{z}_1^{(k)} = [z_{k+1} \ z_{k+2} \ \dots \ z_{(n-i+k)}]^T$ y $z_{(n+1)} := \dot{z}_n = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n + u$.

Es posible observar en la expresión (17) que la señal de control sólo aparecerá hasta la i -ésima derivada temporal de la superficie óptima

$$\sigma^{(i)} = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n + u + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T)\bar{z}_1^{(i)} \quad (18)$$

Lema 1: Si $\bar{Q}_{22} > 0$, con un *Orden de Singularidad* i , el par (A, B) es controlable, y el par (\hat{A}, \hat{D}) es observable, donde $\hat{D}^T \hat{D} = \hat{Q}$, entonces el vector óptimo actuando como control virtual minimizante en (11) es (15), donde P , es la única solución positiva definida de la Ecuación Algebraica de Riccati (14).

Nota 1: La observabilidad del par (A, D) (con $D^T D = Q$) no garantiza la observabilidad de las particiones (\hat{A}, \hat{D}) , donde $\hat{D}^T \hat{D} = \hat{Q}$.

Esto puede ser mostrado fácilmente con el ejemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} x; y \quad (19)$$

$$\bar{Q} = D^T D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1]$$

En este caso la matriz de observabilidad es

$$rango(\mathbb{O}) = rango \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1\gamma_3 & \gamma_1 + \gamma_2\gamma_3 & \gamma_3^2 + \gamma_2 \end{bmatrix} = 3 \quad (20)$$

entonces, el sistema es observable.

El par de particiones $\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\bar{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ son claramente no observable. Entonces, la condición de observabilidad del Lema 1 está hecha sobre las particiones.

VI. DISEÑO DE CONTROL

La expresión (18) en general puede ser escrita como

$$\sigma^{(i)} = \underbrace{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_n z_n}_{-u_{eqn}} + u \quad (21)$$

donde u_{eqn} es el *control nominal equivalente*

$$u_{eqn} = -[\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_n z_n] \quad (22)$$

Aplicando la ley de control

$$u = u_{eqn} + v_i \quad (23)$$

donde v_i es una nueva entrada de control y expresando el sistema (4) en nuevas variables de estado $[\bar{z}_1^T, \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)}]^T$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K)\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\sigma \\ \sigma^{(i-1)} &= v_i + \bar{f}; \quad |\bar{f}(t, \bar{z}_1, \sigma)| \leq F, \text{ y } F \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \quad (24)$$

donde $K = (\bar{Q}_{22})^{-1}[A_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T]$.

El HOSMC es diseñado para restringir las trayectorias del sistema a la variedad (16), donde la dinámica es descrita por el modelo de orden reducido

$$\dot{\bar{z}}_1 = (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \underbrace{(\bar{Q}_{22})^{-1}[A_{12}^T P + \bar{Q}_{12}^T]}_K) \bar{z}_1 \quad (25)$$

La selección del HOSMC proviene del *orden de singularidad* del índice de desempeño (el *grado relativo* de la superficie deslizante). Es decir, para poder llevar las trayectorias del sistema a la variedad $\sigma = 0$, es necesario el uso de un HOSMC del mismo orden que el grado relativo de la superficie.

Nota 2: Para el i -ésimo orden de singularidad, es posible utilizar un controlador Cuasi-Continuo de i -ésimo orden (Levant, A., 2005) definido por

$$\begin{aligned} \varphi_{0,i} &= \sigma, \quad N_{0,i} = |\sigma|, \quad \Psi_{0,i} = \varphi_{0,i}/N_{0,i} = \text{sign}(\sigma) \\ \varphi_{j,i} &= \sigma^{(j)} + \phi_j N_{j-1,i}^{-1/(i-j+1)} \varphi_{j-1,i}, \\ N_{j,i} &= |\sigma^{(j)}| + \phi_j N_{j-1,i}^{-1/(i-j+1)} |\varphi_{j-1,i}|, \\ \Psi_{j,i} &= \varphi_{j,i}/N_{j,i} \\ v_i &= -\alpha_i \Psi_{i-1,i}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde $\phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \alpha_i$ son números positivos, y $j = 1, \dots, i-1$.

Por ejemplo, para los primeros tres ordenes,

$$\begin{aligned} v_1 &= -\alpha_1 \text{sign}(\sigma) \\ v_2 &= -\alpha_2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) \right) \\ v_3 &= -\alpha_3 \left[|\ddot{\sigma}| + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} |\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma)| \right]^{-1} \\ &\quad \left[\ddot{\sigma} + 2 \left(|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dot{\sigma} + |\sigma|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\sigma) \right) \right] \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (27)$$

EL uso de (26) garantiza que forzosamente las trayectorias del sistema converjan a la superficie deslizante óptima en tiempo finito, incluso en presencia de perturbaciones acopladas (Levant, A., 2005).

VII. EJEMPLO

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo de cuarto orden $\dot{x} = Ax + B(u + f)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.26 & 0.92 & 0.91 \\ 0.81 & -0.8 & 0.93 & -0.029 \\ -0.75 & -0.44 & -0.68 & 0.6 \\ 0.83 & 0.094 & 0.94 & -0.72 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -0.16 \\ 0.83 \\ 0.58 \\ 0.92 \end{bmatrix}$$

donde $f = \gamma_1 \xi(t) + \gamma_2 \sin(t) + \gamma_3 \cos(5t)$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 5$, $\gamma_3 = 4$, y $\xi(t)$ una variable aleatoria tal que $\xi(t) \in [-0.5, 0.5]$. Las condiciones iniciales son $x_0 = [2 \ -3.5 \ -3.5 \ 5]^T$

El índice de desempeño para el diseño de la superficie es

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x(t)^T Q x(t)] dt; \quad Q = \begin{bmatrix} 1.35 & -11.7 & 0.632 & 10.4 \\ -11.7 & 113.0 & -5.56 & -100.0 \\ 0.632 & -5.56 & 0.466 & 4.83 \\ 10.4 & -100.0 & 4.83 & 89.2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (28)$$

que es *singular* con respecto a $u(t)$.

Es posible observar que $\text{rango}(B) = 1$ y la matriz de controlabilidad es

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.16 & 1.486 & 0.6259 & 0.9301 \\ 0.83 & -0.2809 & 1.352 & -1.573 \\ 0.58 & -0.0876 & -1.034 & 0.3882 \\ 0.92 & -0.172 & 1.248 & -1.225 \end{bmatrix} \quad (29)$$

con $\text{rango}(C) = 3$, entonces, el par (A, B) es controlable.

VII-A. Transformación del sistema y del índice de desempeño

La transformación T no singular es construida a partir de la matriz de controlabilidad C :

$$q = \text{el último renglón de } C^{-1}$$

$$T = \begin{bmatrix} q^T & (qA)^T & (qA^2)^T & \dots & (qA^{n-1})^T \end{bmatrix}^T$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.3841 & -4.571 & -0.7438 & 4.526 \\ 0.3699 & 4.309 & 0.1558 & -3.922 \\ 0.3518 & -3.788 & 0.5557 & 3.129 \\ -0.667 & 3.172 & -0.6365 & -1.489 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

Las transformaciones del sistema y del índice de desempeño están dadas por

$$z = Tx,$$

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ -0.244 & 0.48 & 0.204 & -1.57 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T QT^{-1} = \begin{bmatrix} 4.5 & 5.2 & 6.0 & 0 \\ 5.2 & 6.2 & 7.0 & 0 \\ 6.0 & 7.0 & 9.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

VII-B. Orden de Singularidad del SOSP

Quitando las columnas (y renglones) $k = 1$, las particiones se definen como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4.5 & 5.2 & 6.0 \\ 5.2 & 6.2 & 7.0 \\ \hline 6.0 & 7.0 & 9.0 \end{array} \right] \Rightarrow \underbrace{\bar{Q}_{22}}_{\hat{R}} = 9.0; \bar{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 4.5 & 5.2 \\ 5.2 & 6.2 \end{bmatrix}$$

El Orden de Singularidad es $i = k + 1 = 2$ y $\hat{Q} = \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}^T (\bar{Q}_{22})^{-1} \bar{Q}_{12} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.533 \\ 0.533 & 0.756 \end{bmatrix}$

El sistema (31) debe ser particionado con las mismas dimensiones:

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{A}_{22} = 0; \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ 0.667 & 0.778 \end{bmatrix}; \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$
 Los subconjuntos de variables de estado son $\bar{z}_1 = [z_1 \ z_2]^T$, $\bar{z}_2 = z_3$ y $\bar{z}_3 = z_4$.

VII-C. Diseño de superficie

La solución a la Ecuación Algebraica de Riccati es

$$P = \begin{bmatrix} 6.5973 & 12.364 \\ 12.364 & 23.684 \end{bmatrix} \quad (32)$$

y entonces la superficie es

$$\sigma = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1} (\bar{A}_{12}^T P + \bar{Q}_{12}) \bar{z}_1 = z_3 + [2.0404 \ 3.4093] [z_1 \ z_2]^T \quad (33)$$

Después de la segunda derivada temporal

$$\ddot{\sigma} = \underbrace{-0.2439z_1 + 0.48z_2 + 2.245z_3 + 1.839z_4}_{-u_{eqn}} + u \quad (34)$$

VII-D. Diseño de Control

Finalmente, la ley de control tiene la forma (23) con el controlador Cuasi-Continuo (26) de orden $i = 2$

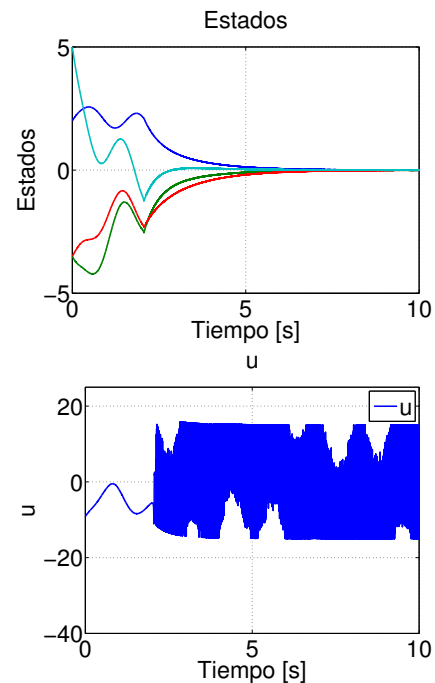
$$u_{eqn} = 0.2439z_1 - 0.48z_2 - 2.245z_3 - 1.839z_4$$

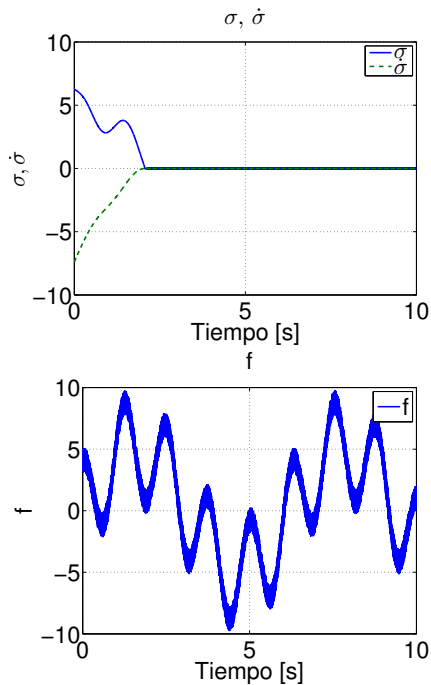
$$v_2 = -\alpha_2 (|\dot{\sigma}| + |\sigma|^{1/2})^{-1} (\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma))$$

$$u = u_{eqn} + v_2 \quad (35)$$

donde $\alpha_2 = 15 \Rightarrow |\alpha_2| \geq \|x_0\| + \|\bar{f}\|$

VII-E. Simulación





Es posible observar que las perturbaciones pueden afectar el transitorio (*reaching phase*) del sistema hacia la superficie deslizante. Sin embargo, cuando las trayectorias del sistema han llegado a la superficie $\sigma = 0$ en tiempo finito (en 2.1 segundos aproximadamente), el sistema se comporta de manera óptima con respecto a J , con insensibilidad (de forma nominal) a las perturbaciones acopladas f .

VIII. CONCLUSIONES

En éste artículo se propuso el diseño de superficies de orden superior basado en la solución del SOSP. El orden de la singularidad del SOSP está conectado directamente con el orden del modo deslizante. La solución del SOSP es considerada como la superficie deslizante del orden correspondiente.

Se propuso un procedimiento de tres pasos para el diseño de superficies por modos deslizantes de orden arbitrario:

- La selección del orden del modo deslizante basado en el orden de la singularidad del SOSP;
- El diseño de la superficie deslizante como la solución del SOSP;

- El uso del controlador de orden superior Cuasi-Continuo para forzar a las trayectorias del sistema a converger en tiempo finito a la superficie deslizante diseñada.

AGRADECIMIENTOS

El autor, estudiante de maestría Ismael Castillo CVU. 425551, agradece al CONACYT Proyecto 132125, y al proyecto PAPIIT IN113613 por el apoyo otorgado para sus estudios y el desarrollo de éste artículo.

REFERENCIAS

- V. Utkin, Slides Modes in Control and Optimization. Springer-Verlag, 1991.
- C. Edwards and S. Spurgeon, Sliding Mode Control: Theory and Applications. London: Taylor and Francis, 1998.
- A. Luk'yanov and V. Utkin, Optimal linear systems with degenerated criterion, Automation and Remote Control, no. 7, pp. 42-50, 1982.
- R. Gabasov and N. Choksy, Singular Optimal Controls. Kluwer Academic Pub, 2001.
- A. Poznyak, Y. Shtessel, and C. Jimenez, Min-max sliding-mode control for multimodel linear time varying systems, IEEE Trans. Automat. Contr, vol. 48, pp. 2141-2150, 2003.
- A. Loukianov, M. Basin, and M. Hernandez-Gonzalez, Optimal controller for stochastic polynomial systems with state-dependent polynomial input, Circuits Syst Signal Process, vol. 30, pp. 1463-1479,
- A. Levant, Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, Int. J. of Control, 76 (9/10), 924-941, 2003
- Levant, A., Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers, Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 50, no. 11, pp. 1812-1816, 2005
- A. Levant, Finite Differences in Homogeneous Discontinuous Control, IEEE Transactions on Automatic Control, 52(7), 1208 - 1217, 2007
- A. Levant, Chattering Analysis, IEEE Transactions on Automatic Control, 55(6), 1380 - 1389, 2010.
- Dinuzzo, F., Ferrara, A., Higher order sliding mode controllers with optimal reaching, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54 no. 9 , pp. 2126-2136 , 2009.
- Laghrouche, S., Plestan, F., Glumineau, A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode , Automatica, 43 (3) , pp. 531-537, 2007.
- H. J. Kelley, A transformation approach to singular subarcs in optimal trajectory and control problems, SIAM J. Control, Ser. A., vol. 2, no. 2, pp. 234-240
- J. Speyer and D. Jacobson, Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 33, pp. 163-187, 1971.
- Anderson, B. y J. B. Moore (1990). *Optimal Control, Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall. New York.
- Moore, B. and Anderson, BDO, Linear Optimal Control, Prentice-Hall Inc. 1971.