

Modelado e identificación de la fuerza de reacción de un *riser* marino

L. Torres C. Verde

Instituto de Ingeniería-UNAM

Coyoacán D.F., 04510, México

ftorreso@iingen.unam.mx, verde@servidor.unam.mx

Resumen—En este artículo, se presenta un modelo para caracterizar la fuerza de reacción no lineal de un *riser* marino, basado en polinomios dependientes y afines a su posición y velocidad. La propuesta de este modelo está relacionada con la física del sistema, pero también con la factibilidad de obtener una representación del sistema específica para el diseño de un observador de estados, con miras a identificar los parámetros estructurales de un *riser*. La representación requerida es una forma conocida como *afín a los estados*, que aquí se propone obtener via la transformada de Liénard. Se presenta además, un análisis de observabilidad e identificabilidad, en el que se considera que para llevar a cabo la identificación sólo las mediciones de posición están disponibles. En resumen, en este trabajo se propone: (1) un modelo no lineal de parámetros distribuidos que puede utilizarse para fines de monitoreo, (2) la discretización espacial de tal modelo utilizando el Método de Diferencias Finitas, (3) la transformación del modelo finito a un sistema Liénard, (4) la representación—aproximación—de la fuerza de reacción no lineal, con polinomios en función de la posición y velocidad del *riser*, y (5) un análisis de observabilidad e identificabilidad previo a la concepción de un observador de estados.

Palabras clave: Sistemas marinos, tuberías, parámetros estructurales, identificación de parámetros, observadores.

I. INTRODUCCIÓN

Los *risers* marinos—tuberías ascendentes— juegan un papel muy importante en la extracción de petróleo costa afuera (Lee, 2009). Son la conexión entre una plataforma y el cabezal de un pozo en el fondo del mar, y pueden utilizarse para transportar petróleo, para proteger la columna de perforación o para transportar el lodo resultante cuando se está perforando. Los *risers* son ductos sumergidos en el mar sobre los que se presentan fuerzas externas que producen grandes desplazamientos y vibraciones. A su vez, estas excitaciones provocan esfuerzos torsionales, axiales, flectores, etc. Así pues, el comportamiento dinámico de un *riser*, se puede modelar numéricamente como un oscilador armónico con parámetros distribuidos (masas, resortes y amortiguadores) a lo largo de su estructura, el cual además está sujeto a fuerzas externas (corrientes oceánicas, oleaje, movimiento de la plataforma, etc.) que determinan su comportamiento en el tiempo (Niedzwecki y Liagre, 2003; Furnes, 2000). En general, los sistemas de ingeniería que poseen masa y elasticidad pueden presentar algún movimiento relativo que, si se repite después de un intervalo de tiempo, se conoce como vibración. Cuando

una estructura es excitada por fuerzas externas con frecuencias cercanas a sus frecuencias naturales, la vibración en la estructura se amplifica y el sistema se puede volver inestable. Este fenómeno se conoce como resonancia. En las estructuras mecánicas, las vibraciones provocan desgastes, que pueden producir fallas con desenlaces indeseables. En la actualidad, los fenómenos de vibración y resonancia son muy estudiados, sobre todo en la construcción de grandes estructuras (Doebbling, 1996).

Durante el proceso de exploración y explotación de petróleo en aguas profundas, se presenta el fenómeno de vibración. Este fenómeno se produce principalmente por la fuerza que ejercen las corrientes marinas (vórtices), el oleaje y el viento, sobre las estructuras utilizadas en la extracción de petróleo. En los *risers*, la vibración causa a su vez tensión mecánica, desencadenando problemas de fatiga y propagación de grietas, que ligadas al desgaste por corrosión interna—debido al hidrocarburo—requieren inspecciones y reparaciones costosas. Aunado al problema de vibración, está el hecho de que muchos de los campos petrolíferos marinos, se encuentran en posiciones geográficas propensas a huracanes, ciclones, tormentas polares, etc. Esto hace a muchas instalaciones costa afuera, más susceptibles a daños estructurales (Kaiser y Yu, 2010). Así pues, para evitar consecuencias devastadoras y enormes daños ecológicos y económicos, es necesario tener un sistema de monitoreo automático—que no interrumpa el proceso—adecuado para estimar continuamente cambios estructurales en los *risers*, y que puedan indicar posibles daños irreversibles a corto, mediano y largo plazo.

A un sistema de supervisión de condiciones estructurales, se le conoce como Sistema de Monitoreo de Salud Estructural (Structural Health Monitoring, SHM, en inglés), que desde hace mucho tiempo se ha vuelto indispensable para evaluar los posibles daños en estructuras marinas, en particular los daños que no se pueden detectar con herramientas de inspección visual, como son los Vehículos Operados Remotamente (Remotely Operated Vehicles, ROV, en inglés), utilizados cuando los buzos no pueden llegar a mayores profundidades.

Varias metodologías han sido desarrolladas para supervisar las condiciones estructurales de los *risers*. Una de las más empleadas, es el uso de datos dinámicos que actualizan continuamente los parámetros de un modelo de

la estructura. Tales datos, se obtienen utilizando registros de aceleración y técnicas de medición de vibraciones.

En este artículo, se propone modelar la fuerza de reacción no lineal de un *riser*, mediante dos polinomios en función de la velocidad y posición, y con el fin de que tales polinomios puedan aproximar diversos comportamientos no lineales de la fuerza de reacción. La plusvalía de esta propuesta se detalla a continuación.

En diversos trabajos teóricos de ingeniería costa afuera, se han propuesto modelos para representar la fuerza de reacción no lineal de un *riser* marino, por ejemplo en (Niedzwecki y Liagre, 2003) se propuso que fuera modelada con no linealidades cúbicas tipo Duffing y Van der Pol—en función de la posición y velocidad del *riser*—parametrizadas con coeficientes de rigidez y amortiguamiento; o en (Furnes, 2000), se propuso un amortiguamiento hidrodinámico dependiente de un amortiguamiento estructural. En general, existen diversos factores que determinan el comportamiento de la reacción no lineal. Por ejemplo: (i) el hidrocarburo que fluye en el interior del *riser* y su interacción con las paredes internas, cuya constitución varía según los materiales de construcción; (ii) la interacción fluido-estructural de las paredes externas con el mar; (iii) y la consideración de los efectos de la vibración inducida por vortices marinos (VIV). Así pues, en este trabajo, con el fin de generalizar la representación de la fuerza de reacción no lineal, se propone utilizar polinomios en función de la posición y velocidad, tal que éstos aproximen dicha fuerza. Las ventajas de asumir esta fuerza de reacción son que: (i) el modelo global del *riser* resultante, un oscilador no lineal polinómico, puede llevarse a la representación de Liénard, para la que ciertos observadores de estado pueden diseñarse, y (ii) el elegir el orden de los polinomios suficientemente alto, para aproximar no linealidades de naturaleza no polinómica.

Finalmente, otra aportación en este artículo, es la exposición de un análisis de observabilidad/identificabilidad de los parámetros estructurales de un *riser* marino, considerando una versión—finita y modificada con la fuerza de reacción no lineal polinómica propuesta aquí—del modelo de parámetros distribuidos propuesto en (Niedzwecki y Liagre, 2003). Dicha versión finita en el espacio, es lograda utilizando el Método de Diferencias Finitas y subsecuentemente la transformada de Liénard. En el análisis se considera la identificación de los coeficientes de la fuerza de reacción junto con los parámetros de la parte lineal del sistema. Dicho análisis es una herramienta útil previa a la concepción de observadores de estado, que a su vez pueden funcionar como herramientas para la detección de daños estructurales en *risers*; eventualmente junto con algoritmos de evaluación estructural como los presentados en (Riveros *et al.*, 2007) y (Elman y Alvim, 2008); y bajo un esquema de detección de fallas (Frank *et al.*, 1999). Sin embargo, la concepción de esquemas de identificación ni la detección de daños son los puntos centrales de este artículo, sino el análisis *per se*.

En la Sección II se presenta el modelo empleado para simular el comportamiento de un *riser* marino, así como su discretización espacial y su transformación en un sistema Liénard. Se presentan además, algunas expresiones utilizadas para modelar la fuerza de reacción, el oleaje y las fuerzas hidrodinámicas que intervienen en la dinámica de un *riser*. En la Sección III, se expone el análisis de observabilidad/identificabilidad. En la Sección IV, se muestran algunos resultados en simulación, mientras que en la Sección V, se dan algunas conclusiones sobre el trabajo presentado.

II. MODELO DINÁMICO DE UN RISER MARINO

II-A. Ecuaciones gobernantes

El comportamiento dinámico de un *riser* sujeto a una excitación externa $u(z, t)$, puede describirse con la siguiente PDE de cuarto orden cuasi-lineal (Niedzwecki y Liagre, 2003):

$$EI \frac{\partial^4 v(z, t)}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + p(z, t) = u(z, t) \quad (1)$$

donde $(z, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$ son las coordenadas del tiempo y del espacio respectivamente, $v(z, t)$ es el desplazamiento horizontal del *riser*, m es la masa por unidad, c es el coeficiente lineal de arrastre viscoso, T es la tensión, EI la rigidez flexional, $u(z, t)$ representa a la fuerzas hidrodinámicas y el término $p(z, t)$ representa la fuerza de reacción no lineal. Nótese, que los parámetros físicos y la tensión, se asumen uniformes a lo largo del *riser* e invariantes en el tiempo.

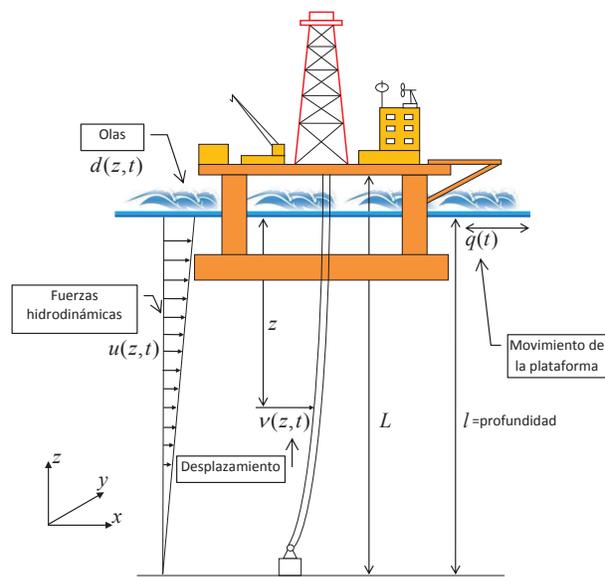


Figura 1. Representación esquemática de un *riser* marino

II-B. Fuerzas hidrodinámicas

Las fuerzas hidrodinámicas que actúan sobre los *risers* se calculan utilizando la ecuación de Morison modificada para un cilindro en movimiento (Morison *et al.*, 1950). De esta manera, la fuerza horizontal hidrodinámica puede expresarse como:

$$u(z, t) = \rho_w C_M \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial d(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_w C_D D (v(z, t) - d(z, t)) |v(z, t) - d(z, t)| \quad (2)$$

Los coeficientes que intervienen en esta ecuación son: C_M , el coeficiente de inercia y C_D , el coeficiente de arrastre. ρ_w es la densidad del agua, D es el diámetro del *riser*, $v(z, t)$ es la velocidad de la corriente, mientras que $d(z, t)$ y $\partial d(z, t)/\partial t$ son la velocidad y la aceleración de las olas, las cuales pueden calcularse mediante las siguientes expresiones, (Wheeler, 1970):

$$d(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \omega_j \frac{\cosh(k_j z)}{\sinh(k_j l)} \cos(\omega_j t + \phi_j)$$

$$\frac{\partial d(z, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \omega_j \frac{\cosh(k_j z)}{\sinh(k_j l)} \sin(\omega_j t + \phi_j)$$

Donde A_j es la amplitud del oleaje, ω_j es la frecuencia de las olas, ϕ_j es el ángulo de fase aleatorio asumido distribuido en el intervalo $[0, 2\pi]$, y k_j es el número de ola, relacionado con ω_j a través de la siguiente relación de dispersión lineal para una profundidad de agua l determinada:

$$\omega_j^2 = g k_j \tanh(k_j l)$$

En este trabajo, la frecuencia de las olas se asume constante.

II-C. Fuerza de reacción no lineal

En (Niedzwecki y Liagre, 2003) se considera un término de reacción-amortiguamiento no lineal basado en la combinación de no linealidades tipo Duffing y Van der Pol .

$$p(z, t) = k_3 \nu^3(z, t) + \frac{c_3}{3} \dot{\nu}^3(z, t) \quad (3)$$

donde k_3 es el coeficiente de Duffing y c_3 es el coeficiente de Van der Pol. La no linealidad de Duffing actúa como un resorte artificial con rigidez positiva y variable que se incrementa conforme el desplazamiento $\nu(z, t)$ se incrementa. La no linealidad de Van der Pol actúa como un amortiguador adicional. En este trabajo, se propone que la fuerza de reacción no lineal se exprese por la siguiente función polinómica, compuesta por dos polinomios de orden η y n respectivamente, y que están en función de la posición y la velocidad:

$$p(z, t) = a_1 \nu(z, t) \dot{\nu}(z, t) + a_2 \nu^2(z, t) \dot{\nu}(z, t) + \dots + a_\eta \nu^\eta(z, t) \dot{\nu}(z, t) + b_1 \nu(z, t) + b_2 \nu^2(z, t) + \dots + b_n \nu^n(z, t) \quad (4)$$

Las principales razones de proponer esta fuerza de reacción son:

- ◇ que el sistema completo no lineal (5) puede ser transformado en un sistema de Liénard, y a su vez ser llevado a una forma *afín a los estados*, adecuada para la concepción de observadores como esquemas de identificación.
- ◇ que los polinomios pueden aproximar—empleando algoritmos de identificación—la fuerza de reacción real de un *riser*, cuando ésta se desconozca.

Ambos puntos serán tratados en la Sección III y son la principal contribución de este artículo.

II-D. Discretización espacial

El sistema PDE (1) no tiene una solución analítica, así que en este trabajo se propone el Método de Diferencias Finitas para obtener una solución aproximada. Tal solución se expresa de la siguiente manera

$$EI\Lambda^{(i)} - T\Upsilon^{(i)} + m\ddot{\nu}^{(i)} + c\dot{\nu}^{(i)} + p^{(i)} = u^{(i)}, \quad (5)$$

con

$$\Lambda^{(i)} = \left(\frac{\nu^{(i+2)} - 4\nu^{(i+1)} + 6\nu^{(i)} - 4\nu^{(i-1)} + \nu^{(i-2)}}{(\Delta z)^4} \right),$$

$$\Upsilon^{(i)} = \left(\frac{\nu^{(i+1)} - 2\nu^{(i)} + \nu^{(i-1)}}{(\Delta z)^2} \right),$$

donde $i = 1, \dots, N$ es el índice de una sección de discretización, N es el número total de secciones, mientras que $u^{(i)}$ y $p^{(i)}$ son la fuerza hidrodinámica y la fuerza de reacción respectivamente, discretizadas también en secciones.

Ahora, considérese el sistema (5), con la fuerza de reacción no lineal (4). Así pues, el sistema (5) puede reescribirse de la siguiente manera

$$EI\Lambda^{(i)} - T\Upsilon^{(i)} + m\ddot{\nu}^{(i)} + \underbrace{\left(c + a_1 \nu^{(i)} + a_2 \left(\nu^{(i)} \right)^2 + \dots + a_\eta \left(\nu^{(i)} \right)^\eta \right)}_{F_0(\nu)} \dot{\nu}^{(i)} + \underbrace{\left(b_1 \left(\nu^{(i)} \right) + b_2 \left(\nu^{(i)} \right)^2 + \dots + b_n \left(\nu^{(i)} \right)^n \right)}_{G_0(\nu)} = u^{(i)} \quad (6)$$

II-E. Condiciones de frontera

En este trabajo—tal como en (Fortaleza, 2009)—se asume que la plataforma a la que está sujeta el *riser*, se desplaza por el movimiento de las olas. Considérese entonces a $q(t)$ como una función en el tiempo de la posición de la plataforma. Así pues, para un *riser* con ambas extremidades conectadas a soportes fijos, las condiciones de frontera son: $\nu(L, t) = q(t)$, en la cima de la tubería conectada a la plataforma y $\nu(0, t) = 0$ en la parte inferior conectada a un punto fijo del fondo marino. Finalmente debido a la condición de rigidez impuesta en los puntos de sujeción del *riser* ($\partial \nu / \partial z(L, t) = \partial \nu / \partial z(0, t) = 0$) son también condiciones de frontera.

II-F. Representación en espacio de estados via la transformada de Liénard

El sistema (6) puede representarse mediante la clásica representación en espacios de estados para un sistema de segundo orden, i.e.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & (7) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}[-EI\Lambda^{(i)} + T\Upsilon^{(i)} - cx_2 - F_0(x)x_2 - G_0(x) + u^{(i)}] \end{aligned}$$

donde $x_1 = \nu^{(i)}(t)$, $\dot{x}_1 = \dot{\nu}^{(i)}(t) = x_2$ and $\dot{x}_2 = \ddot{\nu}^{(i)}(t)$. Otra posibilidad para llevarlo a espacio de estados es la transformada de Liénard (ver Anexo).

Aplicando la transformada de Liénard al sistema (6), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \frac{1}{m} \left(cx_1 + \frac{a_1 x_1^2}{2} + \frac{a_2 x_1^3}{3} + \dots + \frac{a_\eta x_1^{\eta+1}}{\eta+1} \right) \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{m} \left(EI\Lambda^{(i)} - T\Upsilon^{(i)} + b_1 x_1 + b_2 x_1^2 + \dots + b_n x_1^n - u^{(i)} \right) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

donde $x_1 = \nu^{(i)}$ y $x_2 = \dot{\nu}^{(i)}$.

III. OBSERVABILIDAD E IDENTIFICABILIDAD

El problema de identificación de parámetros está relacionado estrechamente a una condición de excitación apropiada junto a la elección de un esquema identificador adecuado. Tales condiciones son difíciles de generalizar para los sistemas no lineales. Sin embargo, se han hecho grandes avances al respecto, y se han establecido condiciones para cierta clase de sistemas no lineales (e.g. (Sastry y Bodson, 1989; Hammouri y Morales, 1990; Besançon *et al.*, 1996)).

Por otro lado, el problema de identificación es una generalización del problema de observación. A menudo, ciertos sistemas dependen de algunas funciones con significado físico que no se conocen, y que deben ser determinadas a partir de experimentos, específicamente, a partir de mediciones y técnicas de identificación. Un ejemplo claro y que atañe a este trabajo, es la identificación de la fuerza no lineal de un *riser* marino, que aunque existen diversos modelos en la literatura para caracterizarla (e.g. (Niedzwecki y Liagre, 2003)), generalmente es una fuerza desconocida, ya que depende de las condiciones estructurales y la interacción—fluido-estructural—de éstas con el hidrocarburo que fluye en el interior del *riser*, así como de la interacción de las fuerzas meta-oceánicas con las paredes externas del *riser*. De este hecho, surge la necesidad de utilizar técnicas de identificación no lineal para caracterizar la fuerza de reacción considerada una función desconocida.

El problema de identificar una función desconocida, se puede formular considerando que un sistema no lineal se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \varphi(\theta, x, u)) \\ y &= h(x, u, \varphi(\theta, x, u)) \end{aligned} \quad (9)$$

donde x denota el vector de estados del sistema, $\varphi(x, u)$ es la función desconocida, θ representa el vector de estados

desconocido que caracterizan la función de desconocida y y son las medidas. Así pues, el problema de identificación se resume a reconstruir la función $\varphi(\cdot)$. Sin embargo, el problema de observación se conecta al de identificación, por dos razones: (i) supónganse que el vector $x(0)$ no es conocido. Entonces, el problema de identificación incluye un problema de observación: se desea estimar ambos, x y $\varphi(\cdot)$, i.e. el estado y la función desconocida. (ii) la identificación requiere un estudio de indetificabilidad dado, y este estudio esta relacionada estrechamente al de observabilidad. Sobre todo si las técnicas de identificación se basan en observadores de estado, como esquemas identificadores, que es el caso del presente trabajo.

III-A. Análisis

En (Besançon *et al.*, 2010; Besançon y Voda, 2010), se demostró que un observador de estados puede construirse para un sistema de Liénard, ya que este tipo de sistemas pueden llevarse a una representación *afín a los estados*. Por esta razón, en este trabajo se propone la fuerza de reacción no lineal en forma polinómica (4)—dependiente de las posiciones y velocidades—ya que el sistema resultante (6) que representa un *riser* marino puede ser transformado a un sistema de Liénard (8) a través de la transformación (18), y a su vez éste ser transformado en un sistema *afín a los estados*. Consideréese, que el análisis que prosigue, al basarse en el modelo (8), es para la estimación de los parámetros (considerados en un principio espacialmente uniformes) y la fuerza de reacción en una sola sección de discretización i , es de decir, para la estimación de $p^{(i)}$.

Proposición 1 La transformación global definida por

$$\begin{aligned} [x^T, \theta^T]^T &\mapsto \\ \xi &= [x_1, x_2, c, a_1, \dots, a^\eta, EI, T, b_1, \dots, b^n]^T. \end{aligned} \quad (10)$$

transforma el sistema (8) en un sistema *afín a los estados* de la forma $\dot{\xi} = A(y(t))\xi(t) + u(t)$; $y(t) = C\xi(t)$.

Demostración: Esto se puede verificar por cálculo directo, obteniéndose

$$A(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{y}{m} - \frac{y^2}{2m} \dots & -\frac{y^\eta}{3m} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\Lambda^{(i)}}{m} & \frac{\Upsilon^{(i)}}{m} & -\frac{y}{m} & \dots & -\frac{y^\eta}{m} \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \xi(t)$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & u^{(i)} & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T \xi(t)$$

■
Nótese que variables de aceleración no son incluidas en (4), pues su inclusión no permitiría la transformación.

Por otro lado, el proponer una función polinómica permite la aproximación de la fuerza real desconocida—considerando que ésta es continua—mediante la estimación de sus coeficientes y de acuerdo al orden asignado a cada polinomio.

Para analizar la observabilidad/identificabilidad del sistema (8) con miras al diseño de un observador que estime sus estados y parámetros, el sistema se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_o x + \Phi_j(y)\theta_j \\ y &= C_o x \end{aligned} \quad (11)$$

con

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, y = x_1, x = [x_1, x_2]^T.$$

Para Φ_j considérense dos casos:

Caso I: se requiere estimar sólo la fuerza de reacción no lineal, *i.e.* los coeficientes de la función polinómica (4), la matriz Φ_1 es la siguiente:

$$\Phi_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{y^2}{2} & \cdots & \frac{y^{\eta+1}}{\eta+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & y & \cdots & y^\eta \end{array} \right), \quad (12)$$

y el vector de parámetros

$$\theta_1 = [a_1, \dots, a_\eta | b_1, \dots, b_n]^T.$$

Caso II: se requiere estimar la fuerza de reacción no lineal, pero también los coeficientes que caracterizan la parte lineal del sistema—con excepción de la masa m —la matriz Φ_2 es la siguiente:

$$\Phi_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} y & \frac{y^2}{2} & \cdots & \frac{y^{\eta+1}}{\eta+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \Lambda^{(i)} & \Gamma^{(i)} & y & \cdots & y^\eta \end{array} \right), \quad (13)$$

y el vector de parámetros

$$\theta_2 = [c, a_1, \dots, a_\eta | EI, T, b_1, \dots, b_n]^T.$$

Nótese que la matriz Φ_2 tiene como elementos a $\Lambda^{(i)}$ y $\Gamma^{(i)}$ que son funciones que dependen de las mediciones de posición en otros puntos del riser, como se muestra en la ecuación (5). Claramente, estas no son estados del sistema (11), pues éste representa el comportamiento del riser solamente en el punto i . Podrían tomarse como entradas exógenas del sistema en i , sin embargo, son respuestas del sistema global acoplado, por lo que en este trabajo, aún cuando el análisis no se realiza para el sistema global, se toman como mediciones $y^{(i)}$ que provienen de otros puntos i .

Nótese también, que la matrices Φ_j no podrían construirse a partir del sistema (7), es decir, sin la transformación de Liénard, ya que el polinomio $a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_\eta x_1^\eta$ y el coeficiente c son afines a la velocidad x_2 , la que no es un estado medible para la estimación. Obviamente,

si la velocidad es medible, el problema de estimación se reduciría de un problema de observación/identificación a uno de identificación

Considérese ahora, la siguiente condición de excitación persistente en función de $y(t)$.

$$\exists T, \beta' > 0, \alpha' > 0 :$$

$$\beta' \geq \int_t^{t+T} \Psi_y^T(\tau, t) C^T C \Psi_y(\tau, t) d\tau \geq \alpha' I, \quad \forall t \geq t_0, \quad (14)$$

para $t_0 \geq 0$, la matriz de identidad I y la matriz de transición Φ_j .

En (Besançon *et al.*, 2006) se demostró, que la condición de excitación para la convergencia de un observador, es equivalente a separar las condiciones para la estimación de estados por un lado, y la estimación de parámetros por el otro, lo que puede expresarse de la siguiente manera:

C1. $\exists K : \dot{\zeta} = (A_o - KC_o)\zeta$ es exponencialmente estable.
C2. Υ solución de $\dot{\Upsilon} = (A_o - KC_o)\Upsilon + \Phi_j(y)$ satisface:

$$\beta I \geq \int_t^{t+T} \Upsilon^T(\tau) C_o^T C_o \Upsilon(\tau) d\tau \geq \alpha I \quad (15)$$

lo que significa $\Upsilon^T C_o^T$ deben satisfacer la condición persistente (14) para $\alpha, \beta, T > 0$ y algún $\tau \geq \tau_0$ para $\tau_0 \geq 0$.

Claramente, la condición C1 se satisface para (11), y el problema se reduce a verificar la condición C2, que es garantizar que (15) se satisfaga para Υ —particularmente la cota inferior—calculada a partir de $y(t)$.

La solución $y(t)$ de la ecuación (11) con (12) o (13), al ser la solución de un sistema de Liénard polinómico, converge al menos, a un movimiento periódico $y_{cl}(t)$, correspondiente a un ciclo límite.

Según el Teorema de Dulac, la cantidad de ciclos límites en un sistema diferencial polinómico en \mathbb{R}^2 es finito.

Ahora, eligiendo $\alpha > 0$ y T como el periodo de la solución periódica $y_{cl}(t)$, se tiene

$$\int_0^T y_{cl}^2(\tau) d\tau \geq \alpha \quad (16)$$

Entonces, advirtiendo que $C_o \Upsilon$ puede obtenerse a partir del filtrado de y_{cl} , y recordando que la excitación persistente se preserva en el filtrado de fase mínima estable de las señales de salida acotadas con derivadas de tiempo acotadas (Sasthy y Bodson, 1989), si (16) se satisface, la condición (14) también.

En (Besançon *et al.*, 2010), esta condición fue estudiada de manera más formal para uno de los sistemas de Liénard más conocidos, el oscilador de Van der Pol.

IV. ANÁLISIS EN SIMULACIÓN

Para la programación del simulador en MATLAB® basado en el modelo (5), se consideraron los parámetros listados en la Tabla I que fueron tomados de (Niedzwecki y Liagre, 2003). Se asume que el modelo está discretizado con $n = 50$ secciones (satisfaciendo la condición de Courant),

y que sus condiciones iniciales son igual a cero, *i.e.* $[\nu^{(i)}, \dot{\nu}^{(i)}]^T = [0, 0]^T$ y que la fuerza de reacción no lineal está representada por (3). En la Fig. 2, se muestra un retrato

TABLA I
PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

| Parámetro | Unidad | Valor |
|----------------------------------------------|----------------------|-----------------|
| Diámetro | [m] | 1.4 |
| Longitud | [m] | 873 |
| Masa por unidad longitudinal | [kg/m] | 912 |
| Coef. de arrastre viscoso | [Ns/m] | 120 |
| Coef. de Duffing | [N/m ³] | 8000 |
| Coef. de Van der Pol | [N/m ³] | 5000 |
| Tensión | [N] | 7×10^6 |
| Rigidez flexional | [Nm ²] | 10^7 |
| Coefficiente de inercia | - | 1.05 |
| Coefficiente de arrastre | - | 1.2 |
| Densidad del agua | [Kg/m ³] | 1,025 |
| Periodo de las olas | [s] | 11.3 |
| Amplitud de las olas | [m] | 7.5 |
| Velocidad de la corriente (perfil constante) | [m/s] | 1.2 |

de fase bidimensional del comportamiento del *riser* cuando la plataforma se mueve de manera periódica. Concretamente cuando $q(t) = 8 \sin t$ [m]. En este caso, no se consideraron las fuerzas hidrodinámicas. En la Fig. 3, se muestra un

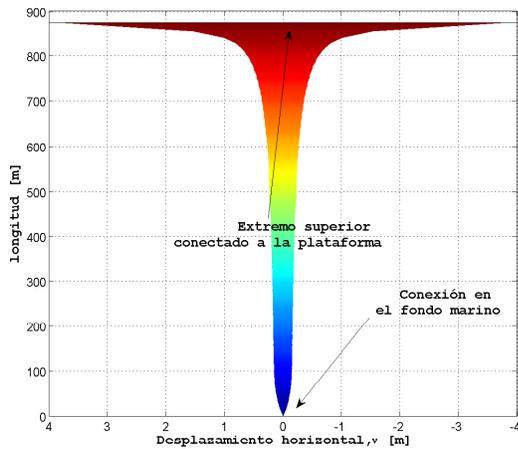


Figura 2. Respuesta del *riser*—movimiento periódico de la plataforma

retrato de fase tridimensional del comportamiento del *riser* cuando la plataforma se mueve de manera aleatoria con una amplitud de 1 [m]. Supóngase ahora, que el modelo (1) con la fuerza de reacción (3)—especialmente uniforme a lo largo del *riser*— representa el *riser* real, pero tal fuerza se desconoce. Entonces, se puede diseñar un observador con el fin de estimarla en cualquier punto i a lo largo de la estructura, como se demostró en la sección precedente, utilizando el modelo (8) transformado en una representación *afín a los estados* (ver Proposición 1). En la Fig. (4) se muestra la estimación de $p^{(i)}$ realizada por observador que, para este artículo en particular, se diseñó de acuerdo a la propuesta presentada en (Besançon *et al.*, 1996). El orden

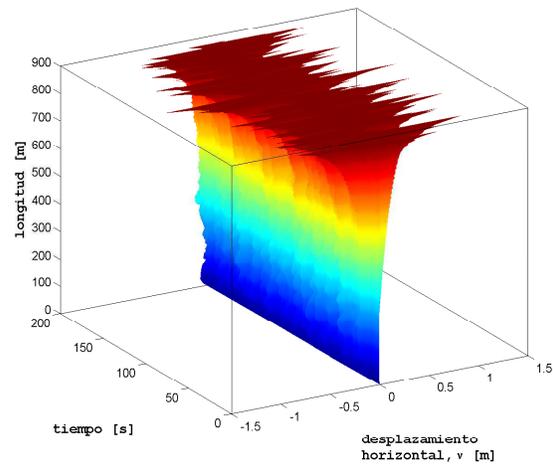


Figura 3. Respuesta del *riser*—movimiento aleatorio de la plataforma

de los polinomios se eligió $\eta = n = 2$. Para el diseño se consideró a los parámetros como estados adicionales de un vector de estados extendido. Podemos apreciar que aunque el orden del polinomio es de orden dos, la estimación de la fuerza de reacción $\hat{p}^{(i)}$, parametrizada por a_1, a_2, b_1, b_2 , es bastante aproximada a $p^{(i)}$.

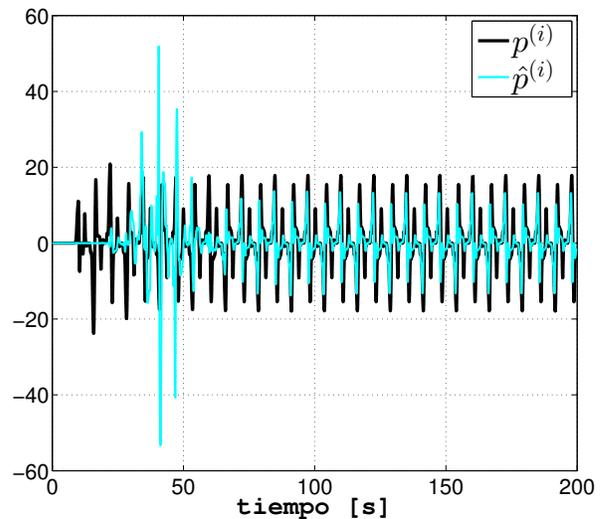


Figura 4. Estimación de la fuerza de reacción no lineal

V. CONCLUSIONES

Se presentó un modelo que puede ser usado para identificar los parámetros estructurales de un *riser* marino vía observadores de estado. Se propuso que la fuerza de reacción puede ser modelada y estimada por funciones polinómicas cuando no se cuenta con un modelo físico de dicha fuerza; pero que además permite transformar al sistema en una forma adecuada para la identificación de

todos sus parámetros. Las aportaciones aquí presentadas pueden considerarse antecedentes para el desarrollo de algoritmos de identificación como miras a la detección de daños estructurales.

VI. ANEXO

Los sistemas de Liénard responden a la ecuación diferencial

$$\ddot{\nu} + F_0(\nu)\dot{\nu} + G_0(\nu) = u(t) \quad (17)$$

que es una generalización de la ecuación diferencial que rige el comportamiento de un sistema mecánico de segundo orden con fricción $F_0(\cdot)$ y fuerzas $G_0(\cdot)$ debidas a funciones potenciales, (Liénard, 1928).

Siempre que F_0 y G_0 sean lineales con respecto a un vector de parámetros θ , concretamente $F_0(\nu) = F_1^T(\nu)\theta$ y $G_0(\nu) = G_1^T(\nu)\theta$ para $F_1, G_1, \theta \in \mathbb{R}^P$, la transformada de Liénard se puede aplicar de la siguiente manera:

$$x_1 = \nu; x_2 = \dot{\nu} + \int_0^\nu F_1^T(\sigma)\theta d\sigma$$

lo que resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \int_0^{x_1} F_1^T(\sigma)\theta d\sigma \\ \dot{x}_2 &= -G_1^T(x_1)\theta + u(t) \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (18)$$

VII. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por DGAPA-UNAM.

REFERENCIAS

- Besaçon, G., A. Voda y G. Jouffroy (2010). A note on state and parameter estimation in van der pol oscillators. *Automatica* **46**(10), 1735–1738.
- Besaçon, G., H. Hammouri y G. Bornard (1996). Observer synthesis for a class of nonlinear control systems. *European Journal of Control* **2**, 176–192.
- Besaçon, G., J. De Leon-Morales y J. Huerta-Guevara (2006). On adaptive observers for state affine systems. *International Journal of Control* **79**(6), 581–591.
- Besaçon, G. y A. Voda (2010). Observer-based parameter estimation in Liénard systems. En: *Adaptation and Learning in Control and Signal Processing - ALCOSP 2010*. Anatolia, Turquía.
- Doebbling, S. W. (1996). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review. *Los Alamos National Laboratory Report LA-13070-MS*.
- Elman, P. y R. Alvim (2008). Development of a failure detection system for flexible risers. En: *18th International Offshore and Polar Engineering Conference*. Vancouver, Canada.
- Fortaleza, E. (2009). Active control applied to offshore structures: Positioning and attenuation of vortex induced vibration. Tesis de doctorado. École Nationale Supérieure des Mines de Paris. Paris, Francia.
- Frank, P., G. Schreier y E. Alcorta-García (1999). *Directions in Nonlinear Observer Design*. Cap. Nonlinear Observers for Fault Detection and Isolation, pp. 399–422. Vol. Lecture Notes in Control and Information Science 244. Springer.
- Furnes, G. K. (2000). On marine riser responses in time-and-depth-dependent flows. *Journal of fluids ans structures* **14**, 257–273.
- Hammouri, H. y J. D. L. Morales (1990). Observer synthesis for state-affine systems. En: *29th Conference On Decision and Control*. Honolulu, Estados Unidos. pp. 784–785.
- Kaiser, M. J. y Y. Yu (2010). The impact of hurricanes Gustav and Ike on offshore oil and gas production in the Gulf of Mexico. *Applied Energy* **87**(1), 284–297.
- Lee, J. (2009). *Introduction to Offshore Pipelines and Risers*. 2 ed.
- Liénard, A. (1928). Etude des oscillations entretenues. *Revue générale de l'électricité* **23**, 901–954.
- Morison, J. R., M. P. O'Brien, J. W. Johnson y S. A. Schaaf (1950). The force exerted by surface waves on piles. *Journal of Petroleum Technology* **2**(5), 149–154.
- Niedzwecki, J. M. y P. Y. F. Liagre (2003). System identification of distributed-parameter marine riser models. *Ocean Engineering* **30**, 1387–1415.
- Riveros, C. A., T. Utsunomiya, K. Maeda y K. Itoh (2007). Damage detection in flexible risers using statistical pattern recognition techniques. En: *17th International Journal of Offshore and Polar Engineering*. Lisboa, Portugal.
- Sastry, S. y M. Bodson (1989). *Adaptive control-stability, convergence and robustness*. Prentice Hall Int.
- Wheeler, J. D. (1970). Methods for calculating forces produced by irregular waves. *Journal of Petroleum Technology* **22**(3), 359–367.