

Estabilización en tiempo fijo de un sistema de segundo orden

Emmanuel Cruz-Zavala Jaime A. Moreno

Coordinación Eléctrica y Computación,
Instituto de Ingeniería, UNAM, 04510 México D.F., Mexico.
Email: emitacz@yahoo.com.mx, JMorenoP@ii.unam.mx

Leonid M. Fridman

División de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, UNAM, 04510 México D.F., Mexico.
Email: lfridman@unam.mx

Resumen—En este artículo se diseña una nueva clase de controlador discontinuo para un sistema incierto de segundo orden con una única entrada de control. En contraste con las técnicas reportadas, que se basan en el control por modo deslizante clásico, el diseño del controlador propuesto se basa en métodos de Lyapunov, lo cual permite obtener condiciones suficientes para garantizar la estabilidad en tiempo fijo del sistema en lazo cerrado con el controlador discontinuo propuesto. El desempeño es comparado por medio de una simulación.

Palabras clave: Control por modos deslizantes, Funciones de Lyapunov, Convergencia en tiempo fijo.

I. INTRODUCCIÓN

El control por modos deslizantes (CMD) es ampliamente utilizado, ya que garantiza estabilidad robusta con respecto a incertidumbres y perturbaciones externas. Básicamente, el diseño clásico de CMD se basa en la búsqueda de una entrada de control discontinua para llevar las trayectorias de estado a la superficie deslizante en un tiempo finito (Utkin, 1992). La superficie deslizante es una variedad previamente diseñada para satisfacer algunos requisitos de desempeño dinámico. El comportamiento dinámico descrito por las trayectorias sobre la superficie deslizante se conoce como *modo deslizante*. Generalmente, el CMD clásico asegura convergencia asintótica de las trayectorias del sistema reducido durante el modo deslizante, debido a que la superficie deslizante diseñada satisface alguna condición Lipschitz.

El control basado en modos deslizantes terminales (CMDT) es otro método que garantiza convergencia en tiempo finito utilizando entradas de control discontinuas y superficies deslizantes no Lipschitz, mejor conocidas como superficies deslizantes terminales (SDT's) (Man et. al, 1994), (Wu et. al, 1998) y (Yu y Man, 2002). Desafortunadamente, el uso de términos no lineales en la superficie produce términos indeseables en la estructura de control que hacen que la ley de control sea no acotada en algún dominio del espacio de estado. Limitando la aplicación de estos controladores en la práctica, ya que las trayectorias de estado deben comenzar en un sector predeterminado del espacio de estados con el fin de evitar una señal de control no acotada. Para mejorar la velocidad de convergencia durante el modo deslizante terminal (MDT)

se pueden introducir algunos términos lineales a la SDT. Este enfoque se conoce como control basado en modos deslizantes terminales rápidos (CMDTR) (Yu y Man, 2002). Sin embargo, como la superficie deslizante es todavía no Lipschitz, la señal de control sigue siendo no acotada para algunos valores de los estados.

Recientemente ha crecido el interés por diseñar controladores discontinuos capaces de garantizar estabilidad del origen en tiempo fijo (Cruz Zavala et. al, 2012), (Polyakov, 2012). La relevancia de estos controladores nace de garantizar tareas de control en algún tiempo previamente dado. Por ejemplo, en control de sistemas híbridos con 'dwell time' estrictamente positivo, es preferible que la acción de control proporcione estabilización robusta del sistema antes de que el siguiente switcheo ocurra.

En este artículo se introduce un nuevo controlador discontinuo capaz de llevar las trayectorias de un sistema perturbado de segundo orden al origen en un tiempo fijo. Se asume que la cota de la incertidumbre/perturbación es conocida. Como veremos el conjunto donde el controlador es discontinuo, puede verse como una superficie deslizante uniforme que proporciona propiedades de convergencia en tiempo finito. Además, el controlador propuesto tiene una estructura mucho más simple que el reportado en (Polyakov, 2012).

II. PRELIMINARES

Primero se presentan algunos conceptos importantes sobre sistemas homogéneos. Defínase al operador dilatación como $\delta_\epsilon^r(x) := (\epsilon^{r_1}x_1, \dots, \epsilon^{r_n}x_n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, donde r_i son números positivos (pesos de las coordenadas). De (Bacciotti, A. y Rosier, L., 2005), se dice que

- un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es homogéneo de grado l ($l \in \mathbb{R}$) con respecto a (c.r.a) la dilatación $\delta_\epsilon^r(x)$, si para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple $f_i(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^{l+r_i}f_i(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ and $\forall i \in [1, n]$.
- una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) (c.r.a) la dilatación $\delta_\epsilon^r(x)$, si para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple $V(\delta_\epsilon^r(x)) = \epsilon^m V(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

La estabilidad asintótica de sistemas homogéneos se puede estudiar por medio de funciones de Lyapunov homogéneas (no necesariamente una forma cuadrática) (Bacciotti, A. y Rosier, L., 2005). Sin embargo, no se ha desarrollado

una metodología general para construir tales funciones de Lyapunov. Además, la estabilidad dinámica de un sistema homogéneo asintóticamente estable puede ser caracterizada por el grado de homogeneidad de su campo vectorial. En general, (a) si el grado de homogeneidad es negativo, el sistema es estable de tiempo finito; (b) si el grado es cero, es exponencialmente estable y (c) si el grado es positivo, es asintóticamente estable, (Hahn, 1967), (Bhat y Bernstein, 2005), (Bacciotti, A. y Rosier, L., 2005). El concepto de homogeneidad se puede extender a inclusiones diferenciales (Levant, 2005).

Definición 1: (Levant, 2005) Una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x) \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, es homogénea de grado q c.r.a la dilatación $\delta_\epsilon^r(x)$, si para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple $F(x) = \epsilon^{-q} \delta_\epsilon^{-r}(x) F(\delta_\epsilon^r(x))$.

Finalmente, se presenta la noción de estabilidad en tiempo fijo.

Definición 2: (Polyakov, 2012) Se dice que $x = 0$ es estable en tiempo fijo si es globalmente estable en tiempo fijo y globalmente atractivo en tiempo fijo, es decir, existe un constante $T_{\text{máx}} > 0$ tal que el tiempo de convergencia $T(x_0)$ esta uniformemente acotado por $T_{\text{máx}}$, i.e., $T(x_0) \leq T_{\text{máx}}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

La cota $T_{\text{máx}}$ es una constante positiva independiente de las condiciones iniciales. Llamaremos a esta constante, *constante de tiempo fijo*.

En este artículo se usa la siguiente notación: $[x]^m = |x|^m \text{sign}(x)$, $\forall m \geq 0$, para representar un operador que preserva el signo del valor de las funciones. Acorde con esto $[x]^0 = \text{sign}(x)$, $\frac{d}{dx}[x]^m = m|x|^{m-1}$ y $\frac{d}{dx}|x|^m = m|x|^{m-1} \text{sign}(x) = m[x]^m$. Tenga en cuenta que $[x]^m = x^m$ para cualquier entero impar m .

III. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Esencialmente, el problema propuesto consiste en diseñar un controlador discontinuo para el sistema dinámico

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x) + g(x, t)u + w(x, t), \quad (1)$$

que garantice la estabilidad en tiempo fijo del origen. En vez de diseñar previamente la variedad deslizante con la característica de convergencia en tiempo fijo, el controlador propuesto es derivado mediante una función de Lyapunov. Tenga en cuenta que $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^1$ es la entrada de control, $f(x)$ es la dinámica nominal del sistema, $g(x, t)$ es una función que satisface $g(x, t) > b$, donde b una constante conocida, $w(x, t)$ es una incertidumbre/perturbación que actúa sobre el sistema y que se considera uniformemente acotadas en t , $\forall t \geq 0$. Cuando $w(x, t)$ no desvanece en el origen $x = 0$ ningún controlador continuo puede estabilizar el sistema (1). Las soluciones del sistema (1) se entienden en el sentido de (Filippov, 1988).

IV. PROBLEMAS CON EL DISEÑO CLÁSICO DEL CMD

Considere el problema de estabilización en tiempo finito del siguiente sistema de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u + w(x, t), \quad (2)$$

$u \in \mathbb{R}^1$ es la entrada de control a ser diseñada mediante el diseño clásico de CMD. En este caso, la superficie deslizante tiene la siguiente estructura

$$s = x_2 + c_1[x_1]^p = 0, \quad p \in (0, 1). \quad (3)$$

Este tipo de variedad deslizante se conoce en la literatura como SDT (Man et. al, 1994). Tomando (x_1, s) como nuevas variables de estado, el sistema dinámico (2) queda representado por

$$\dot{x}_1 = -c_1[x_1]^p + s, \quad \dot{s} = u + c_1p|x_1|^{p-1}x_2 + w(x, t). \quad (4)$$

Cuando existe el modo deslizante ($s = 0$), la dinámica reducida del sistema es $\dot{x}_1 = -c_1[x_1]^p$, donde la constante $c_1 > 0$. La soluciones de esta ecuación diferencial convergen en un tiempo finito a cero para cualquier $p \in (0, 1)$ (Bhat y Bernstein, 2000). Si $p = 1$, sólo se garantiza convergencia exponencial al origen. Una ley de control que asegura la existencia del modo deslizante, es decir, que logra que la condición de suficiencia $s\dot{s} < -n|s|$ se cumpla (Utkin, 1992), se diseña como

$$u = -c_1p|x_1|^{p-1}x_2 - Q \text{sign}(s), \quad (5)$$

donde Q se elige como $Q > \rho$, si se conoce la cota superior ρ de la incertidumbre acoplada $w(x, t)$. Note que la entrada de control u no esta acotada en el conjunto $x = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$. Esto se debe a la no diferenciable de la superficie deslizante. Dado que la ley de control discontinua se diseña de la derivada de la superficie deslizante c.r.a el tiempo, los términos de bajo orden producen algunos términos de control que son singulares en algún conjunto del espacio de estados. Para atacar el problema de singularidad en la entrada de control, algunos autores han propuesto un enfoque de "desingularización" para evitar la aparición de términos no deseados en la ley de control (Feng et. al, 2002), (Yu et. al, 2005). Básicamente, se reescribe la SDT preservando la propiedad de convergencia tiempo finito. En cierto sentido, la idea principal consiste en recibir la superficie deslizante de modo que sea diferenciable al menos una vez. Para ilustrar esto, $s = x_2 + k_1[x_1]^p = 0$ se sustituye por $\phi(x_1, x_2)$, tal que $\phi(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -k_1[x_1]^p$, con $\phi(x_1, x_2)$ siendo C^1 en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, el diseño del control se reduce a buscar la función $\phi(x_1, x_2)$. Proponiendo

$$\phi(x_1, x_2) = [x_2]^{1/p} + k_1^{1/p}x_1 = 0, \quad (6)$$

y usando las coordenadas (x_1, ϕ) , el sistema (2) se puede reescribir como

$$\dot{x}_1 = [\phi - k_1^{1/p}x_1]^p, \quad \dot{\phi} = |x_2|^{1-p}[pu + k_1^{1/p}[x_2]^p].$$

Inspirado en el CMD clásico, se puede elegir $u = -(k_2 \text{sign}(\phi) + k_1^{1/p}[x_2]^p)/p$ para obtener

$$\dot{x}_1 = [\phi - k_1^{1/p}x_1]^{1/p}, \quad \dot{\phi} = -k_2|x_2|^{1-p} \text{sign}(\phi).$$

Ahora, la entrada de control u está libre de términos singulares preservando la propiedad de convergencia tiempo

finito. Sin embargo, el diseño por CMD clásico para obtener leyes control que garanticen convergencia en tiempo finito al origen parece ser complicado cuando se trata de extender a sistemas de orden arbitrario. Además, no se puede estimar el tiempo de convergencia de las trayectorias en lazo cerrado.

V. CONTROLADOR DE TIEMPO FIJO (CTF)

Esta sección presenta el resultado principal de este artículo. El diseño de un controlador discontinuo que proporciona convergencia tiempo fijo.

Suposición 1: Existen constantes $\rho, \rho_u, \mu_f, \mu_u \geq 0$ tal que

$$|w(x, t)| \leq \rho\mu_f + \rho_u\mu_u|s_2|^{3/5}, \quad (7)$$

donde $s_2 = [x_2]^2 + k_1^2 s_{1l}$ y $s_1 = \mu_f x_1 + \mu_u [x_1]^{5/2}$.

Teorema 1: Para el sistema (1), se suponga que (7) se cumple. Si la entrada de control v se elige como

$$\begin{aligned} u &= (-f(x)/K_m + v), \\ v &= -k_2\mu_f \text{sign}(s_2) - k_3\mu_u [s_2]^{3/5}, \end{aligned} \quad (8)$$

entonces, el origen $x = 0$ es estable en tiempo-fijo para cualquier $K_m k_2 > 2k_1^2 + \rho$, $K_m k_3 > \frac{25}{8}k_1^2 + \rho_u$ y $k_1^2 > 2\frac{3}{8}\mu_u^{-1}$.

El controlador es ciertamente insensible a las perturbaciones que satisfacen la Suposición 1. El conjunto de ganancias son solo una condición suficiente para garantizar la estabilidad de tiempo finito.

V-A. Demostración del Teorema 1

Se propone una función de Lyapunov para hallar las condiciones sobre las ganancias que garantizan la estabilidad en lazo cerrado del sistema (1), así como, caracterizar sus propiedades de estabilidad. El Teorema 1 se demuestra con la siguiente proposición.

Proposición 1: La función continua y diferenciable

$$V = \frac{1}{3}|x_2|^3 + k_1^2 s_1 x_2 + 2\frac{2}{3}k_1^3 |s_1|^{3/2}, \quad (9)$$

donde $s_1 = \mu_f x_1 + \mu_u [x_1]^{5/2}$, es una función de Lyapunov global para el sistema retroalimentado y la derivada \dot{V} de la función de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema satisface

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -a_{22}\mu_f |s_{f2}| - k_1^4 \mu_f |s_{1l}| - b_{22}\mu_u |s_{f2}|^{5/8} \\ &\quad - \frac{5}{2}k_1^2 \mu_u b_{21} |x_1|^{3/2} |s_{1l}|, \end{aligned} \quad (10)$$

donde $a_{22} = k_2 - \rho - 2k_1^2$, $b_{22} = k_3 - \rho_u - 2k_1^2 \frac{5}{2} \mu_u \frac{5}{8}$, y $b_{21} = k_1^2 - 2\frac{3}{8}\mu_u^{-1}$.

Demostración: Primero se demuestra que la función de Lyapunov es definida positiva. De Lema 1 (véase el Apéndice), podemos deducir fácilmente que

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2}{3}\gamma_l^{3/2} |s_1|^{3/2} + \frac{1}{3}\gamma_l^{-3} |x_2|^3\right) &\leq |s_1| |x_2| \\ &\leq \frac{2}{3}\gamma_u^{3/2} |s_1|^{3/2} + \frac{1}{3}\gamma_u^{-3} |x_2|^3. \end{aligned}$$

Entonces, la función de Lyapunov puede ser acotada como

$$a_{11}|s_1|^{3/2} + a_{12}|x_2|^3 \leq V \leq b_{u1}|s_1|^{3/2} + b_{u2}|x_2|^3$$

donde $a_{11} = \frac{2}{3}k_2^2(2k_1 - \gamma_l^{3/2})$, $a_{12} = \frac{1}{3}(1 - k_1^2\gamma_l^{-3})$, $b_{u1} = \frac{2}{3}k_2^2(k_1 + \gamma_u^{3/2})$, $b_{u2} = \frac{1}{3}(1 + k_1^2\gamma_u^{-3})$. La función de Lyapunov es definida positiva si $a_{11} > 0$ y $a_{12} > 0$, es decir, si

$$\frac{2}{3}k_2^2(k_1 - \gamma_l^{3/2}) > 0, \quad \frac{1}{3}(1 - k_1^2\gamma_l^{-3}) > 0.$$

Observamos que γ_l siempre existe si $(2k_1)^2 > k_l^2$. Por lo tanto, la función de Lyapunov es definida positiva, decreciente y la positividad definida no depende del valor de k_1 . En segundo lugar, se muestra que la entrada de control propuesta en lazo cerrado con el sistema dinámico hace que el origen sea un punto de equilibrio asintóticamente estable. Tomando la derivada de tiempo de V a lo largo de las trayectorias del sistema (1), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s_2(f + gu + w(x, t)) + k_1^2(x_2 + k_1[s_1]^{1/2})\dot{s}_1 \\ &\quad + k_1^3[s_1]^{1/2}\dot{s}_1, \end{aligned}$$

donde $s_2 = [x_2]^2 + k_1^2 s_1$ y $\dot{s}_1 = \frac{\partial s_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 = (\mu_f + \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2})x_2$. Definiendo $s_{2l} = x_2 + k_1[s_1]^{1/2}$, se puede observar que s_{2l} y s_2 definen la misma curva $x_2 = -k_1[s_1]^{1/2}$ cuando $s_{2l} = s_2 = 0$. Tomando en cuenta esto

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= s_2(f + gu + w(x, t)) + k_1^2 s_{2l}(\mu_f + \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2})x_2 \\ &\quad + k_1^3 [s_1]^{1/2}(\mu_f + \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2})x_2, \end{aligned}$$

Como $x_2 = -k_1[s_1]^{1/2} + s_{2l}$, se obtiene

$$\dot{V} = s_2(v + w(x, t)) + k_1^2 |s_{2l}|^2 (\mu_f + \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2}) - k_1^4 V_1,$$

donde $V_1 = (\mu_f + \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2})|s_1|$. Bajo la Suposición 1 y la entrada de control (8) se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -(k_2 - \rho)\mu_f |s_{f2}| - (k_3 - \rho_u)\mu_u |s_2|^{5/8} \\ &\quad + k_1^2 |s_{2l}|^2 (\mu_f + \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2}) - k_1^4 V_1. \end{aligned}$$

Del Lema 2 (véase el Apéndice) y la desigualdad de Young, se deduce que

$$|x_1|^{5/2} |s_{2l}|^2 \leq 2|x_1|^{3/2} |s_2| \leq 2\left(\frac{3}{8}|x_1|^4 + \frac{5}{8}|s_2|^{5/8}\right), \quad (11)$$

Tomando en cuenta estas desigualdades, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -a_{22}\mu_f |s_2| - b_{22}\mu_u |s_2|^{5/8} - k_1^4 (\mu_f + \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2}) |s_1| \\ &\quad + 2\frac{3}{8}(k_1^2 \frac{5}{2}\mu_u |x_1|^{3/2}) |x_1|^{5/2}, \end{aligned}$$

donde $a_{22} = k_2 - \rho - 2k_1^2$, $b_{22} = k_3 - \rho_u - 2k_1^2 \frac{5}{2} \mu_u \frac{5}{8}$. Definiendo $\varpi_0 = |x_1|^{5/2}/|s_1|$, se observa que $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \varpi_0 = 0$ y $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \varpi_0 = 1/|\mu_f/x_1^{3/2} + \mu_u| = 1/\mu_u$.

Sea $\varpi_0^{\text{máx}} = \text{máx}\{\varpi_0\}$, entonces la derivada \dot{V} satisface (10), con $b_{21} = k_1^2 - 2\frac{3}{8}\mu_u^{-1}$. Finalmente, \dot{V} es siempre definida negativa si $a_{22} > 0$, $b_{22} > 0$ y $b_{21} > 0$. Lo cual es garantizado si las ganancias se eligen como en el Teorema. Además, las funciones $V(x)$ y $\dot{V}(x)$ tiene propiedades de homogeneidad en el bi-límite (Andrieu et. al, 2008).

1) Cuando $\mu_u = 0$, las funciones $V(x)$ y $\dot{V}(x)$ son homogéneas c.r.a los pesos $r_i = \{1, 1/2\}$ con grado de homogeneidad $m_V = \frac{3}{2}$ y $m_{\dot{V}} = 1$. Con esto la función $\kappa_f(x) = -\dot{V}(x)/V^{2/3}(x)$ es homogénea de grado $m_{\kappa_f} = 0$ con pesos $r_i = \{1, 1/2\}$ y la función

$\kappa_f(x)$ puede ser evaluada sobre una esfera homogénea $B_{hf} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2| = 1\}$. Como las funciones V y \dot{V} son continuas sobre una esfera homogénea, $\kappa_f(x)$ alcanza su mínimo sobre el conjunto compacto B_{hf} . Defina $\kappa_{f \min} = \min_{x \in B_{hf}} \kappa_f(x)$ y note que $\kappa_{f \min} > 0$ porque $-\dot{V}_2(x)$ es definida positiva. Esto implica que $-\dot{V}(x)/V^{\frac{2}{3}}(x) \geq \kappa_{f \min}$, y

$$\dot{V} \leq -\kappa_{f \min} V^{\frac{2}{3}}(x), \quad \kappa_{f \min} = \min_{x \in B_{hf}} \{[a_{22}\mu_f |sf_2| + k_1^4 \mu_f |x_1|^{\frac{2}{3}}]/V^{\frac{2}{3}}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

con $s_2 = [x_2]^2 + k_1^2 \mu_f x_1$.

- 2) Cuando $\mu_f = 0$, las funciones $V(x)$ y $\dot{V}(x)$ son homogéneas c.r.a los pesos $r_i = \{1, 5/4\}$, con grados $m_V = \frac{15}{4}$ y $m_{\dot{V}} = 4$. Respectivamente, la función $\kappa_u(x) = -\dot{V}(x)/V^{\frac{16}{15}}(x)$ es homogénea de grado $m_{\kappa_u} = 0$ con pesos $r_i = \{1, 5/4\}$ y $\kappa_u(x)$ se puede evaluar sobre una esfera homogénea $B_{hu} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1|^{\frac{15}{4}} + |x_2|^3 = 1\}$. Entonces,

$$\dot{V} \leq -\kappa_{u \min} V^{\frac{16}{15}}, \quad \kappa_{u \min} = \min_{x \in B_{hu}} \{[b_{22}\mu_u |s_2|^{\frac{8}{5}} + \frac{5}{2} k_1^2 b_{21}\mu_u |x_1|^4]/V^{\frac{16}{15}}\},$$

$\forall x \in \mathbb{R}^2$, con $s_2 = [x_2]^2 + k_1^2 \mu_u [x_1]^{\frac{5}{2}}$.

De esto se deduce que \dot{V} (10) puede ser acotada por una función de V . Luego, a partir del Corolario 1, existe una constante κ_{\min} tal que

$$a_{22}\mu_f |sf_2| + k_1^4 \mu_f |s_{1l}| + b_{22}\mu_u |sf_2|^{\frac{8}{5}} + \frac{5}{2} k_1^2 \mu_u b_{21} |x_1|^{\frac{3}{2}} |s_{1l}| \geq \kappa_{\min} (\mu_f V^{\frac{2}{3}} + \mu_u V^{\frac{16}{15}}),$$

y se puede establecer que

$$\dot{V} \leq -\kappa_{\min} (\mu_f V^{\frac{2}{3}} + \mu_u V^{\frac{16}{15}}). \quad (12)$$

El primer término del lado derecho de la desigualdad caracteriza la estabilidad en tiempo finito. El segundo término caracteriza la propiedad de convergencia en tiempo fijo a una vecindad del origen (Cruz Zavala et. al, 2012). En conclusión, ambos términos caracterizan la propiedad en tiempo fijo. ■

La siguiente Proposición da una estimación del tiempo de convergencia.

Proposición 2: La ley de control (8) en lazo cerrado con el sistema dinámico (2) fuerza a las trayectorias a converger al origen antes de una constante de tiempo fijo

$$T_u(\varpi) = \frac{3}{\kappa_{\min} \mu_f} \varpi^{\frac{1}{3}} + \frac{15}{\kappa_{\min} \mu_u} \varpi^{-\frac{1}{15}}, \quad (13)$$

donde κ_{\min} es una constante que depende de (k_1, k_2, k_3) y ρ, ρ_u .

Demostración: Es inmediata de (12). Como V satisface ambas desigualdades diferenciales $\dot{V}(x) \leq -\kappa_{\min} \mu_f V^{\frac{2}{3}}(x)$ y $\dot{V}(x) \leq -\kappa_{\min} \mu_u V^{\frac{16}{15}}(x)$, el valor de V esta por debajo de la solución de cualquiera de las dos desigualdades. La solución de la desigualdad diferencial $\dot{v} = -\kappa_{\min} \mu_f v^{\frac{2}{3}}$, $v(0) = v_0 \geq 0$ esta dada por

$$v(t) = (v_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \kappa_{\min} \mu_f t)^3.$$

La solución de la desigualdad diferencial $\dot{v} = -\kappa_{\min} \mu_u v^{\frac{16}{15}}$, $v(0) = v_0 \geq 0$ esta dada por

$$v(t) = (v_0^{-\frac{1}{15}} + \frac{1}{15} \kappa_{\min} \mu_u t)^{-15}.$$

Del principio de comparación (Khalil, 2002), para $V_0 = V(x_0)$, la solución $V(t)$ satisface $V(t) \leq \min\{V_f, V_u\}$, donde $V_f = (V_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \kappa_{\min} \mu_f t)^3$ y $V_u = (V_0^{-\frac{1}{15}} + \frac{1}{15} \kappa_{\min} \mu_u t)^{-15}$. Finalmente, el tiempo de convergencia se estima como sigue: primero se calcula el tiempo de convergencia T_2 de cualquier trayectoria con condición inicial x_0 asociada a una curva de nivel V_0 , en el cual la trayectoria llega al conjunto de nivel $V_f(x) = \varpi$ (para alguna $0 < \varpi < V_0$). Después, se calcula el tiempo $T_1(\varpi)$, en el cual la trayectoria converge a $x = 0$ cuando inicia del conjunto de nivel $V_f = \varpi$. Entonces, cualquier trayectoria llega al origen dentro de un tiempo $T(x_0, \varpi) = T_1(\varpi) + T_2(x_0, \varpi)$, el cual esta uniformemente acotado por la constante $T_u(\varpi)$. ■

Comentario 1: El controlador tiene un termino que es discontinuo en el conjunto $[x_2]^2 + k_1^2 s_1 = 0$. De hecho, el controlador es discontinuo también en el conjunto $x_2 + k_1 [s_1]^{\frac{1}{2}} = 0$. En este sentido, ambos conjunto son discontinuos cuando $x_2 = -k_1 [s_1]^{\frac{1}{2}}$ y definen la misma curva. Este conjunto se puede entender como un modo deslizante que asegura convergencia en tiempo fijo de las trayectorias del sistema.

Comentario 2: En el caso $\mu_u = 0$, se recupera el control discontinuo $v = -k_2 \text{sign}([x_2]^2 + k_1^2 x_1)$, que es discontinuo en el conjunto $[x_2]^2 + k_1^2 x_1 = 0$, es decir, cuando $x_2 = -k_1 [x_1]^{1/2}$. El controlador $v = -k_2 \text{sign}(x_2 + k_1 [x_1]^{1/2})$, reportado en (Levant, 2007), también es discontinuo en el mismo conjunto. La diferencia es que el controlador propuesto se obtiene a través de una función de Lyapunov. Para este caso, las ganancias se seleccionan como $k_1 > 0$ y $k_2 > 2k_1^2 + \rho$, las cuales siempre aseguran que las trayectorias llegan a la superficie deslizante (Levant, 2007).

VI. EJEMPLO ACADÉMICO

El primer término del lado derecho de la desigualdad caracteriza la estabilidad en tiempo finito. El segundo término caracteriza la propiedad de convergencia en tiempo. Esta sección esta dedicada a mostrar el desempeño del controlador propuesto para controlar un sistema híbrido con dwell time estrictamente positivo. Para ello, se considera un sistema lineal híbrido modelado por la ecuación $\dot{x} = A_q x + b(u + w(t))$, donde $x \in \mathbb{R}^2$ es el estado continuo, $q \in [1, 2]$ es el estado discreto que indexa a los subsistemas

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tanto A_1 como A_2 son inestables, $b = [0 \ 1]^T$, $w(t) = 0,5 \sin(2t) + 0,5 \cos(5t)$ y la entrada de control u esta dada por (14). Se considera que la dinámica del sistema conmuta cada 4 segundos.

La tarea de control es estabilizar el origen $x = 0$ del sistema en tiempo fijo. Se asume que existe un observador que brinda la estimación exacta de los estados. Si solo x_1 se mide, las parejas $[C, A_1]$ y $[C, A_2]$ son observables con respecto al vector de salida $C = [1 \ 0]$. Entonces, es posible diseñar un diferenciador uniforme (Cruz Zavala et. al, 2011), el cual da la estimación exacta de los estados en menos de un segundo. Por lo tanto, se puede encender el controlador después de un segundo. Para la simulación se han tomado condiciones iniciales $x(0) = [1,5 \ 1]^T$ y tiempo de muestreo $\tau = 0,001$. Se han comparado tres tipos de controladores

1. el CTF propuesto (8) con parámetros $\mu_f = 2$, $\rho = 1$, $\mu_u = 2$, $k_1 = 1$ y $k_3 = k_2 = 4k_1^2 + \rho$.
2. el CTF propuesto en (Polyakov, 2012) (CTFP), $u = u_{eq} + v$, donde $u_{eq} = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2$ y

$$v = \frac{\alpha_1 + 3\beta_1 y_1^2 + 2\rho}{2} \text{sign}(s) - [\alpha_2 s + \beta_2 |s|^3]^{1/2},$$

$$s = x_2 + [|x_2|^2 + \alpha_1 x_1 + \beta_1 |x_1|^3]^{1/2},$$

donde $\frac{\alpha_1}{2} = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{2} = \beta_2 = \frac{64}{T_{\max}^2}$ y $T_{\max} = 3$.

3. el controlador uniforme de primer orden (CUPO) reportado en (Cruz Zavala et. al, 2012). Las superficies deslizantes se han diseñado como $s_{A_1} = x_2 + x_1 + 0,5|x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1)$ y $s_{A_2} = x_2 + 2x_1 + |x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1)$ y el controlador está dado por

$$u = u_{eqAi} + v, \quad (14)$$

$$u_{eqAi} = -[-c_1 a_{12} c_1 + (a_{21} - a_{22} c_1)] x_1$$

$$- (a_{12} c_1 + a_{22}) s_{A_i} + (c_1 a_{12} + a_{22}) c_2 |x_1|^q \text{sign}(x_1)$$

$$- q a_{12} c_2 |x_1|^{q-1} [-c_1 x_1 - c_2 |x_1|^q \text{sign}(x_1) + s_{A_i}], \quad (15)$$

donde $q = 3/2$ y para $i = 1$, se eligieron $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = -1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0,5$ y para $i = 2$, se eligieron $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Finalmente, $v = -Q_0 \text{sign}(s) - K_2 s - K_3 |s|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(s)$, con $Q_0 = 4$, $K_2 = 2$, $K_3 = 1$.

Comentario 3: La estructura del CUPO y del CTFP es un poco más complicada que la estructura del controlador propuesta.

El desempeño de los controladores se muestra en la Fig.1. Solo los controladores de tiempo fijo CTFP y CTF garantizan la convergencia de los estados al origen en tiempo finito, Fig.1.(a) y Fig.1.(b). Aunque la magnitud del control es grande durante la repuestas transitorio en todos los controladores, el CTFP usa mas esfuerzo de control para atraer las trayectorias del sistema, ver Fig.1.(d). El esfuerzo es tan grande que se pueden tener enormes sobrepasos durante la repuesta transitoria en los estados, Fig.1.(b). Lo cual puede deberse a que el diseño de las ganancias sea conservativo para el diseño de la constate de tiempo fijo. Sorprendentemente, el CUPO y el CTF pueden ser sintonizados para tener un comportamiento muy similar, por supuesto, la ventaja del CTF es que la convergencia al origen es en tiempo finito.

VII. CONCLUSIONES

Se ha introducido un nuevo controlador discontinuo que proporciona convergencia tiempo fijo durante el modo deslizante. En lugar de diseñar la variedad deslizante y la entrada de control discontinua por el CMD estándar, el diseño del controlador discontinuo propuesto está basado en una función de Lyapunov para el sistema dinámico en lazo cerrado. La función de Lyapunov nos permite caracterizar las propiedades de estabilidad de las trayectorias del sistema en lazo cerrado y estimar el tiempo de convergencia.

El controlador propuesto es insensible a las perturbaciones acopladas que cumplan la Suposición 1. De hecho, solo se necesita conocer las cotas superiores de las incertidumbres/perturbaciones. La estructura de entrada de control es mucho más simple que la reportada en (Polyakov, 2012). Por otra parte, la magnitud de control es menor que el utilizado por (Polyakov, 2012) garantizando el mismo desempeño deseado.

Las ganancias se obtienen de forma explícita. Sin embargo, son sólo una condición suficiente para garantizar la estabilidad de tiempo finito.

VIII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero del CONACyT grant 132125 y CVU 267513, PAPIIT, UNAM, grants IN111012, IN113613 y Fondo de Colaboración del IIFUNAM, IISGBAS-144-2012.

REFERENCIAS

- Andrieu, V., Praly, L. & Astolfi, A., (2008) Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 47 (4), pp. 1814-1850.
- Bacciotti, A. & Rosier, L., (2005) Lyapunov Functions and stability in control theory, 2nd ed, Springer-Verlag, NY, 238 p.
- Bhat, S, and Bernstein, D. (2000) Finite-time stability of continuous autonomous systems, *SIAM J. Control Optim.*, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 38, No. 3, pp. 751-766.

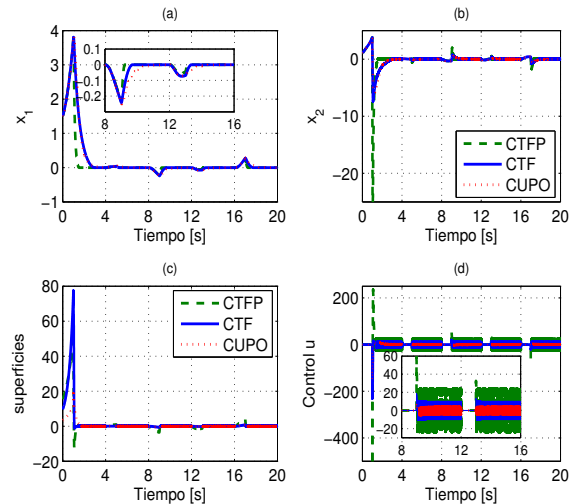


Figura 1. Resultados de simulación

- Bhat, S.P. and Bernstein, D.S., *Geometric homogeneity with applications to finite-time stability*, *Math. of Control Signals Systems*, vol. 17, 2005, pp. 101-127.
- Cruz Zavala, E., Moreno, J.A. & Fridman, L.(2011) Uniform Robust Exact Differentiator, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, No.11, pp. 2727-2733.
- Cruz Zavala, E., Moreno, J.A. & Fridman, L. (2012). Uniform sliding mode controllers and uniform sliding surfaces, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, doi:10.1093/imamci/dns005
- Davila, J., Fridman, L. & Levant, A. (2005) Second-Order Sliding- Modes Observer for Mechanical Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, No. 11, pp. 1785–1789.
- Feng, Y., Yu, X. & Man, Z. (2002). Nonsingular terminal sliding mode control of rigid manipulators, *Automatica*, vol. 38, pp. 2159-2167.
- Filippov, A.F. (1988) *Differential equations with discontinuous right hand side*, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 304 p.
- Hahn, W. (1967) *Stability of Motion*. Berlin, Springer-Verlag.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. & Pólya, G. (1951) *Inequalities*, London, Cambridge University Press.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Third ed. Prentice–Hall. Upper Saddle River, New Jersey. 750 p.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to higher-order sliding mode design, *Automatica* 41, pp. 823–830.
- Levant, A. (2007) Construction Principles of 2-sliding mode design, *Automatica*, 43, pp. 576–586.
- Man, Z., Paplinski, A. P. & Wu, H. R. (1994). A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 2464-2468.
- Moreno, J.A., Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms, in *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*; L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte, Eds. LNCIS, 412, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011, pp. 113–150.
- Polyakov, A., (2012) Fixed-Time Stabilization of Linear Systems via Sliding Mode Control. *12th IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, VSS'12*, January 12-14, Mumbai, 2012.
- Utkin, V.I., *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992, 286 p.
- Wu, Y., Yu, X. & Man, Z. (1998). Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems, *Syst. Control Lett.*, vol. 34, pp. 281-287.
- Yang, L. & Yang, J., Nonsingular fast terminal sliding-mode control for dynamical systems, *Int. J. Robust. Nonlinear Control*, 21 (16), pp. 1865–1879.
- Yu, X. & Man, Z. ,(2002) Fast terminal Sliding Mode Control Design for Nonlinear Dynamical Systems, in *Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49. No. 2, February 2002, pp. 261-264.
- Yu, S., Yu, X., Shirinzadeh, B. & Man, Z. (2005) Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode, *Automatica*, vol. 41, pp. 1957-1964.

homogénea en la bi-limit ϕ tiene una función de aproximación ϕ_0 o ϕ_∞ , la cuales son homogéneas en el sentido estándar con el mismo peso y grado. Para más detalles sobre funciones homogénea en la bi-limit ver (Andrieu et. al, 2008).

APÉNDICE A

Lema 1: (Moreno, 2011) Para cada número real $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 1$, $q > 1$, con $1/p + 1/q = 1$, la siguiente desigualdad se satisface $ab \leq c^p a^p / p + c^{-q} b^q / q$.

Lema 2: Para cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, y p, q números reales mayores a cero, tal que $0 < p \leq q$, se cumple

$$|[x_2]^p + [x_1]^p|^{1/p} \leq 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |[x_2]^q + [x_1]^q|^{1/q}. \quad (16)$$

Corolario 1: (Andrieu et. al, 2008) Sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones homogéneas en el bi-límite con los mismos pesos r_0 y r_∞ , grados $d_{\phi,0}$, $d_{\phi,\infty}$ y $d_{\zeta,0}$, $d_{\zeta,\infty}$ y funciones de aproximación η_0 , ϕ_∞ y ζ_0 , ζ_∞ . Si los grados satisfacen $d_{\phi,0} \geq d_{\zeta,0}$ y $d_{\phi,\infty} \leq d_{\zeta,\infty}$ y las funciones ζ , ζ_0 y el ζ_∞ son positivas definidas, entonces existe un número real positivo λ que satisface

$$\phi(x) \leq \lambda \zeta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Básicamente, las funciones ϕ_0 o ϕ_∞ son aproximaciones de ϕ cerca de cero y cerca del infinito. Si una función