

# Estimación de la Orientación de un Cuerpo Rígido: Estudio Experimental Comparativo

E. Rosario-Gabriel, H. Rodríguez-Cortés, M. Velasco-Villa  
CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección de Mecatrónica.  
Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, México, D.F.  
E-mail: {erosario, hrodriguez, velasco}@cinvestav.mx

**Resumen**— Esta investigación aborda el problema de estimar la orientación de un cuerpo rígido en el espacio, a través de mediciones obtenidas por una unidad de medición inercial IMU basada en tecnología MEMS. Los esquemas de estimación abordados son los métodos algebraicos TRIAD y QUEST, métodos estocásticos basados en el filtro de Kalman y observadores no lineales tales como el filtro complementario y un filtro basado en la teoría de Inmersión e Invarianza. El objetivo principal es evaluar y comparar estas técnicas de estimación desde el punto de vista de tiempo de procesamiento y exactitud, por medio de su implementación en un procesador digital de señales.

**Palabras clave:** Estimación de Orientación, Filtro de Kalman, Sensores Inerciales.

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de estimar la orientación de un cuerpo rígido basado en sensores inerciales ha sido estudiado extensamente en la literatura de control, ingeniería aeroespacial y robótica. La reciente proliferación de Acelerómetros, Giroscopios y Magnetómetros basados en la tecnología de sistemas micro-electro-mecánicos (MEMS), conocidos también como MARGs (magnetic, angular rate, and gravity sensor) (Barbour and Schmidt, 2001), ha permitido el desarrollo de unidades de medición inercial (IMU) de bajo costo, de peso reducido y con un mínimo de consumo energético.

El potencial de manufactura de estos dispositivos y el acceso a ellos ha creado una amplia gama de aplicaciones en áreas relacionadas con los sistemas de videojuegos (Hol, Schön and Gustafsson, 2010), los robots cuadrúpedos (Rehbinder and Hu, 2004) y equilibristas, donde la componente clave es conocer la orientación para tener un control de estabilización (Roberts and Tayebi, 2011b). Los sensores inerciales también se han implementado en vehículos autónomos no tripulados (UAV) de bajo costo ya sean aéreos como helicópteros, aviones y vehículos de despegue y aterrizaje vertical (VTOL) o acuáticos y terrestres como el conocido transportador personal Segway PT. Se han utilizado también en aplicaciones biomédicas para reconstruir el movimiento humano (Luinge and Veltink, 2004). Paralelo al trabajo desarrollado en robótica y control existe una literatura significativa referente a sistemas de orientación y rumbo (AHRS) para aplicaciones aeroespaciales (Gebregziabher, Hayward and Powell, 2004), tal como el control de orientación de nanosatélites y telescopios espaciales. Como se puede ver, las aplicaciones son vastas y conocer la orientación es un requerimiento clave para el control de diferentes aplicaciones.

Sin embargo, los sensores inerciales basados en tecnología MEMS son caracterizados por un alto nivel de ruido, así como un término de desviación variante en el tiempo conocido como *bias* (El Hadri and Benallegue, 2009), por lo tanto, el problema de la estimación de la orientación de un cuerpo rígido en el espacio es de naturaleza no lineal y necesita ser resuelto por métodos adecuados que puedan ser implementados en procesadores embebidos con limitados recursos de procesamiento.

El problema de estimación de la orientación junto con el ruido en las mediciones se ha traducido en el desarrollo de diversas técnicas de estimación que se pueden clasificar en tres principales grupos: **a)** Los métodos algebraicos, donde se encuentran el método TRIAD (Kim, Kim, Rho and BLACK, 1964), el método-Q (Wertz, 1978) y el método QUEST (Shuster and Oh, 1981) con sus respectivas variaciones. **b)** Los métodos estocásticos, donde se encuentra el filtro de Kalman en sus diferentes versiones (Kalman et al., 1960), (Marins, Yun, Bachmann, Mcghee and Zyda, 2001). **c)** Los observadores no lineales (Roberts and Tayebi, 2011a), como los filtros complementarios (Mahony, Hamel and Pfimlin, 2008) y los métodos basados en el esquema de Inmersión e Invarianza (Estrada-Sanchez, Rodriguez-Cortes and Velasco-Villa, 2008).

De acuerdo al estudio hecho por Crassidis, Markley and Cheng (2007), el filtro de Kalman (KF) sigue siendo la técnica más utilizada en la práctica para estimar la orientación, pero durante la última década nuevos observadores no lineales propuestos han permitido hacer un mejor uso de la dinámica del sistema en el proceso de estimación, logrando resultados competitivos con respecto a los métodos convencionales.

En este trabajo se lleva a cabo la implementación de los algoritmos descritos anteriormente con el objetivo de comparar, por una parte, los tiempos de cálculo que cada uno de estos métodos consume en un sistema embebido basado en un procesador digital de señales de 32 bits a 150 MHz, y por otra parte, evaluar la eficiencia de los métodos presentados mediante su comparación a través de un índice de desempeño dado por la norma  $L_2$ .

El resto del artículo se organiza en la siguiente forma. En la Sección 2 se describen las ecuaciones de la cinemática rotacional de un cuerpo rígido en sus diferentes parametrizaciones, y se presentan los modelos de las mediciones de los sensores inerciales. En la Sección 3 se describen los fundamentos teóricos de los métodos de estimación abordados. En la sección 4 se describe el desarrollo de los resultados experimentales y finalmente en la Sección 5 se

presentan las conclusiones.

## II. PRELIMINARES

### II-A. Notación

Independientemente de qué método se use para estimar la orientación de un cuerpo rígido, este puede representarse como una transformación lineal entre un marco de referencia fijo o inercial  $\{i\}$  y un marco de referencia cuerpo o móvil  $\{b\}$ , tal que un vector  $x_b \in \mathbb{R}^3$  en el marco  $\{b\}$  puede ser transformado al marco  $\{i\}$  mediante:

$$x_i = R_i^b x_b. \quad (1)$$

Asumiendo que cada marco está definido por tres vectores unitarios ortogonales  $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i\}$  y  $\{\hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b\}$ , la orientación de  $\{b\}$  con respecto a  $\{i\}$  esta determinada por  $R_i^b \in \mathbf{SO}(3)$ , donde  $\mathbf{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : RR^T = R^T R = I, \det(R) = 1\}$  es el grupo especial ortogonal que corresponde al conjunto de todas las matrices de rotación.

En los esquemas que abordaremos para estimar la orientación se consideran los siguientes operadores e identidades. Sea  $\Omega = [p, q, r]^T \in \mathbb{R}^3$  el vector de velocidad angular de  $\{b\}$  relativo a  $\{i\}$ , entonces definimos el operador:

$$\mathbf{S}(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(3), \quad (2)$$

donde,  $\mathfrak{so}(3) = \{U \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : U^T = -U\}$  es el espacio de matrices antisimétricas de  $3 \times 3$ . Para cualquier  $v \in \mathbb{R}^3$  entonces,  $\mathbf{S}(\Omega)v = \Omega \times v$  es el vector de producto cruz.

El operador  $\text{vex} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  denota la inversa del operador  $\mathbf{S}(\Omega)$ , es decir,

$$\begin{aligned} \text{vex}(\mathbf{S}(\Omega)) &= \Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{S}(\text{vex}(\mathbf{A})) &= \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \in \mathfrak{so}(3). \end{aligned} \quad (3)$$

### II-B. Representaciones de la orientación

Para representar la orientación de un cuerpo rígido en el espacio, además de las matrices de rotación se consideran los ángulos de Euler, los cuaterniones y la matriz de cosenos directores (DCM). Estas representaciones se describen a continuación.

La matriz de rotación parametrizada con los ángulos de Euler obtenida de la secuencia de rotación ZYX esta dada por,

$$R_i^b = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi & c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi c_\theta \\ s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi & -s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde  $[\phi, \theta, \psi] \in \mathbb{R}^3$  corresponden a alabeo, cabeceo y guiñada respectivamente. Una representación por medio de la DCM toma la forma,

$$DCM = R_B^A = \begin{bmatrix} \hat{x}_b \cdot \hat{x}_i & \hat{x}_b \cdot \hat{y}_i & \hat{x}_b \cdot \hat{z}_i \\ \hat{y}_b \cdot \hat{x}_i & \hat{y}_b \cdot \hat{y}_i & \hat{y}_b \cdot \hat{z}_i \\ \hat{z}_b \cdot \hat{x}_i & \hat{z}_b \cdot \hat{y}_i & \hat{z}_b \cdot \hat{z}_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde  $\hat{x} \cdot \hat{y} = |x||y| \cos(\theta)$  corresponde al producto punto. Considerando que los vectores son unitarios, se tiene que

$\hat{x} \cdot \hat{y} = \cos(\theta_{xy})$ , donde  $\theta_{xy}$  es el ángulo entre los vectores  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ .

La orientación de un cuerpo rígido puede ser también representada por medio de cuaterniones usando un eje de rotación  $\vec{e}$  y un ángulo  $\theta$ , en la forma,

$$\mathbf{q} = [\eta, \epsilon^T]^T = [\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}) \vec{e}]^T \quad (6)$$

con  $\mathbf{q} = [\eta, \epsilon^T]^T \in \mathbb{S}^3$ ,  $\eta$  como parte escalar y  $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$  la parte vectorial, donde  $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \|(x_1, x_2, x_3, x_4)\| = 1\}$  representa la esfera tridimensional. Además de las parametrizaciones descritas anteriormente, existen otras representaciones con distintas características que se pueden consultar en Shuster (1993).

### II-C. Ecuaciones cinemáticas de la orientación

Las ecuaciones cinemáticas que relacionan la orientación con las velocidades angulares de un cuerpo rígido pueden obtenerse usando la representación en ángulos de Euler como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{c_\theta} \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta s_\phi & s_\theta c_\phi \\ 0 & c_\theta c_\phi & -c_\theta s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Con la representación de la DCM se obtiene,

$$\dot{R}_i^b = R_i^b \mathbf{S}(\Omega) = \mathbf{S}(R_i^b \Omega) R_i^b, \quad (8)$$

y mediante la representación en cuaterniones se obtiene la ecuación,

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \Omega \quad (9)$$

donde  $\otimes$  es el producto entre cuaterniones y se considera a  $\Omega$  como un cuaternión puro.

### II-D. Mediciones

Las señales disponibles en la unidad de medición inercial están provistas por los siguientes sensores.

**Giroscopio:** Mide las velocidades angulares  $\Omega_b$  expresadas en el marco  $\{b\}$ , usando el siguiente modelo

$$\Omega_b = \Omega + b_\Omega + \mu_\Omega, \quad \Omega_b \in \mathbb{R}^3, \quad (10)$$

donde  $\Omega$  denota el valor verdadero,  $\mu_\Omega$  corresponde al ruido aditivo de medición y  $b_\Omega$ , representa la constante de desviación (bias).

**Acelerómetro:** Sensa la aceleración lineal instantánea de  $\{b\}$  relativo a  $\{i\}$ , denotada como  $\dot{v}$ , menos la aceleración gravitacional  $g$  expresadas en el marco inercial  $\{i\}$ , esto es,

$$\mathbf{a}_b = R^T(\dot{v} - g) + b_a + \mu_a, \quad \mathbf{a}_b \in \mathbb{R}^3 \quad (11)$$

donde  $\mu_a$  denota el ruido aditivo de medición y  $b_a$  representa la constante de desviación (bias). Normalmente el campo gravitacional  $g = |g_0| \hat{z}_i$ , con  $|g_0| = 9.81$  domina el valor de  $\mathbf{a}_b$  considerando perfiles bajos de aceleración externa que no cambien bruscamente, es decir  $\dot{v} \approx 0$ . En este caso es común usar

$$\mathbf{v}_a = \frac{a_b}{|a_b|} \approx -R^T \hat{z} \quad (12)$$

como un estimado del eje inercial  $\hat{z}_i$  expresado en el marco  $\{b\}$ . Sin embargo, es importante mencionar que cuando la

aceleración externa es considerable, la aproximación no es eficiente, teniendo errores más grandes en la estimación (Lee, Park and Robinovitch, 2012).

*Magnetómetro*: Proporciona medidas del campo magnético  $\mathbf{m}_b$ , en la forma

$$\mathbf{m}_b = R^T m_i + B_m + \mu_m, \quad \mathbf{m}_b \in \mathbb{R}^3 \quad (13)$$

donde  $m_i$  representa el campo magnético de la tierra expresado en  $\{i\}$ ,  $B_m$  corresponde a la perturbación magnética local en  $\{b\}$  y  $\mu_m$  al ruido de medición. Sólo la dirección del campo magnético es relevante para la estimación de la orientación,

$$\mathbf{v}_m = \frac{m_b}{|m_b|}. \quad (14)$$

### III. MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

Los métodos de estimación que serán evaluados se describen a continuación.

*Método TRIAD*: Presentado por Kim et al. (1964), este método está basado en vectores unitarios  $m_b$ ,  $a_b$  medidos por el magnetómetro y el acelerómetro en el marco  $\{b\}$  y vectores  $m_i$ ,  $a_i$  calculados por modelos matemáticos en el marco  $\{i\}$ . Consiste en construir dos tríadas de vectores unitarios ortogonales,

$$\begin{aligned} t_{1b} &= a_b, & t_{1i} &= a_i \\ t_{2b} &= \frac{a_b \times m_b}{|a_b \times m_b|}, & t_{2i} &= \frac{a_i \times m_i}{|a_i \times m_i|} \\ t_{3b} &= t_{1b} \times t_{2b}, & t_{3i} &= t_{1i} \times t_{2i} \end{aligned} \quad (15)$$

para estimar en cada iteración  $k$  la matriz de rotación  $R_i^b$ ,

$$R_i^b(k) = [t_{1b}, t_{2b}, t_{3b}][t_{1i}, t_{2i}, t_{3i}]^T. \quad (16)$$

Este método construye la orientación de manera algebraica, por lo que el ruido presente en las mediciones afectará de igual forma a las estimaciones.

*Método QUEST (QUaternion ESTimator)*: Presentado por Shuster and Oh (1981), es una aproximación eficiente del método-Q (Wertz, 1978) que está basado en el problema de optimización conocido como el problema de Wahba (Wahba, 1965). Se considera la siguiente función de costo a minimizar,

$$J(R_b^i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \rho_k |v_{kb} - R_b^i v_{ki}|^2 \quad (17)$$

donde  $\rho_k$  es una constante de ponderación y  $v_{kb}$ ,  $v_{ki}$  corresponden al  $k$ -ésimo vector medido en el marco  $\{b\}$ ,  $\{i\}$  respectivamente.

El problema de optimización representado por (17) puede ser transformado en un problema de valores propios  $Kq = \lambda q$  reescribiendo  $R_b^i$  en función de cuaterniones  $R_b^i = (\eta^2 - \epsilon^T \epsilon)I_3 + 2\epsilon \epsilon^T - 2\eta \mathbf{S}(\epsilon)$ . El método-Q involucra resolver directamente el problema de valor-vector propio de una matriz de  $4 \times 4$ , usando por ejemplo el algoritmo QR (Francis algorithm), lo cual representa una desventaja cuando se desea implementar este método en un sistema

embebido debido al alto costo computacional. Sin embargo, el método QUEST considera la aproximación

$$\lambda_{opt}(K) \approx \sum_{k=1}^N \rho_k \quad (18)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  esta definida como

$$K = \begin{bmatrix} S - \sigma I & Z \\ Z^T & \sigma \end{bmatrix} \quad (19)$$

con,

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^N \rho_k (v_{kb} v_{ki}^T), & S &= B + B^T, & \sigma &= \text{tr}[B] \\ Z &= [B_{23} - B_{32}, B_{23} - B_{32}, B_{23} - B_{32}]^T \end{aligned} \quad (20)$$

La orientación óptima está representada por el vector propio de la matriz  $K$  que corresponde al valor propio máximo, es decir,

$$\lambda_{opt}(K) = \max_i \{\lambda_i(K)\}. \quad (21)$$

El vector propio se obtiene a través de los parámetros de Rodriguez,  $[(\lambda_{opt} + \sigma)1 - S]p = Z$ , donde el cuaternión estimado corresponde a,

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{p}^T \mathbf{p}}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

*Filtro de Kalman*: En el filtro de kalman se consideran dos modelos: la dinámica del sistema afectada por ruido del proceso  $\zeta_k$  y el modelo de medición que muestrea las salidas de los sensores afectados por un ruido de medición  $\xi_k$ . Estos modelos están dados por,

$$x_k = A x_{k-1} + B u_k + H_{k-1} \zeta_{k-1} \quad (23)$$

$$y_k = C x_k + \xi_{k-1}. \quad (24)$$

Existen dos enfoques para el diseño del filtro de Kalman (Yun and Bachmann, 2006), (Marins et al., 2001). El primero de ellos considera siete estados  $x_k = [p, q, r, \eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$  y nueve salidas  $y_k = [p, q, r, a_x, a_y, a_z, m_x, m_y, m_z]^T$  lo que resulta en ecuaciones extensas dificultando su implementación. El segundo enfoque considera  $\Omega = [p, q, r]^T$  como parámetros variantes en el tiempo de la matriz  $A$  en (23), produciendo un sistema lineal variante en el tiempo con vector de estados  $x_k = [\eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$ . Se utiliza el algoritmo QUEST para calcular un cuaternión instantáneo para cada iteración el cual es considerado como parte de las mediciones del filtro de kalman, reduciendo así el vector de medición de nueve a siete estados  $y_k = [p, q, r, \eta, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$  simplificando notablemente el diseño del filtro. Los modelos de proceso y medición discretizados toman respectivamente la forma,

$$x_{k+1} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{h} & -p_k & -q_k & -r_k \\ p_k & \frac{2}{h} & r_k & -q_k \\ q_k & -r_k & \frac{2}{h} & p_k \\ r_k & q_k & -p_k & \frac{2}{h} \end{bmatrix} x_k + h \begin{bmatrix} \zeta_{\eta k} \\ \zeta_{\epsilon_1 k} \\ \zeta_{\epsilon_2 k} \\ \zeta_{\epsilon_3 k} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$y = [I_4] [p_k \ q_k \ r_k \ \eta_k \ \epsilon_{1k} \ \epsilon_{2k} \ \epsilon_{3k}]^T + \begin{bmatrix} \xi_{r_k} \ \xi_{q_k} \ \xi_{r_k} \ \xi_{\eta_k} \ \xi_{\epsilon_{1k}} \ \xi_{\epsilon_{2k}} \ \xi_{\epsilon_{3k}} \end{bmatrix}^T. \quad (26)$$

Aplicando el algoritmo de Kalman, con su etapa de predicción y actualización, considerando las variables aleatorias  $\zeta_i$  y  $\xi_i$  con distribución gaussiana, varianza  $\sigma^2 > 0$  y media  $\mu = 0$  podemos estimar la orientación a partir del algoritmo,

---

**Algoritmo 1** Filtro de Kalman

---

**Entrada:**  $P_{0,0} = \text{var}(x_0)$ ,  $\hat{x}_0 = E(x_0)$   
**Salida:**  $\hat{x}_{k|k}$  Vector de estados estimados.

- 1: **for**  $k = 1, 2, \dots$  **do**
  - 2:  $P_{k|k-1} = A P_{k-1|k-1} A^T + H_{k-1} Q_{k-1} H_{k-1}^T$
  - 3:  $\hat{x}_{k|k-1} = A \hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1} u_{k-1}$
  - 4:  $G_k = P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R_k)^{-1}$
  - 5:  $P_{k|k} = [I - G_k C] P_{k|k-1}$
  - 6:  $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + G_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1})$
  - 7: **end for**
- 

*Fusion Sensorial:* Este esquema fusiona las mediciones del giroscopio y del acelerómetro a través del filtro de Kalman (Suh, 2003) para estimar los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  integrando las velocidades angulares  $\Omega = [p, q, r]^T$ , esto es,

$$\phi = \int_0^t p(t) dt, \quad \phi_{k+1} = \phi_k + h p(t) \quad (27)$$

$$\theta = \int_0^t q(t) dt, \quad \theta_{k+1} = \theta_k + h q(t) \quad (28)$$

y corrigiendo tales estimaciones a través del modelo de medición,

$$\phi_k = y_{\phi_{k+1}} = \arctan\left(\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_z^2}}\right) \quad (29)$$

$$\theta_k = y_{\theta_{k+1}} = \arctan\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_y^2 + a_z^2}}\right) \quad (30)$$

que usa las mediciones del acelerómetro  $a_b = [a_x, a_y, a_z]^T$  y donde  $h$  corresponde al tiempo de integración. Usando el filtro de Kalman podemos fusionar ambos sensores con los modelos de proceso y de medición para  $\phi$ ,  $\theta$  en la forma,

$$\phi_{k+1} = \phi_k + h p_k - h \zeta_{\phi_k}, \quad y_{\phi_{k+1}} = \phi_k + \xi_{\phi_k} \quad (31)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + h q_k - h \zeta_{\theta_k}, \quad y_{\theta_{k+1}} = \theta_k + \xi_{\theta_k} \quad (32)$$

donde las mediciones del giroscopio nos proporcionan un estimado del ángulo mediante el modelo del proceso  $\hat{x}_{k|k-1} = A \hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1} u_{k-1}$ . Por otro lado con la ganancia de Kalman  $G_k$  y el modelo de medición dado por el acelerómetro, ver (29) y (30), es posible actualizar el vector de estados  $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + G_k (y_k - C \hat{x}_{k|k-1})$  para estimar  $\phi$ ,  $\theta$  eliminando el efecto del ruido gaussiano.

*Filtros Complementarios:* En los filtros complementarios no lineales el objetivo en la estimación de la orientación es proporcionar un conjunto de dinámicas para estimar  $\hat{R}(t) \in \mathbf{SO}(3)$ , de tal forma que el error de rotación  $\tilde{R}(t)$  satisfaga  $\tilde{R}(t) \rightarrow I_3$ . En la cinemática del observador representada por (8), ahora se incluye un término de predicción basado en las mediciones de  $\Omega_b$  y un término de innovación o corrección  $\varrho = \text{vex}(\mathbb{P}_a(\hat{R}))$ , donde el operador  $\mathbb{P}_a(\cdot)$

devuelve la parte antisimétrica de una matriz, formulando así dos filtros complementarios de la forma:

Filtro Complementario Directo.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{R}} &= \mathbf{S}(R_y(\Omega_b - \hat{b}) + k_p \hat{R} \varrho) \hat{R}, \quad \hat{R}(0) = \hat{R}_0 \\ \dot{\hat{b}} &= -k_i \varrho, \quad \hat{b}(0) = \hat{b}_0 \end{aligned} \quad (33)$$

Filtro Complementario Pasivo.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{R}} &= \hat{R} \mathbf{S}(\Omega_b - \hat{b} + k_p \varrho) \hat{R}, \quad \hat{R}(0) = \hat{R}_0 \\ \dot{\hat{b}} &= -k_i \varrho, \quad \hat{b}(0) = \hat{b}_0 \end{aligned} \quad (34)$$

donde  $\hat{R}$  denota un estimado de la matriz de rotación  $R_b^i$ , el error de rotación esta definido como  $\tilde{R}(t) = \hat{R}^T R$  y  $k_p, k_i > 0$  deben ser ganancias positivas.  $R_y$  representa un muestreo algebraico instantáneo de  $R_b^i$  construido a través de los vectores  $\mathbf{v}_a$  y  $\mathbf{v}_m$  dados en (12), (14) en la forma

$$R_y = \min(\lambda_1 |v_a - R \mathbf{v}_a|^2 + \lambda_2 |v_m - R \mathbf{v}_m|^2) \approx R_b^i \quad (35)$$

donde,  $v_a$  y  $v_m$  corresponden al vector del campo gravitacional y al campo magnético en el marco inercial  $\{i\}$  donde los datos son adquiridos.

*Filtro basado en Inmersión e Invarianza:* Este enfoque esta basado en los desarrollos presentados en (Estrada-Sanchez et al., 2008) y sus ecuaciones principales se describen en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{r}_3 &= \mathbf{S}(\Omega_b) r_3 + \xi \\ \dot{\nu} &= -r_3 + \dot{\nu} + \mu_a \\ y &= \nu \end{aligned} \quad (36)$$

donde  $r_3$  corresponde a la tercera columna de la matriz de rotación que representa la dirección del eje  $\hat{z}$ ,  $\xi$  representa una desviación que varia lentamente de la dinámica real de  $r_3$ ,  $\nu$  representa la integral de la aceleración  $a_b$ ,  $\dot{\nu} = [a_x, a_y, a_z]^T$  y  $\mu_a$  corresponde a una desviación de la aceleración. Hay que notar que las desviaciones  $\xi$  y  $\mu_a$  se pueden ver como los ruidos de proceso y medición respectivamente.

Aplicando el enfoque de Inmersión en Invarianza (Astolfi, Karagiannis and Ortega, 2008) es posible obtener el siguiente sistema que estima el vector  $\hat{r}_3$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}_3 &= \mathbf{S}(\Omega_b)(\hat{r}_3 - \beta_1) + \bar{\xi} \tanh(\hat{\xi} + \beta_2) \\ &+ \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu} (-\hat{r}_3 + \beta_1 + \bar{\mu}_a \tanh(\hat{\mu}_a + \beta_3)) \\ \dot{\hat{\xi}} &= -\frac{\partial \beta_2}{\partial \nu} (-\hat{r}_3 + \beta_1 + \bar{\mu}_a \tanh(\hat{\mu}_a + \beta_3)) \\ \dot{\hat{\mu}}_a &= -\frac{\partial \beta_3}{\partial \nu} (-\hat{r}_3 + \beta_1 + \bar{\mu}_a \tanh(\hat{\mu}_a + \beta_3)) \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $\bar{\mu}_a$  y  $\bar{\xi}$  son contantes,  $\beta_i$  son funciones de las mediciones tomadas por el acelerómetro en la forma  $\beta_i = \gamma_i \nu$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}^+$ . Finalmente, las derivadas parciales  $\frac{\partial \beta_i}{\partial \nu}$  se proponen como  $\frac{\partial \beta_i}{\partial \nu} = \text{diag}\{\gamma_i\}$ ,  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

#### IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En esta sección se presentan los resultados experimentales que comparan el rendimiento de los algoritmos descritos en la sección anterior. Los experimentos fueron realizados en un robot manipulador antropomórfico *ABB* de la serie 2400 de seis eslabones con la IMU montada en el efector final como se muestra en la Figura 1. El manipulador se programó para realizar rotaciones en el efector final y las estimaciones se comparan con los valores de la cinemática directa del robot.



Figura 1. Plataforma. <http://www.youtube.com/watch?v=LTR-hAu0JqY>

Los estimadores se programaron en el DSP TMS320F28335 que opera a una frecuencia de 150 MHz y tiene una unidad de punto flotante (FPU) *IEEE* – 754 de precisión simple (32 bits). Utilizamos la unidad de medición inercial *MinIMU-9v2*, la cual esta compuesta por un Giroscopio *L3GD20*, un Acelerómetro y un Magnetómetro encapsulados en el mismo chip *LSM303DLHC*, todos de tres ejes. La IMU tiene una interfaz *I<sup>2</sup>C* que se conecta al DSP para establecer la comunicación en un esquema Maestro-Esclavo para acceder a los registros de los sensores y poder adquirir los datos.

Las ganancias y las condiciones iniciales con los que se realizaron los experimentos se fijaron para el método *QUEST* en  $\rho_1 = 2$ ,  $\rho_2 = 2$ ; para el filtro de Kalman  $\hat{\mathbf{q}} = [0, 0, 0, 0]^T$ ,  $P = I_4$ ,  $\sigma_\zeta = 0.1$  y  $\sigma_\xi = 0.1$ ; para el método de *Fusion Sensorial*  $\sigma_\zeta = 5$  y  $\sigma_\xi = 3$ . Para los filtros complementario en sus dos versiones, pasivo y directo se propusieron  $k_i = 10$  y  $k_p = 25$ . Para el filtro basado en el esquema de *Inmersión e Invarianza* se consideró  $\bar{\mu}_a = 10$ ,  $\xi = -30$ ,  $\gamma_1 = 0.5$ ,  $\gamma_2 = 0.7$  y  $\gamma_1 = 0.9$ .

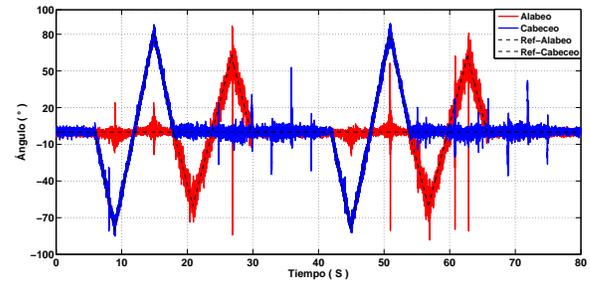
Cada algoritmo de estimación se programó con tres rutinas principales, la rutina de adquisición de datos, la rutina de estimación y la rutina de envío de datos, las cuales son controladas a través de interrupciones generadas por contadores (Timers) del DSP, logrando así un control del inicio de ejecución de cada rutina. La frecuencia máxima de adquisición de los datos de la IMU es de 565 Hz en todos los casos, mientras que los tiempos de computo obtenidos de cada algoritmo se presentan en la Tabla I, donde puede

observarse que el menor tiempo corresponde al método (3) y el método que requiere más operaciones de calculo corresponde a (4).

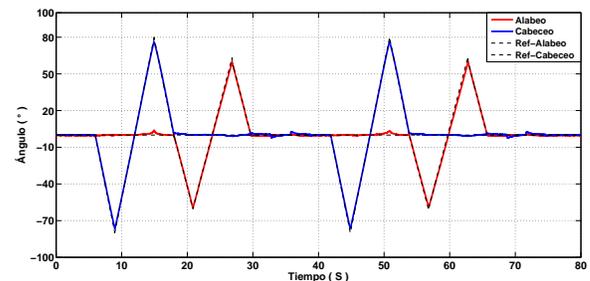
TABLA I  
TIEMPOS DE COMPUTO DE CADA MÉTODO DE ESTIMACIÓN

No.	Algoritmo de Estimación	Tiempo ( $\mu s$ )	Frec. (KHz)
1	TRIAD	440	2.273
2	QUEST	360	2.778
3	Fusion Sensorial	140	7.143
4	Filtro de Kalman	2300	0.434
5	F. Complementario Directo	560	1.786
6	F. Complementario Pasivo	560	1.786
7	F. de Inmersión e Invarianza	200	5.000

El robot se programó para ejecutar dos series de rotaciones de  $[-80, 80]$  grados en alabeo y  $[-60, 60]$  grados en cabeceo como se puede observar en la Figura 2. Los resultados obtenidos usando el método *TRIAD* se presentan en la Figura 2(a), donde se observa un rendimiento menor debido al ruido presente en las mediciones, en contraste con el método de *Filtro de Kalman*, ver Figura 2(b), donde se obtienen mejores resultados. Las gráficas de los métodos restantes son similares y fueron omitidas por cuestión de espacio.



(a) Método TRIAD



(b) Filtro de Kalman

Figura 2. Estimación de orientación

Para evaluar objetivamente los métodos de estimación implementados se consideró un índice de desempeño basado en la norma  $L_2$  de los errores de estimación  $\tilde{e}$  que tiene la siguiente forma,

$$L_2(\tilde{e}) = \sqrt{\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t |\tilde{e}| dt} \quad (38)$$

donde  $t, t_0 \in \mathbb{R}^+$  son los tiempos inicial y final respectivamente. Es claro que un índice pequeño de  $L_2(\tilde{e})$  representa

un mejor desempeño. Siguiendo la numeración de la Tabla I los índices de desempeño de cada método están dados en la Figura 3 donde es posible observar que se tienen mejores resultados con el filtro de Kalman, seguido por el filtro de Inmersión e Invarianza.

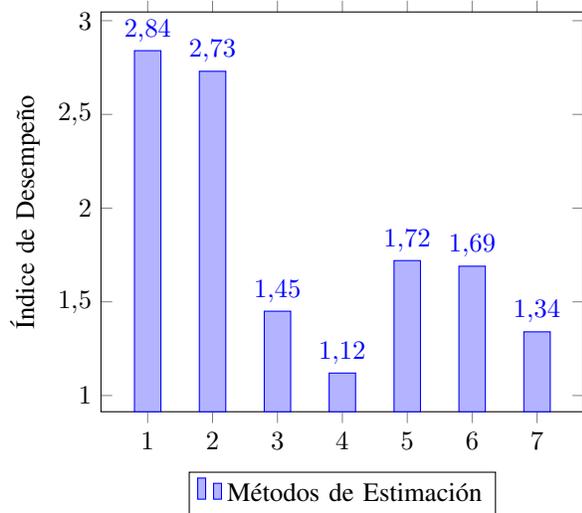


Figura 3. Índice de desempeño

A partir del compromiso entre un bajo tiempo de computo y un adecuado índice de desempeño en la Figura 4 se muestra la relación normalizada existente entre ellos, donde podemos ver que el método (3) y (7) representan las mejores alternativas.

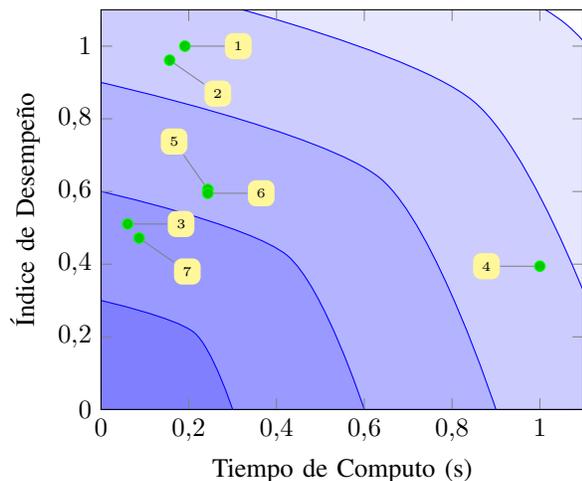


Figura 4. Desempeño vs Tiempo.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un estudio experimental comparativo de diversos métodos encontrados en la literatura para estimar la orientación de un cuerpo rígido. Se consideró como parámetros a evaluar sus tiempos de cálculo con la implementación en un sistema embebido basado en un procesador de señales, así como una medición del error de estimación a través de la norma  $L_2$  del mismo. Es notable

como la mejor estimación dada por el filtro de Kalman presenta el problema de largos tiempos de computo. Se tiene entonces un compromiso entre velocidad de calculo y exactitud de la estimación, generándose alternativas dadas por el el Filtro de Inmersión e Invarianza o el método de fusión sensorial.

## REFERENCIAS

- Astolfi, A., Karagiannis, D. and Ortega, R. (2008), *Nonlinear and adaptive control with applications*, Springer.
- Barbour, N. and Schmidt, G. (2001), 'Inertial sensor technology trends', *Sensors Journal, IEEE* **1**(4), 332–339.
- Crassidis, J. L., Markley, F. L. and Cheng, Y. (2007), 'Survey of nonlinear attitude estimation methods', *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **30**(1), 12–28.
- El Hadri, A. and Benallegue, A. (2009), Attitude estimation with gyros-bias compensation using low-cost sensors, in 'Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on', pp. 8077–8082.
- Estrada-Sanchez, I., Rodriguez-Cortes, H. and Velasco-Villa, M. (2008), Immersion and invariance based experimental attitude estimation for mobile robots with low acceleration profiles, in 'Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 2008. CCE 2008. 5th International Conference on', pp. 374–379.
- Gebre-Egziabher, D., Hayward, R. and Powell, J. (2004), 'Design of multi-sensor attitude determination systems', *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on* **40**(2), 627–649.
- Hol, J. D., Schön, T. B. and Gustafsson, F. (2010), 'Modeling and calibration of inertial and vision sensors', *The international journal of robotics research* **29**(2-3), 231–244.
- Kalman, R. E. et al. (1960), 'A new approach to linear filtering and prediction problems', *Journal of basic Engineering* **82**(1), 35–45.
- Kim, H.-J., Kim, C., Rho, O.-H. and BLACK, H. (1964), 'A passive system for determining the attitude of a satellite', *AIAA Journal* **2**(7), 1350–1351.
- Lee, J. K., Park, E. and Robinovitch, S. (2012), 'Estimation of attitude and external acceleration using inertial sensor measurement during various dynamic conditions', *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on* **61**(8), 2262–2273.
- Luinge, H. and Veltink, P. (2004), 'Inclination measurement of human movement using a 3-d accelerometer with autocalibration', *Neural Systems and Rehabilitation Engineering, IEEE Transactions on* **12**(1), 112–121.
- Mahony, R., Hamel, T. and Pflimlin, J.-M. (2008), 'Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group', *Automatic Control, IEEE Transactions on* **53**(5), 1203–1218.
- Marins, J., Yun, X., Bachmann, E., Mcghee, R. and Zyda, M. (2001), An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors, in 'Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on', Vol. 4, pp. 2003–2011 vol.4.
- Rehbinder, H. and Hu, X. (2004), 'Drift-free attitude estimation for accelerated rigid bodies', *Automatica* **40**(4), 653 – 659.
- Roberts, A. and Tayebi, A. (2011a), On the attitude estimation of accelerating rigid-bodies using gps and imu measurements, in 'Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on', pp. 8088–8093.
- Roberts, A. and Tayebi, A. (2011b), Position control of vtol uavs using imu and gps measurements, in 'Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on', pp. 8082–8087.
- Shuster, M. D. (1993), 'A survey of attitude representations', *Navigation* **8**, 9.
- Shuster, M. D. and Oh, S. D. (1981), 'Three-axis attitude determination from vector observations', *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **4**(1), 70–77.
- Suh, Y.-S. (2003), Attitude estimation using low cost accelerometer and gyroscope, in 'Science and Technology, 2003. Proceedings KORUS 2003. The 7th Korea-Russia International Symposium on', Vol. 2, pp. 423–427 vol.2.
- Wahba, G. (1965), 'A least squares estimate of satellite attitude', *Siam Review* **7**(3), 409–409.
- Wertz, J. R. (1978), *Spacecraft attitude determination and control*, Vol. 73, Kluwer Academic Pub.
- Yun, X. and Bachmann, E. (2006), 'Design, implementation, and experimental results of a quaternion-based kalman filter for human body motion tracking', *Robotics, IEEE Transactions on* **22**(6), 1216–1227.