

# Estabilización y seguimiento de un robot móvil (3,0) mediante control acotado

J. P. Sánchez-Santana<sup>1</sup>, J. F. Guerrero-Castellanos<sup>2</sup>, M. G. Villarreal-Cervantes<sup>3</sup>,  
S. Ramírez-Martínez<sup>2</sup>, G. Mino-Aguilar<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Politécnica de Puebla. Tercer Carril del Ejido “Serrano” s/n, San Mateo Cuanalá,  
Juan C. Bonilla, C. P. 72640, Puebla, México.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias de la Electrónica-BUAP. Av. San Claudio y 18 Sur, Col. San Manuel,  
C.P. 72570, Puebla, Pue. México.

<sup>3</sup> Instituto Politécnico Nacional-CIDETEC. Av. Juan de Dios Bátiz s/n,  
Col. Nueva Industrial Vallejo, Deleg. Gustavo A. Madero, C.P. 07700, México D.F.  
jose.sanchez@uppuebla.edu.mx  
Teléfono: (52)-22-27746656

**Resumen**—El presente trabajo aborda el problema de seguimiento de trayectoria para el robot (3,0) y propone una solución mediante el diseño de una estrategia de control que a priori toma en cuenta las cotas máximas permitidas de la señal de control *i.e.* la velocidad lineal y angular máximas que puede alcanzar el robot móvil. Esto permite maximizar el uso de los actuadores sin poner en riesgo la estabilidad del sistema. El resultado es una ley de control no lineal relativamente simple basada en un cambio de coordenadas y en funciones de saturación imbricadas que permite ser implementada en sistemas embebidos con bajo poder computacional. Además, la ley de control contiene parámetros de sintonización que permiten que las trayectorias del sistema en lazo cerrado entren en una vecindad, definida a priori, de las trayectorias deseadas en un tiempo finito y se mantengan ahí en adelante. Simulaciones numéricas muestran el desempeño del sistema en lazo cerrado y sustentan los resultados teóricos.

**Palabras clave:** Robot móvil (3,0), funciones de saturación, control no lineal, seguimiento de trayectoria.

## I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años los avances en sensores, actuadores, sistemas de computo embebido, sistemas de comunicaciones y sistemas de alimentación, han permitido que se mantenga un fuerte interés por la robótica móvil terrestre (Dierks y Jagannathan, 2007; Yandong *et al.*, 2010; Shen *et al.*, 2011; Saidonr *et al.*, 2011; Chang, 2012), y en particular, por el robot móvil omnidireccional también conocido como robot móvil (3,0), esto debido a las múltiples aplicaciones en las que este tipo de vehículos pueden ser considerados, operando de manera individual (Rivera, 2006; El-Shenawy *et al.*, 2008) o cooperativa como es el caso del robot manipulador paralelo móvil omnidireccional propuesto en (Villarreal *et al.*, 2012). A diferencia de los robots no-holónomos (*e.g.* configuración diferencial o Ackerman) que requieren previamente un movimiento de rotación antes de realizar la traslación, el robot móvil (3,0)

posee “total movilidad en el plano”, lo que significa que en cualquier instante se puede mover en cualquier dirección independientemente de su orientación. Esta capacidad los hace muy atractivos en ambientes dinámicos donde una gran capacidad de movilidad y respuesta es deseable (Villarreal *et al.*, 2012).

En general el desarrollo de algoritmos de control de movimiento de los robots móviles se clasifica en dos categorías, a saber, control basado en el modelo dinámico y el control basado en el modelo cinemático (Campion y Bastin, 1996). Un modelo dinámico describe directamente la relación entre las fuerzas y pares generadas por cada uno de los motores conjuntamente con las ruedas y el movimiento del robot. En este caso los pares aplicados a cada llanta son considerados la entrada del sistema y el movimiento del robot en términos de posición y velocidad angular y lineal, la salida. Una gran número de trabajos han abordado este enfoque con sólidos resultados (Rivera, 2006). Desafortunadamente, este enfoque muestra algunas desventajas, ya que en general las leyes de control son dependientes del modelo por lo que las variaciones dinámicas causadas por los cambios en el momento de inercia del robot o cambio en los parámetros del sistema debido a imperfecciones mecánicas o desgaste hacen que la robustez del sistema en lazo cerrado esté altamente comprometida y los algoritmos de control sean complejos y difíciles de implementar en sistemas embebidos donde el poder de cálculo es reducido.

Asumiendo que no existe deslizamiento de las ruedas, que el terreno es totalmente plano y que se tienen los sensores suficientes, el uso del modelo cinemático en el desarrollo de leyes de control es bastante útil ya que la estructura de los mismos resultan relativamente simples y fáciles a implementar. Bajo este enfoque, las entradas del sistema son velocidades angulares en cada una de las ruedas del robot y se considera como salida la velocidad lineal y angular en el centro de masa del robot. En este caso el comportamiento dinámico de los actuadores es considerado

lo suficientemente rápido lo que permite ser ignorado. De esta forma se asume que las velocidades deseadas en cada una de las llantas se pueden alcanzar inmediatamente, es decir, la respuesta del motor es instantánea. Sin embargo, estas consideraciones son bastante conservativas ya que en la realidad existe un límite en la respuesta dinámica del actuador lo que puede degradar el desempeño en los movimientos del robot, sobre todo cuando las leyes de control son discontinuas. Otro aspecto fundamental en el control de robots es el aspecto estático de los actuadores, es decir, los límites de saturación. Puesto que en la práctica las velocidades que puede alcanzar cualquier motor están acotadas por las características físicas, estos límites deben ser tomados en cuenta dentro del diseño del control, ya que de lo contrario estos efectos pueden provocar un desempeño pobre e incluso la inestabilidad del sistema en lazo cerrado (Scolari Conceição y Costa, 2006; Indiveri *et al.*, 2006).

El desarrollo de leyes de control que permitan obtener señales de control acotadas es de constante interés ya que todos los dispositivos de control (actuadores) están sujetos a restricciones de amplitud, fuerzas, torques, voltaje, flujo, etc.. En realidad, todas las entradas físicas en cada tecnología están restringidas, así que el diseño de controladores que tomen en cuenta estas características es una necesidad. En las últimas décadas varios métodos han sido propuestos para el diseño de este tipo de controladores con un enfoque completamente no lineal. Este eje fue iniciado por (Teel, 1992), quien propone un control basado en funciones de saturación anidadas para la estabilización de cadena de integradores. A partir de éste, varios trabajos fueron desarrollados extendiendo los resultados y proponiendo mejoras respecto a velocidad de convergencia y robustez (Sussmann *et al.*, 1994; Rao y Bernstein, 2001; Johnson y Kannan, 2003; Marchand y Hably, 2005; Kaliora y Astolfi, 2005; Yong y Ru-Ning, 2010) y aplicados en una gran cantidad de áreas, como la robótica de manipuladores (Álvarez *et al.*, 2003), ingeniería civil (Arfiadi y Hadi, 2006), robótica aérea (Guerrero-Castellanos *et al.*, 2011; Rifai *et al.*, 2012) y sistemas con retardos (Fischer *et al.*, 2013). Sin embargo, al mejor conocimiento de los autores, no existe reportado en la literatura alguna estrategia de control no lineal para el robot (3,0) que permita obtener señales de control acotadas de manera explícita y que garantice la convergencia asintótica global de las trayectorias del sistema en lazo cerrado a las trayectorias deseadas.

El presente trabajo aborda el problema de seguimiento de trayectoria para el robot (3,0) y propone una solución mediante el diseño de una estrategia de control que a priori toma en cuenta las cotas máximas permitidas de la señal de control *i.e.* la velocidad lineal y angular máximas que puede alcanzar el robot móvil. Esto permite maximizar el uso de los actuadores sin poner en riesgo la estabilidad del sistema. El resultado es en una ley de control no lineal relativamente simple basada en funciones de saturación imbricadas que permite ser implementada en sistemas embebidos con bajo poder computacional. Además, la ley de control contiene

parámetros de sintonización que permiten modificar la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección II se establece el modelo cinemático del robot móvil. La sección III corresponde al diseño de la estrategia de control y la demostración de la estabilidad en lazo cerrado. En la sección IV se presentan los resultados obtenidos en simulación. Finalmente, las conclusiones y perspectivas se presentan en la sección V.

## II. MODELO CINEMÁTICO

De acuerdo a la clasificación establecida por (Campion y Bastin, 1996) el robot móvil (3,0) es un robot holónimo con tres ruedas omnidireccionales que tiene la capacidad de moverse en cualquier dirección con cualquier orientación. Presenta tres grados de movilidad y no contempla grado de direccionabilidad.

La representación esquemática del robot móvil (3,0), se muestra en la Figura 1. Un sistema de coordenada inercial  $\{w\}$  se fija en el plano de movimiento y un sistema de coordenada  $\{m\}$  se considera en el robot móvil. Sea  $\dot{\eta}_w = (\dot{x}_w \ \dot{y}_w \ \dot{\phi}_w)^T$  y  $\dot{\eta}_m = (\dot{x}_m \ \dot{y}_m \ \dot{\phi}_m)^T$  la velocidad lineal y angular del robot móvil con respecto al sistema de coordenada inercial  $\{w\}$  y al sistema de coordenada del móvil  $\{m\}$ , respectivamente. Se asume que el robot móvil tiene una estructura rígida, con ruedas que no se deforman, no deslizan y su movimiento es en un plano horizontal (suelo) con un punto de contacto entre la llanta y el suelo; considerando  $\delta_1 = \frac{\pi}{6}$  y  $\delta_3 = \frac{\pi}{3}$ , el modelo cinemático se puede representar en (1).

$$\begin{aligned}\dot{x}_w &= \dot{x}_m \cos \phi_w - \dot{y}_m \sin \phi_w \\ \dot{y}_w &= \dot{x}_m \sin \phi_w + \dot{y}_m \cos \phi_w \\ \dot{\phi}_w &= \dot{\phi}_m\end{aligned}\quad (1)$$

El mapeo entre la velocidad lineal de las llantas y la velocidad angular y lineal del robot móvil se representa en (2) donde  $\dot{\theta} = (\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3)^T$  es la velocidad angular de las ruedas,  $r_r = 0,0625m$  es el radio de las ruedas y la distancia entre el centro geométrico del móvil y la llanta se representa como  $L = 0,287m$ .

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 r_r &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \dot{x}_m + \frac{1}{2} \dot{y}_m + L \dot{\phi}_m \\ \dot{\theta}_2 r_r &= -\dot{y}_m + L \dot{\phi}_m \\ \dot{\theta}_3 r_r &= -\frac{1}{2} \sqrt{3} \dot{x}_m + \frac{1}{2} \dot{y}_m + L \dot{\phi}_m\end{aligned}\quad (2)$$

## III. DISEÑO DEL SISTEMA DE CONTROL

Sea el vector de estado  $x = (x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22} \ x_{31} \ x_{32})^T = (\int x_w \ x_w \ \int y_w \ y_w \ \int \phi_w \ \phi_w)^T$  y el vector de señal de control  $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T = (\dot{x}_m \ \dot{y}_m \ \dot{\phi}_m)^T$ , la representación en variable de estado del sistema (1) se

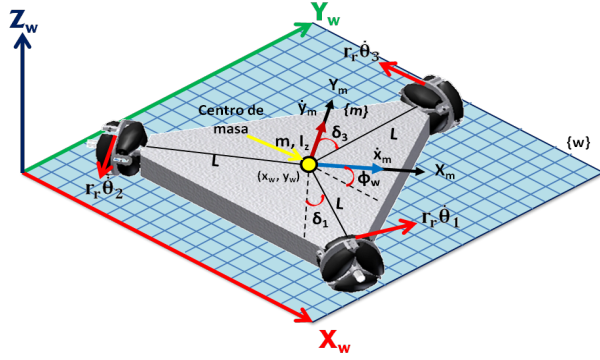


Figura 1. Diagrama esquemático del robot móvil (3,0).

define en (3).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{11} &= x_{12} \\
 \dot{x}_{12} &= u_1 \cos(x_{32}) - u_2 \sin(x_{32}) \\
 \dot{x}_{21} &= x_{22} \\
 \dot{x}_{22} &= u_1 \sin(x_{32}) + u_2 \cos(x_{32}) \\
 \dot{x}_{31} &= x_{32} \\
 \dot{x}_{32} &= u_3
 \end{aligned} \quad (3)$$

Considere el sistema (3) con la siguiente retroalimentación:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \cos(x_{32})r_1 + \sin(x_{32})r_2 \\
 u_2 &= -\sin(x_{32})r_1 + \cos(x_{32})r_2 \\
 u_3 &= r_3
 \end{aligned} \quad (4)$$

De esta forma, el sistema retroalimentado se convierte en el denotado por (5)-(7) y donde se observa que la cinemática del robot móvil (3,0) se descompone en tres subsistemas. Los subsistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  representan las ecuaciones del movimiento de traslación, mientras que el subsistema  $\Sigma_3$  representa la ecuación del movimiento de rotación.

$$\Sigma_1 := \begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = r_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\Sigma_2 := \begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = r_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\Sigma_3 := \begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} \\ \dot{x}_{32} = r_3 \end{cases} \quad (7)$$

Denotando a la posición deseada del robot móvil con respecto al sistema inercial por  $\xi_{1d} = \alpha_x$  y  $\xi_{2d} = \alpha_y$  y a la orientación deseada por  $\xi_{3d} = \alpha_{\phi_w}$ , la dinámica de error queda determinada por (8) :

$$\Sigma_i := \begin{cases} \dot{\tilde{z}}_{i1} = \tilde{z}_{i2} \\ \dot{\tilde{z}}_{i2} = r_i - \ddot{\xi}_{id} \end{cases} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (8)$$

donde  $\tilde{z}_{i1} = x_{i1} - \xi_{id}$ ,  $\tilde{z}_{i2} = x_{i2} - \dot{\xi}_{id} \forall i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Definición 1:** (Función de Saturación) Se denota a  $\sigma_{M_j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como la función clásica de saturación definida como:

$$\sigma_{M_j}(s) := \min(M_j, \max(-M_j, s))$$

y la cual satisface que  $s\sigma_{M_j}(s) > 0$  para todo  $s \neq 0$ .

Una vez dada la definición anterior, nuestro principal resultado es el siguiente:

**Teorema 1:** Considere el sistema (8). Asuma que las siguientes condiciones son satisfechas:  $|\ddot{\xi}_{id}| \leq M_{i3} - \delta_i$  para todo  $t > t_0$  (seguimiento restringido) y para algún  $\delta_i > 0$ , con  $M_{i2} \leq \delta_i$ ,  $M_{i2} > 2M_{i1}$ . Entonces, la ley de control

$$r_i = \sigma_{M_{i3}} \left( \ddot{\xi}_{id} - \sigma_{M_{i2}} \left( a_{i1} \tilde{z}_{i2} + \sigma_{M_{i1}} (a_{i2} \tilde{z}_{i2} + a_{i1} a_{i2} \tilde{z}_{i1}) \right) \right) \quad (9)$$

con  $\sigma_{M_{ij}}(\cdot) \forall i, j = 1, 2, 3$ , funciones de saturación y  $a_{i1}, a_{i2}$  constantes reales positivas, provoca que las trayectorias de (8) converjan globalmente y asintóticamente a cero. En consecuencia,  $x_{i1} \rightarrow \xi_{id}$  y  $x_{i2} \rightarrow \dot{\xi}_{id}$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además la señal de control  $r_i$  se mantiene acotada, i.e.  $|r_i| \leq M_{i3}$ .

**Demostración:** Con la ley de control dada si la magnitud de  $\ddot{\xi}_{id}$  cumple siempre con  $|\ddot{\xi}_{id}| \leq M_{i3} - \delta_i$  para todo  $t > t_0$  con  $M_{i2} \leq \delta_i$ , entonces la magnitud del argumento  $\sigma_{M_{i3}}$  es

$$|\ddot{\xi}_{id} - M_{i2}| \leq M_{i3} \quad (10)$$

en consecuencia,  $M_{i3}$  se encuentra funcionando en la región lineal, resultando en

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{z}}_{i1} &= \tilde{z}_{i2} \\
 \dot{\tilde{z}}_{i2} &= -\sigma_{M_{i2}} \left( a_{i1} \tilde{z}_{i2} + \sigma_{M_{i1}} (a_{i2} \tilde{z}_{i2} + a_{i1} a_{i2} \tilde{z}_{i1}) \right)
 \end{aligned} \quad (11)$$

Para proseguir con la demostración, se define el siguiente cambio de variables:

$$\zeta_{i1} = a_{i1} a_{i2} \tilde{z}_{i1} - a_{i2} \tilde{z}_{i2}, \quad \zeta_{i2} = a_{i1} \tilde{z}_{i2} \quad (12)$$

En consecuencia, el sistema (11) se escribe como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}_{i1} &= a_{i2} [\zeta_{i2} - \sigma_{M_{i2}}(\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}))] \\
 \dot{\zeta}_{i2} &= -a_{i1} \sigma_{M_{i2}}(\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}))
 \end{aligned} \quad (13)$$

Con el fin de analizar la convergencia de las variables del sistema, considere primeramente la evolución del estado  $\zeta_{i2}$ . Considere la función candidata de Lyapunov  $V_{i2} = \zeta_{i2}^2$ . Derivando esta función y evaluandola a lo largo de la trayectoria de  $\zeta_{i2}$ , se obtiene  $\dot{V}_{i2} = 2\zeta_{i2}\dot{\zeta}_{i2} = -2a_{i1}\zeta_{i2}\sigma_{M_{i2}}(\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}))$ . Suponiendo que  $|\zeta_{i2}| > 2M_{i1}$ , i.e.  $|\zeta_{i2}| \in [2M_{i1}, \infty]$ , lo que implica que  $|\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})| \geq M_{i1} + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Por lo tanto, se puede afirmar que  $\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})$  es del mismo signo que  $\zeta_{i2}$  y en consecuencia  $\dot{V}_{i2} < 0$ . Lo

anterior implica que  $\zeta_{i2}$  va a entrar al conjunto  $\Phi_{i2} = \{\zeta_{i2} : |\zeta_{i2}| \leq 2M_{i1}\}$  en un tiempo finito  $t_1$  y va a permanecer en él para todo  $t > t_1$ . Mientras tanto, por el Lema 4 en (Marchand y Hably, 2005) se garantiza que el estado  $\zeta_{i1}$  se mantiene acotado.

Una vez, sucedido esto,  $\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}) \in [-2M_{i1}, 2M_{i1}]$ , y esto significa que  $\sigma_{M_{i2}}(\cdot)$  no está saturada, por lo tanto el sistema (13) se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{i1} &= -a_{i2}\sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1}) \\ \dot{\zeta}_{i2} &= -a_{i1}[\zeta_{i2} + \sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})] \end{aligned} \quad (14)$$

Sea la siguiente función candidata de Lyapunov para considerar la evolución de  $\zeta_{i1}$  :  $V_{i1} = \zeta_{i1}^2$ . Derivando esta función y evaluandola a lo largo de la trayectoria de  $\zeta_{i1}$ , se obtiene,  $\dot{V}_{i1} = 2\zeta_{i1}\dot{\zeta}_{i1} = -2a_{i2}\zeta_{i1}\sigma_{M_{i1}}(\zeta_{i1})$ . De acuerdo a la definición de la función de saturación, esto implica que  $\dot{V}_{i1} < 0$  y  $\zeta_{i1}$  decrece y entra al conjunto  $\Phi_{i1} = \{\zeta_{i1} : |\zeta_{i1}| \leq M_{i1}\}$  en un tiempo finito  $t_2 > t_1$  y se mantiene en él para todo  $t > t_2$ . Esto significa que  $\sigma_{M_{i1}}(\cdot)$  no está saturada y el sistema (14) se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{i1} &= -a_{i2}\zeta_{i1} \\ \dot{\zeta}_{i2} &= -a_{i1}(\zeta_{i2} + \zeta_{i1}) \end{aligned} \quad (15)$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{i1} \\ \dot{\zeta}_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{i2} & 0 \\ -a_{i1} & -a_{i1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{i1} \\ \zeta_{i2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

que tiene la forma  $\dot{\zeta}_i = A_i\zeta_i$ , cuya solución  $\zeta_i = e^{A_i t}\zeta_i(0)$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , puesto que  $A_i$  es Hurwitz. Por lo tanto el sistema (11) que representa la dinámica del error, es global y asintóticamente estable y además es exponencialmente estable de manera local. En consecuencia,  $z_{i1}, z_{i2} \rightarrow 0$  lo que implica  $x_{i1} \rightarrow \xi_{id}$  y  $x_{i2} \rightarrow \dot{\xi}_{id}$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Observación 1:** De acuerdo a (4) y al resultado mencionado en el Teorema anterior, las señales de control *i.e.* la velocidad lineal y angular, quedan acotadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |u_1| &\leq M_{13} + M_{23} \\ |u_2| &\leq M_{13} + M_{23} \\ |u_3| &\leq M_{33} \end{aligned}$$

#### IV. RESULTADOS

En la Figura 2 se muestra el diagrama a bloques de la estrategia de control propuesta para el problema de regulación y/o seguimiento de trayectoria del robot móvil (3,0). Se asume que existe una condición inicial para el sistema la cual no está representada en el diagrama.

Con el fin de realizar una simulación numérica del sistema en lazo cerrado, se propone que el robot móvil (3,0) siga en su orientación una señal sinusoidal con amplitud de  $0,4 \text{ rad/s}$  y frecuencia  $2,5 \text{ Hz}$ . Además, las trayectorias a seguir en el plano son: una circunferencia

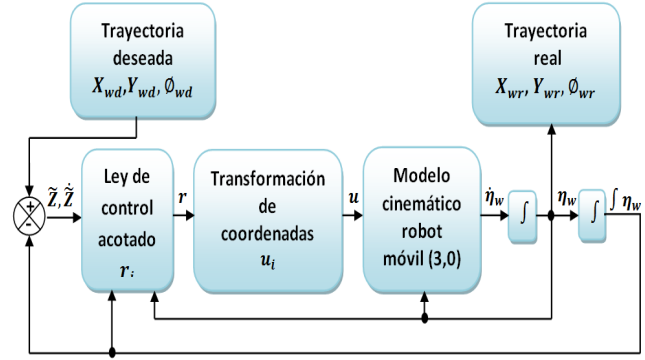


Figura 2. Diagrama a bloques del sistema con la estrategia de control acotado.

TABLA I

PARÁMETROS PARA LA LEY DE CONTROL ACOTADO.

Límites de saturación Circunferencia	Límites de saturación Lemniscata
$M_{11} = 0,5$	$M_{11} = 0,4$
$M_{12} = 1$	$M_{12} = 0,9$
$M_{13} = 1,5$	$M_{13} = 1,3$
$M_{21} = 0,5$	$M_{21} = 0,4$
$M_{22} = 1$	$M_{22} = 0,9$
$M_{23} = 1,5$	$M_{23} = 1,3$
$M_{31} = 0,15$	$M_{31} = 0,15$
$M_{32} = 0,3$	$M_{32} = 0,3$
$M_{33} = 0,6$	$M_{33} = 0,6$

de radio  $0,4m$  con frecuencia de  $0,66 \text{ Hz}$ , centrada en  $(0,5, 0,5)$  definida por (18) y una forma Lemniscata con  $\Delta\Theta = 0,3$ ,  $\Delta\Phi = 1$ ,  $\Psi = 0,6$ , centrada en  $(0,6, 0,6)$  definida por (19), ambas en el sistema coordenado  $\{w\}$ . Los parámetros de la ley de control propuesta se proporcionan en la Tabla I. Además se tiene que los valores de los coeficientes  $a_{i(1,2)}$  son:  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 5$  y  $a_{31} = a_{32} = 50$ .

$$\begin{aligned} \xi_{1d} &= 0,4 \sin(4,1887t) \\ \xi_{2d} &= 0,4 \cos(4,1887t) \\ \xi_{3d} &= 0,4 \cos(2,5132t) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \xi_{1d} &= 0,5 + \cos(\Psi)\Delta\Theta \sin(2t) - \sin(\Psi)\Delta\Phi \sin(t) \\ \xi_{2d} &= 0,5 + \sin(\Psi)\Delta\Theta \sin(2t) + \cos(\Psi)\Delta\Phi \sin(t) \\ \xi_{3d} &= 0,4 \cos(2,5132t) \end{aligned} \quad (19)$$

Cabe mencionar que las trayectorias deseadas son parametrizadas en el tiempo y están propuestas de tal forma que las señales de control alcancen sus límites permitidos y de esa manera se muestre el beneficio de la técnica propuesta, *i.e.* el sistema mantiene estabilidad a pesar de que las señales de control se saturan.

La condición inicial de la simulación para la trayectoria descrita por la circunferencia es  $n_w(0) = (0,6 \ 0,6 \ 0)^T$ ,  $\dot{n}_w(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$  con un tiempo de integración  $\Delta t = 1 \text{ ms}$  y un tiempo de simulación igual a  $t_f = 4s$ . En la columna a) de la Figura 3 se observa la evolución en el tiempo de las variables de error, que por fines de simplicidad en la lectura se denota por  $e(1) = \tilde{z}_{12}$ ,  $e(2) = \tilde{z}_{22}$ ,  $e(3) = \tilde{z}_{32}$ ,

así como las señales de control correspondientes. La ley de control permite realizar el seguimiento de trayectoria tanto en el plano como para el ángulo, tal como se observa en la Figura 4, donde además es evidente que con la ley de control las variables del error evolucionan en una vecindad del origen, esto se debe a que la trayectoria deseada se realiza a una alta frecuencia de tal manera que la señales de control  $r_i$  tienden a saturarse. Sin embargo, a pesar de que la señal de control se satura, el sistema en lazo cerrado conserva la estabilidad.

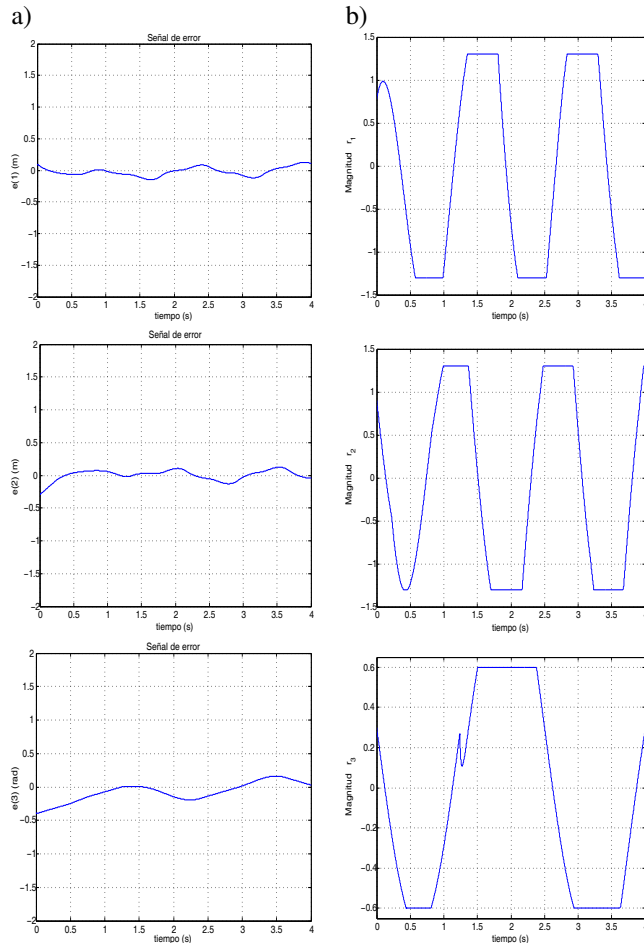


Figura 3. Comportamiento de las señales: a) de seguimiento de estados  $x$ ,  $y$  y  $\phi$ , y b) de control  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ .

Para el segundo escenario (trayectoria deseada definida por la Lemniscata) la condición inicial para la simulación del sistema en lazo cerrado es  $n_w(0) = (0,6,6)^T$ ,  $\dot{n}_w(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$  con un tiempo de integración  $\Delta t = 1 \text{ ms}$  y tiempo de simulación de  $t_f = 8 \text{ s}$ . En la Figura 5 a) se muestran la evolución de la trayectoria del error del robot móvil. En la Figura 5 b) se muestra la evolución de las señales de control. Nuevamente se pone de manifiesto que la parametrización en el tiempo de la trayectoria deseada obliga a la señal de control alcanzar sus límites, esto con el fin de llevar las trayectorias del error a una vecindad del origen. No obstante y a pesar de la saturación de la señal de control, el sistema

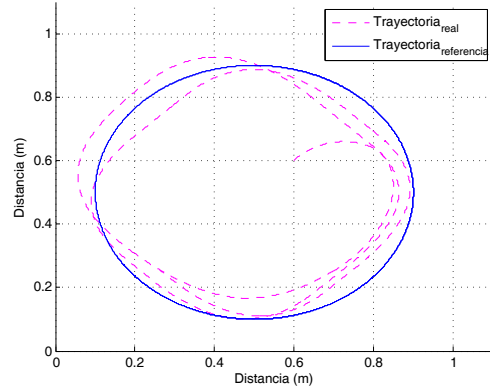


Figura 4. Seguimiento de la trayectoria de referencia en el espacio Cartesiano para una circunferencia.

en lazo cerrado mantiene la estabilidad y la trayectoria trata de ser alcanzada como lo muestra la figura 6. La simulación de los anteriores escenarios, muestran la importancia de la ley de control propuesta y la ventaja que ésta presenta afín de asegurar la estabilidad en lazo cerrado y maximizar el uso de los actuadores.

## V. CONCLUSIONES

El presente trabajo aborda el problema de seguimiento de trayectoria para el robot  $(3, 0)$  y propone una solución mediante el diseño de una estrategia de control que a priori toma en cuenta las cotas máximas permitidas de la señal de control *i.e.* la velocidad lineal y angular máximas que puede alcanzar el robot móvil. Esto permite maximizar el uso de los actuadores sin poner en riesgo la estabilidad del sistema. El resultado es una ley de control no lineal simple que permite ser implementada en sistemas embebidos con bajo poder computacional. Diferentes simulaciones muestran la efectividad de la estrategia de control propuesta. Se tiene la perspectiva de implementar en tiempo real la ley de control propuesta sobre el manipulador paralelo móvil omnidireccional desarrollado en el Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo.

## VI. AGRADECIMIENTOS

El segundo y quinto autor agradecen al PROMEP por el apoyo brindado al cuerpo académico “Sistemas de Potencia para tracción, calidad y generación de la energía”, BUAP-248. El tercer autor agradece el apoyo de la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas (COFAA) y a la Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP) del Instituto Politécnico Nacional bajo el proyecto No. 20131053.

## REFERENCIAS

Arfiadi, Y. y M. N. S. Hadi (2006). Continuous bounded controllers for active control of structures. *Computers Structures* (84), 798–807.

Campion, G., d'Andrea-Novel B. y G. Bastin (1996). Structural properties and clasification on kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*.

Chang, B.L. (2012). A trajectory tracking control scheme design for nonholonomic wheeled mobile robots with low-level control systems. *IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control (CDC)* pp. 536 – 543.

Dierks, T. y S. Jagannathan (2007). Control of nonholonomic mobile robot formations: Backstepping kinematics into dynamics. *IEEE International Conference on Control Applications* pp. 94–99.

El-Shenawy, A., A. Wellenreuther y E. Badreddin (2008). Practical evaluation for two different holonomic wheeled mobile robots. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics* pp. 3102 – 3107.

Fischer, N., A. Dani y W. E. Dixon (2013). Saturated control of an uncertain nonlinear system with input delay. *Automatica* (49), 1741–1747.

Guerrero-Castellanos, J.F., N. Marchand, A. Hably, S. Leseq y J. De-lamare (2011). Bounded attitude control of rigid bodies: Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter. *Control Engineering Practice* 19(8), 790–797.

Indiveri, G., J. Paulus, y P. G Plöger (2006). Motion control of swedish wheeled mobile robots in the presence of actuator saturation. En: *10th annual RoboCup International Symposium*.

Johnson, E. N. y S. K. Kannan (2003). Nested saturation with guaranteed real poles. *Proceedings of the American Control Conference*.

Kaliora, G. y A. Astolfi (2005). On the stabilization of feedforward systems with bounded control. *Systems and Control Letters* (54), 263–270.

Álvarez, R. J., R. Kelly y I. Cervantes (2003). Semiglobal stability of saturated linear pid control for robot manipulators. *Automatica* (39), 989–995.

Marchand, N. y A. Hably (2005). Global stabilization of multiple integrators with bounded controls. *Automatica* pp. 2147–2152.

Rao, V.G. y D. S. Bernstein (2001). Naive control of the double integrator. *IEEE Control Systems Magazine* 21, 86–97.

Rifai, H., N. Marchand y G. Poulin-Vittrant (2012). Bounded control of an underactuated biomimetic aerial vehicle - validation with robustness tests. *Robotics and Autonomous Systems* (60), 1165–1178.

Rivera, Z. G. F. (2006). Diseño, construcción y control para seguimiento de trayectorias de un robot móvil omnidireccional. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Saidonr, M.S., H. Desa y M.N. Rudzuan (2011). A differential steering control with proportional controller for an autonomous mobile robot. *IEEE 7th International Colloquium on Signal Processing and its Applications (CSPA)* pp. 90–94.

Scolari Conceição, A., Moreira A. y J Costa (2006). Motion control of swedish wheeled mobile robots in the presence of actuator saturation. En: *10th annual RoboCup International Symposium*.

Shen, D., Z. Sun y Y. Qiao (2011). Second-order sliding mode control for nonholonomic mobile robots formation. *30th Chinese Control Conference (CCC)* pp. 4860 – 4864.

Sussmann, H. J., E. D. Sontag y Y. Yang (1994). A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *IEEE Trans. on Automatic Control* 39(12), 2411–2425.

Teel, A. R. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems and Control Letters* pp. 165–171.

Villarreal, C. M. G., V. C. A. Cruz, B. S. A. Saldívar y Garcia S. L. E. (2012). Dynamic coupling between a parallel manipulator and an omnidirectional mobile platform. *XV Latinamerican Control Conference (CLCA)*.

Yandong, L., W. Zongyi y Z. Ling (2010). Adaptive neural network pid sliding mode dynamic control of nonholonomic mobile robot. *IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)* pp. 753 – 757.

Yong, W. y Ma. Ru-Ning (2010). Global stabilization of feedforward nonlinear system based on nested saturated control. *Acta Automatica Sinica*.

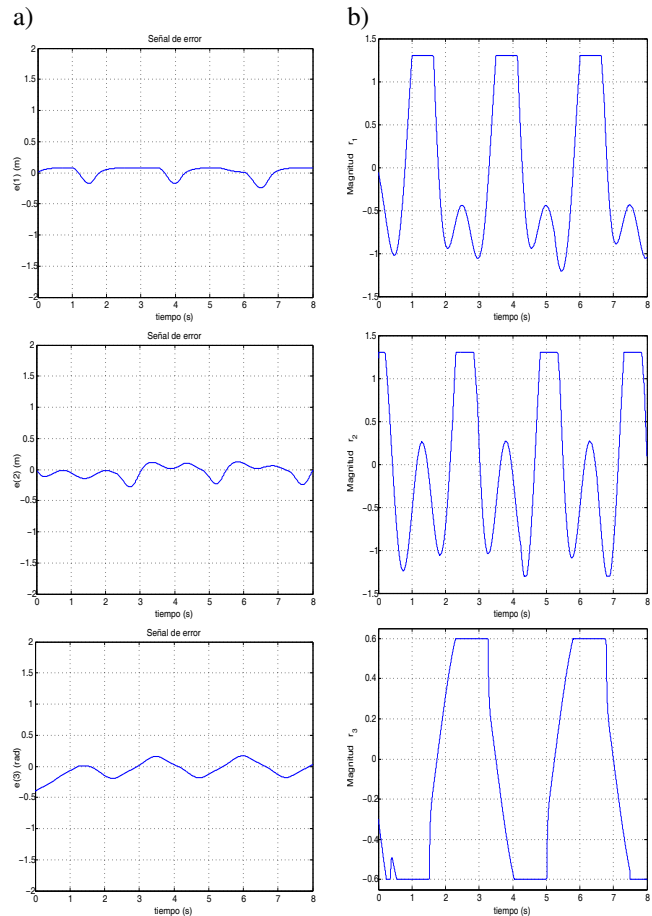


Figura 5. Comportamiento de las señales: a) de seguimiento de estados  $x$ ,  $y$  y  $\phi$ , y b) de control  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ .

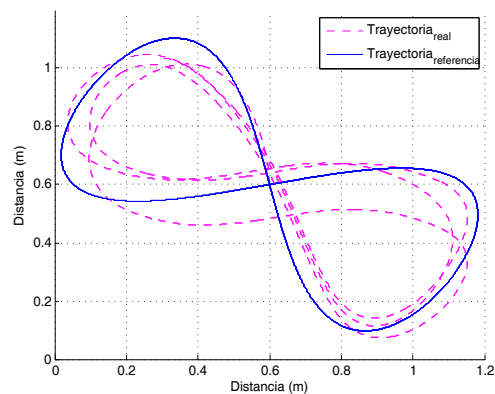


Figura 6. Seguimiento de la trayectoria de referencia en el espacio Cartesiano para una Lemniscata.