

# Control Predictivo Distribuido Óptimo Aplicado al Control de Nivel de un Proceso de Cuatro Tanques Acoplados

F-J. Sorcia-Vázquez<sup>1</sup>, C-D. García-Beltrán<sup>1</sup>, G. Valencia-Palomo<sup>2</sup>, G-V. Guerrero-Ramírez<sup>1</sup>,  
V-M. Alvarado-Martínez<sup>1</sup>, M. Adam-Medina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro Nacional de Investigación y Desarrollo, Cuernavaca, Mor., Méx.

<sup>2</sup>Instituto Tecnológico de Hermosillo, Hermosillo, Son., Méx.

felipedjsv@hotmail.com

**Resumen**—Se presenta el desarrollo de un control predictivo distribuido a partir de un control predictivo óptimo centralizado (OMPC), llamado control predictivo distribuido óptimo (DOMPC). Esta adaptación del control predictivo centralizado engloba la partición de un sistema en  $n$  subsistemas y la optimización de manera distribuida de las señales de control. Se considera que los controladores se comunican mediante una red de área local o LAN, la cual introduce un retardo de un instante de muestreo en la comunicación. El esquema DOMPC obtenido se aplica a un sistema de 4 tanques y se realiza una comparación con el esquema OMPC en simulación.

**Palabras clave:** Control óptimo; Control de Sistemas Lineales.

## I. INTRODUCCIÓN

Los procesos industriales se han vuelto cada vez más complejos. Tradicionalmente, para realizar el control de una planta industrial completa se diseñaban lazos de control locales o se empleaban controles centralizados. El uso de este tipo de controladores genera desventajas en la operación de la planta debido a la falta de interacción en los controladores locales o por lo riesgoso de depender un solo controlador. Por lo que la tendencia se ha vuelto el uso de controladores distribuidos conectados a una red de comunicación. El control predictivo ha sido utilizado como una alternativa para el desarrollo de controladores distribuidos. Una desventaja que se presenta al introducir una red de comunicación en el esquema de control es la presencia de retardos en la transmisión de datos, esto puede ocasionar una degradación en el desempeño del sistema de control hasta generar inestabilidad.

En el control predictivo distribuido se realiza la partición del modelo del proceso de tal forma que se pueden obtener subsistemas que representen de forma local la dinámica del proceso, al mismo tiempo que se considera la interacción entre las demás variables de estado y salidas con cada subsistema obtenido. En Jia y Krogh (2002)

y Camponogora et. al. (2002) se muestran las primeras propuestas de algoritmos de control predictivo distribuido, en este trabajo se considera que en el proceso únicamente existe interacción entre los estados, no hay interacción de entradas ni de salidas. En Venkat et. al. (2008) se reporta otra estrategia de control predictivo distribuido, en este esquema se considera la interacción entre los estados del sistema así como de las entradas de control. En Vaccarrini et. al. (2009) se propone un esquema de control predictivo distribuido que toma en consideración la interacción de los estados, las entradas y las salidas entre los  $s$  subsistemas. Se han realizado otros desarrollos de esquemas de control predictivo distribuido, pero estos algoritmos se enfocan a aplicaciones específicas. En Maestre et. al (2009) se desarrolla un algoritmo de control predictivo que considera únicamente dos subsistemas que interactúan entre sí. En Leirens et. al. (2010) se presenta el problema de control del sistema de suministro de agua de una ciudad. Se basan en el sistema de suministro de Bogotá Colombia y se desarrolla el esquema de control predictivo distribuido considerando las características específicas de este sistema. En Fukushima et. al. (2005) se realiza el control de una flota de vehículos, el objetivo de este esquema es evitar que los vehículos colisionen mientras cada uno sigue una trayectoria de referencia. En Mercangöz y Doyle III (2007) se presenta un esquema de control predictivo distribuido aplicado a un proceso de 4 tanques interconectados. Se utiliza una matriz de transformación para el desacople del modelo. Las diferencias entre este esquema y el esquema de control predictivo distribuido óptimo (DOMPC) propuesto son el modelo particionado del proceso, el esquema de Mercangöz y Doyle III (2007) realiza rechazo a perturbaciones y que el esquema DOMPC realiza regulación a referencias variables. En Vaccarrini et. al. (2009) se presenta un esquema de control predictivo distribuido basado en el control predictivo generalizado (GPC). La

validación de este esquema se realiza en simulación con sistemas numéricos de carácter académico.

El desarrollo del esquema de control DOMPC se centra en las ideas de control predictivo de modo dual (Rossiter et. al, 1998; Scokaert y Rawlings, 1998), el control predictivo óptimo (OMPC) (Rossiter, 2003) y en el esquema de control predictivo distribuido de Vaccarrini et. al. (2009). Una de las principales suposiciones en el desarrollo del esquema DOMPC es que la red de comunicación únicamente introduce un retardo de un instante de muestreo en la comunicación. La aportación básica de este trabajo es la introducción del esquema DOMPC, que presenta un enfoque distinto al de los esquemas introducidos por Vaccarrini et. al. (2009) y Mercangöz y Doyle III (2007), que se basan en el esquema GPC.

Este artículo se encuentra organizado de la forma siguiente: en la Sección II se presenta el control predictivo óptimo centralizado (Rossiter, 2003). En la Sección III se muestra el control predictivo óptimo distribuido desarrollado. En la Sección IV se realiza la implementación en simulación de los esquemas OMPC y DOMPC aplicados a un sistema de 4 tanques interconectados. Finalmente en la Sección V se dan las conclusiones del trabajo.

## II. CONTROL PREDICTIVO ÓPTIMO CENTRALIZADO

### II-A. Modelo de predicción centralizado

El control predictivo óptimo se basa en el uso de predicciones en modo dual, concepto introducido por Rossiter et. al. (1998) y Scokaert y Rawlings (1998). Al realizar las predicciones en lazo cerrado se garantiza la estabilidad del sistema al garantizar la inclusión de la cola de la predicción como posibles predicciones en el siguiente instante de muestreo y que la función costo sea una función de Lyapunov. De manera detallada en Rossiter (2003) se muestra el concepto de predicciones en modo dual y el concepto de predicciones en lazo cerrado.

El control predictivo óptimo centralizado se basa en el modelo de espacio de estado estándar sin considerar perturbaciones, en este caso, de la forma

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k; \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ , son el estado, las entradas de control y las salidas del sistema.

El sistema se regulará mediante una ley de control basada en una ganancia de retroalimentación de estados óptima tipo LQ. Esta ley de control tiene la forma (Muske y Rawlings, 1993)

$$\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{ss} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ss}) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x}_{ss}$  y  $\mathbf{u}_{ss}$  son los valores de estado estable del sistema, lo cuales se obtienen mediante (en (Muske y Rawlings, 1993) se dan los detalles para la obtención de  $\mathbf{P}_x$  y  $\mathbf{P}_u$ )

$$\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{P}_x \mathbf{r}_r; \quad \mathbf{u}_{ss} = \mathbf{P}_u \mathbf{r}_k \quad (3)$$

En base a la ganancia de retroalimentación  $\mathbf{K}$ , las predicciones de la entrada de control se establecen de la manera siguiente

$$\mathbf{u}_{k+i} - \mathbf{u}_{ss} = \begin{cases} -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{k+i} - \mathbf{x}_{ss}) + \mathbf{c}_{k+i} & i = 0, \dots, n_c - 1 \\ -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{k+i} - \mathbf{x}_{ss}) & i \geq n_c \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{c}_k$  es una señal de perturbación que se adhiere a la entrada de control. Dicha perturbación es la que garantiza la satisfacción de las restricciones del control predictivo.  $n_c$  representa los grados de libertad del controlador u horizonte de control. Por lo tanto el modelo a utilizado para el desarrollo de las ecuaciones de predicción es

$$\mathbf{x}_{k+i,k} = \Phi \mathbf{x}_{k+i} + \mathbf{B} \mathbf{c}_{k+i}; \quad \mathbf{u}_{k+i} = -\mathbf{K} \mathbf{x}_{k+i} + \mathbf{c}_{k+i} \quad (5)$$

donde  $\Phi = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ . Con este modelo se realizan las predicciones de los estados y de las entradas de control. Las ecuaciones de predicción están dadas por

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{P}_{cl} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_c \underline{\mathbf{c}}_{k-1} + \mathbf{P}_{rx} \mathbf{r}_k \\ \underline{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{P}_{cly} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{cy} \underline{\mathbf{c}}_{k-1} + \mathbf{P}_{ry} \mathbf{r}_k \\ \underline{\mathbf{u}}_k &= \mathbf{P}_{clu} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{cu} \underline{\mathbf{c}}_{k-1} + \mathbf{P}_{ru} \mathbf{r}_k \\ \underline{\Delta \mathbf{u}}_k &= \mathbf{P}_{\Delta u} \underline{\mathbf{u}}_k - \mathbf{P}_{u_{k-1}} \mathbf{u}_{k-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Los vectores de predicción tiene las siguientes dimensiones:  $\underline{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ,  $\underline{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^{p \times n_y}$  y  $\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\Delta \mathbf{u}}_k \in \mathbb{R}^{m \times n_y}$ , donde  $n_y$  es el horizonte de predicción. Por simplicidad las matrices de las ecuaciones de predicción no se incluyen, éstas se definen en Rossiter (2003).

### II-B. Función costo y restricciones centralizadas

Uno de los componentes esenciales del control predictivo es la función costo. La función costo a optimizar se deriva de una función costo de horizonte infinito. De la cual se demuestra que con la ganancia  $\mathbf{K}$ , siendo ésta una ganancia de retroalimentación de estado óptima LQ, la función costo es una función de Lyapunov, con lo cual se garantiza la estabilidad del control predictivo (Rossiter, 2003). Se define la siguiente función costo en términos de  $\underline{\mathbf{c}}_{k-1}$ :

$$J = \mathbf{z}_k^T \mathbf{P} \mathbf{z}_k + \sum_{i=0}^{n_c-1} \mathbf{c}_{k+i}^T [\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R}] \mathbf{c}_{k+i} = \|\mathbf{z}_k\|_{\mathbf{P}}^2 + \|\underline{\mathbf{c}}_{k-1}\|_{\mathbf{W}}^2 \quad (7)$$

donde  $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ss}$ ,  $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{R})$ , con  $\mathbf{R} > 0$ ,  $\mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{B} > 0 \Rightarrow \mathbf{W} > 0$ . El término  $\|\mathbf{z}_k\|_{\mathbf{P}}^2$  no depende de la variable de decisión y puede ignorarse en la minimización de la función costo (7), lo que da:

$$J_c = \|\underline{\mathbf{c}}_{k-1}\|_{\mathbf{W}}^2 \quad (8)$$

$\mathbf{P}$  se obtiene de la solución de la siguiente ecuación de Lyapunov

$$\Phi^T \mathbf{P} \Phi = \mathbf{P} - \Phi^T \mathbf{Q} \Phi - \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} \quad (9)$$

Después de la función costo, otro componente esencial del control predictivo es la definición de restricciones. Las restricciones ayudan a mantener al proceso dentro de los límites deseados. Éstas pueden acotar las entrada de control, los incrementos de las entradas de control, los estados y las salidas del proceso. En forma general las restricciones tienen la forma:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{x}}_k \leq \bar{\mathbf{x}} \quad \underline{\mathbf{u}} \leq \underline{\mathbf{u}}_k \leq \bar{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{y}} \leq \underline{\mathbf{y}}_k \leq \bar{\mathbf{y}} \quad \underline{\Delta \mathbf{u}} \leq \underline{\Delta \mathbf{u}}_k \leq \bar{\Delta \mathbf{u}} \end{aligned} \quad (10)$$

De la sustitución de las ecuaciones de predicción (6) en las restricciones (10) se obtienen las restricciones de la forma

$$\mathbf{M}_c \underline{\mathbf{c}}_{k-1} \leq \mathbf{q}_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{r}_k) \quad (11)$$

Así entonces, con la función costo (8) y las restricciones (11) se plantea el siguiente problema de programación cuadrática para el control predictivo óptimo centralizado

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}_{k-1}^* = \arg \min_{\underline{\mathbf{c}}_{k-1}} J_c \\ \text{s.t. } \mathbf{M}_c \underline{\mathbf{c}}_{k-1} \leq \mathbf{q}_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{r}_k) \end{aligned} \quad (12)$$

### III. CONTROL PREDICTIVO DISTRIBUIDO ÓPTIMO

Para el diseño del esquema DOMPC se realizan las siguientes suposiciones: i) Los controladores son síncronos, ii) los controladores se encuentra interconectados a una red LAN que sólo introduce un retardo de un instante de muestreo, iii) en cada subcontrolador los horizontes de predicción y control son iguales  $n_{yi} = n_{yj}, n_{ci} = n_{cj}, \forall i, j = 1, \dots, s, j \neq i$ .  $n_{yi}$  y  $n_{ci}$  son los horizontes de predicción y de control respectivamente.

#### III-A. Ecuaciones de predicción

Para el desarrollo del DOMPC se parte del siguiente modelo distribuido no perturbado el cual incluye la regulación a referencias constantes, el proceso se encuentra compuesto por  $s$  subsistemas

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ik+1} &= \Phi_{ii} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{B}_{ii} \mathbf{c}_{ik} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rDii} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{w}_{ik} \\ \mathbf{y}_{ik} &= \mathbf{C}_{ii} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{v}_{ik} \\ \mathbf{u}_{ik} &= -\mathbf{K}_{ii} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{c}_{ik} + \mathbf{P}_{rii} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{h}_{ik} \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $\Phi_{ii} = \mathbf{A}_{ii} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{Dii}$ ,  $\mathbf{B} \mathbf{K}_{Dii} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{K}_{pi}$ ,  $\mathbf{B} \mathbf{P}_{rDii} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{P}_{rpi}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , donde  $s$  es el número de subsistemas que componen el proceso.  $\mathbf{x}_{ik} \in$

$\mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{u}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i}$  y  $\mathbf{y}_{ik} \in \mathbb{R}^{p_i}$  son el estado, las entradas de control y las salidas de cada subsistema respectivamente.

El modelo de interacción para cada subsistema está descrito por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{ik} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s \Phi_{ij} \mathbf{x}_{jk} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{B}_{ij} \mathbf{c}_{jk} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{B} \mathbf{P}_{rDij} \mathbf{r}_{jk} \\ \mathbf{v}_{ik} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{C}_{ij} \mathbf{x}_{jk} \\ \mathbf{h}_{ik} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s -\mathbf{K}_{ij} \mathbf{x}_{jk} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{P}_{rij} \mathbf{r}_{jk} \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\Phi_{ij} = \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{Dij}$ ,  $\mathbf{B} \mathbf{K}_{Dij} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{K}_{pj}$ ,  $\mathbf{B} \mathbf{P}_{rDij} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{P}_{rpi}$ . Los modelos de predicción de interacción contarán con la información retrasada un instante de tiempo.

Iterando el modelo distribuido (13) se generan las siguientes ecuaciones de predicción

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{ik} &= \mathbf{P}_{cli} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{ci} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rxi} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{cli} \underline{\mathbf{w}}_{ik} \\ \underline{\mathbf{y}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clyi} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cyi} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{ryi} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{clyi} \underline{\mathbf{w}}_{ik} \\ &\quad + \underline{\mathbf{v}}_{ik} \\ \underline{\mathbf{u}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clui} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cui} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{P}_{ru_i} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{clui} \underline{\mathbf{w}}_{ik} \\ &\quad + \underline{\mathbf{h}}_{ik} \\ \underline{\Delta \mathbf{u}}_{i(k)} &= \mathbf{P}_{\Delta u_i} \underline{\mathbf{u}}_{ik} - \mathbf{P}_{u_i(k-1)} \mathbf{u}_{i(k-1)} \end{aligned} \quad (15)$$

Las ecuaciones de predicción de interacción se obtienen iterando el modelo (14), y considerando el retardo de un instante de muestreo se tiene

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{w}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clwi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{v}}_{ik} &= \mathbf{C}_{vi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{h}}_{ik} &= \mathbf{K}_{hwi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{rhi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (16)$$

sustituyendo (16) en (15) se tiene

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{ik} &= \mathbf{P}_{cli} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{ci} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rxi} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{P}_{clwi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{y}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clyi} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cyi} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{ryi} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{P}_{wcvyi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{clyi} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{clyi} \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\mathbf{u}}_{ik} &= \mathbf{P}_{clui} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{H}_{cui} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{P}_{ru_i} \mathbf{r}_{ik} + \mathbf{P}_{wkui} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{clui} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{R}_{prwhi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \\ \underline{\Delta \mathbf{u}}_{i(k)} &= \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{P}_{clui} \mathbf{x}_{ik} + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{H}_{cui} \underline{\mathbf{c}}_{ik} + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{P}_{ru_i} \mathbf{r}_{ik} \\ &\quad + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{P}_{wkui} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{W}_{clui} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{R}_{prwhi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{u_i(k-1)} \mathbf{u}_{i(k-1)} \end{aligned} \quad (17)$$

donde los vectores de predicción tienen las siguientes dimensiones:  $\underline{\mathbf{x}}_{ik} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_{y_i}}$ ,  $\underline{\mathbf{y}}_{ik} \in \mathbb{R}^{p_i \times n_{y_i}}$  y  $\underline{\mathbf{u}}_{ik}, \underline{\Delta \mathbf{u}}_{ik} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_{y_i}}$ .  $\underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{(s-1)(n_i \times n_{y_i})}$  es el vector de estados de interacción,  $\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{(s-1)(m_i \times n_{c_i})}$  es el vector de perturbaciones de interacción,  $\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{(s-1)(p_i \times n_{y_i})}$  es el vector de interacción de referencias. Estos vectores de interacción tienen la información retrasada un instante de muestreo.  $\mathbf{P}_{c_{wv}y_i} = \mathbf{W}_{c_{ly}i} \mathbf{P}_{c_{lwi}} + \mathbf{C}_{v_i}$ ,  $\mathbf{P}_{w_{kui}} = \mathbf{W}_{c_{lwi}} \mathbf{P}_{c_{lwi}} + \mathbf{K}_{h_{ui}}$ ,  $\mathbf{R}_{p_{rwhi}} = \mathbf{W}_{c_{lwi}} \mathbf{B}_{p_{rwi}} + \mathbf{P}_{r_{hi}}$ .

### III-B. Función costo Distribuida

La función costo para el esquema DOMPC se fundamenta en la función costo del control predictivo en modo dual. Para el caso distribuido se redefine la función como:

$$J_{ik} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{i(k+j+1)}^T \mathbf{Q}_{ii} \mathbf{x}_{i(k+j+1)} + \mathbf{u}_{i(k+j)}^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{u}_{i(k+j)} \quad (18)$$

Para cada subsistema se definen las siguientes predicciones de estados y de entradas de control independientes de las interacciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i(k+j+1)} &= \Phi_{ii} \mathbf{x}_{i(k+j)} = \Phi_{ii}^j + \mathbf{x}_{ik} \\ \mathbf{u}_{i(k+j)} &= -\mathbf{K}_{ii} \mathbf{x}_{i(k+j)} = -\mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii}^j \mathbf{x}_{ik} \end{aligned} \quad (19)$$

Sustituyendo (19) en (18) se tiene

$$\begin{aligned} J_{ik} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{ik}^T (\Phi_{ii}^{j+1})^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii}^{j+1} \mathbf{x}_{ik} \\ &+ \mathbf{x}_{ik}^T \mathbf{K}_{ii}^T (\Phi_{ii}^j)^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii}^j \mathbf{x}_{ik} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{ik}^T \underbrace{[(\Phi_{ii}^{j+1})^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii}^{j+1} + \mathbf{K}_{ii}^T (\Phi_{ii}^j)^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii}^j]}_{\mathbf{P}_{ii}} \mathbf{x}_{ik} \\ &= \mathbf{x}_{ik}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{x}_{ik} \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\mathbf{P}_{ii} = \sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_{ii}^{j+1})^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii}^{j+1} + \mathbf{K}_{ii}^T (\Phi_{ii}^j)^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii}^j$

Para cada subsistema se obtendrá una matriz  $\mathbf{P}_{ii}$  de la solución de la siguiente ecuación de Lyapunov

$$\Phi_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \Phi_{ii} = \mathbf{P}_{ii} - \Phi_{ii}^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{K}_{ii} \quad (21)$$

La función costo a optimizar se plantea de manera similar a la función costo del caso centralizado, ésta se define de la siguiente manera en términos de  $\underline{\mathbf{c}}_{k-1}$ :

$$\begin{aligned} J_i &= \mathbf{z}_{ik}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{z}_{ik} + \sum_{j=0}^{n_{ic}-1} \mathbf{c}_{i(k+j)}^T [\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}] \mathbf{c}_{i(k+j)} \\ &= \|\mathbf{z}_{ik}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2 + \|\underline{\mathbf{c}}_{i(k-1)}\|_{\mathbf{W}_{ii}}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $\mathbf{z}_{ik} = \mathbf{x}_{ik} - \mathbf{x}_{iss}$ ,  $\mathbf{W}_{ii} = \text{diag}(\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii})$ , con  $\mathbf{R}_{ii} > 0$ ,  $\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} > 0 \Rightarrow \mathbf{W}_{ii} > 0$ . Al igual que

en el caso centralizado, el término  $\|\mathbf{z}_{ik}\|_{\mathbf{P}_{ii}}^2$ , ya que no depende de la variable de decisión, puede ignorarse en la minimización de la función costo (22), por tanto, se tiene que:

$$J_{c_i} = \|\underline{\mathbf{c}}_{i(k-1)}\|_{\mathbf{W}_{ii}}^2 \quad (23)$$

Con la función costo ya definida, en el punto siguiente se definen las restricciones del DOMPC.

### III-C. Restricciones

Las restricciones para el esquema DOMPC se definen de manera similar que en el caso centralizado. Obviamente no serán iguales debido a que las ecuaciones de predicción del DOMPC dependen de la información de los estados y de las entradas de los demás subsistemas. Las restricciones en las entradas, las salidas, los estados y los incrementos de las entradas de manera general tiene la forma:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_i &\leq \underline{\mathbf{x}}_{ik} \leq \bar{\mathbf{x}}_i & \underline{\mathbf{u}}_i &\leq \underline{\mathbf{u}}_{ik} \leq \bar{\mathbf{u}}_i \\ \underline{\mathbf{y}}_i &\leq \underline{\mathbf{y}}_{ik} \leq \bar{\mathbf{y}}_i & \underline{\Delta \mathbf{u}}_i &\leq \underline{\Delta \mathbf{u}}_{ik} \leq \bar{\Delta \mathbf{u}}_i \end{aligned} \quad (24)$$

Por tanto, las restricciones tendrán la forma

$$\mathbf{M}_{c_i} \underline{\mathbf{c}}_{i(k-1)} \leq \mathbf{q}_{c_i} (*) \quad (25)$$

donde  $* \Rightarrow \mathbf{x}_{ik}, \mathbf{u}_{i(k-1)}, \mathbf{r}_{ik}, \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1}, \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}$

Con la función costo (23) y las restricciones (25) se obtiene el siguiente problema de programación cuadrática para cada subsistema considerando las interacciones:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}_{i(k-1)}^* &= \arg \min_{\underline{\mathbf{c}}_{k-1}} J_{c_i} \\ \text{s.t. } \mathbf{M}_{c_i} \underline{\mathbf{c}}_{i(k-1)} &\leq \mathbf{q}_{c_i} (*) \end{aligned} \quad (26)$$

Los términos de la función costo y la matriz  $\mathbf{M}_{c_i}$ , al igual que en el caso centralizado, se pueden calcular fuera de línea, mientras que la matriz  $\mathbf{q}_{c_i} (*)$  deberá ser actualizada por el estado actual, la entrada de control del instante anterior, la referencia del subsistema, el vector de interacción de estados, el vector de perturbaciones óptimas y las referencias de los demás subsistemas.

## IV. SIMULACIÓN

El sistema de cuatro tanques acoplados es un proceso que presenta interacción en las entradas de control. A este proceso, por su construcción, se puede aplicar control distribuido, ya que el modelo resultante se puede particionar en dos subsistemas. Este sistema cuenta con 2 bombas de corriente directa y dos válvulas de tres vías que distribuyen el flujo que generan las bombas a los tanques. Los resultados obtenidos en la evaluación de los esquemas OMPC y DOMPC son en simulación. El retardo de tiempo se introduce mediante el uso de un retardo unitario. Para la

TABLA I  
PARÁMETROS DEL SISTEMA DE CUATRO TANQUES

Parámetro	Variable	Valor	Unidades
Alturas 1 y 2	$(h_1^0, h_2^0)$	(12,4, 1,8)	[cm]
Alturas 3 y 4	$(h_3^0, h_4^0)$	(1,4, 12,7)	[cm]
Voltaje bombas	$(v_1^0, v_2^0)$	(3, 3)	[V]
Ganancias bombas	$(k_1, k_2)$	(3,33, 3,35)	[cm <sup>3</sup> /Vs]
Apertura de las válvulas	$(\gamma_1, \gamma_2)$	(0,7, 0,6)	
Área T1 y T2	$(A_1, A_2)$	28	[cm <sup>2</sup> ]
Área T3 y T4	$(A_3, A_4)$	32	[cm <sup>2</sup> ]
Restricciones salida T1 y T2	$(a_1, a_2)$	0,071	[cm <sup>2</sup> ]
Restricciones salida T3 y T4	$(a_3, a_4)$	0,057	[cm <sup>2</sup> ]
Ganancia sensores de nivel	$k_c$	0.5	[V/cm]
Constante gravitacional	$g$	981	[cm/s <sup>2</sup> ]

simulación se utilizó Matlab<sup>®</sup> y para resolver el problema de programación cuadrática se utilizó la función quadprog.

En la Figura 1 se muestra el diagrama esquemático del sistema de tanques. El flujo de salida del tanque dos entra al tanque uno y el flujo de salida del tanque tres entra al tanque 4. Por este motivo, el sistema no presenta interacción en los estados. Por otro lado, el flujo de la bomba 1 entra al tanque uno y al tanque 3, a través de la válvula 1; el flujo de la bomba 2 entra al tanque 2 y al tanque 4 a través de la válvula dos. Debido a esta distribución de flujos es que existe interacción en las entradas de este sistema.

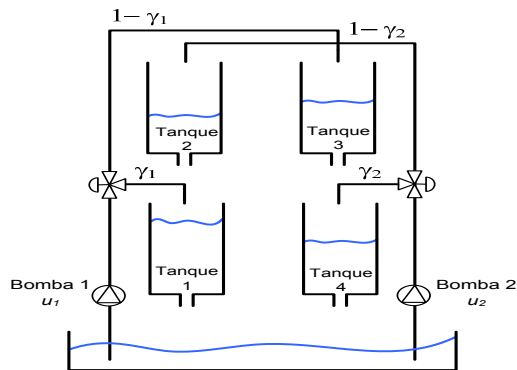


Figura 1. Diagrama esquemático del sistema de 4 tanques

Los parámetros del sistema y el punto de linealización se tomaron de Johansson (2000). En la Tabla I se muestran estos datos.

#### IV-A. Modelo del sistema

El modelo utilizado de los cuatro tanques para la simulación de los esquemas OMPC y DOMPC es el siguiente

modelo lineal en espacio de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{A_2}{A_1 T_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3}{A_4 T_3} & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_2} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_3} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_4} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (27)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

donde  $T_i = \sqrt{2h_i^0(A_i/a_i)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

El modelo se discretizó con un periodo de muestreo de 3 seg. Posteriormente se realizó la partición del sistema de la siguiente manera

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0,9533 & 0,1152 \\ 0 & 0,8820 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0,9048 & 0 \\ 0,0936 & 0,9673 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 0,2439 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0,0085 \\ 0,1349 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0,0891 \\ 0,0045 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1853 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21} = \mathbf{0}_{2 \times 2},$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} k_c & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & k_c \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{12} = \mathbf{C}_{21} = \mathbf{0}_{1 \times 2}$$

Las restricciones utilizadas para esta aplicación son

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{u}_{1k} \leq 10 & & 0 \leq \mathbf{u}_{2k} \leq 10 \\ 0 \leq \mathbf{y}_{1k} \leq 19,9 & & 0 \leq \mathbf{y}_{2k} \leq 19,9 \end{aligned} \quad (28)$$

No se utilizaron restricciones en los incrementos de la señal de control.

#### IV-B. Resultados

Es este punto se muestran los resultados obtenidos en la aplicación en simulación de los esquemas OMPC y DOMPC al sistema de tanques. Los tanques sobre los que se tiene control de los niveles son el 1 y el 4, los niveles de los tanques 2 y 3 no se controlan. En la Figura 2 se muestra los resultados obtenidos con el esquema OMPC. En esta figura se puede observar que cuando existe una violación de las restricciones, en este caso en las entradas de control, se genera la señal de perturbación necesaria para mantenerla dentro de los límites de la restricción. En lo que respecta al comportamiento de los niveles de los tanques 1 y 4, cabe resaltar que el nivel del tanque 4 al inicio se estabiliza lentamente.

En la Figura 3 se muestran los resultados obtenidos con el esquema OMPC. En esta figura se puede observar que las violación de las restricciones se compensan mediante la perturbación. La diferencia al caso centralizado es que cada una se optimiza por separado. Con respecto a los

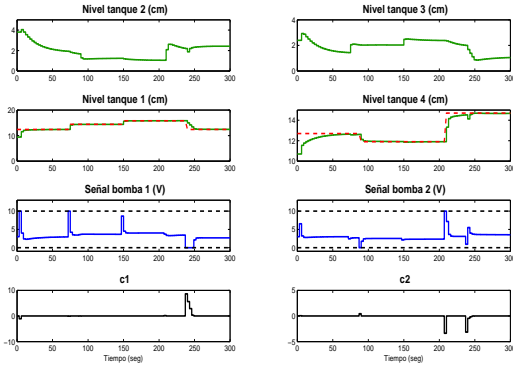


Figura 2. Niveles de los tanques 1 y 4 con el esquema OMPC

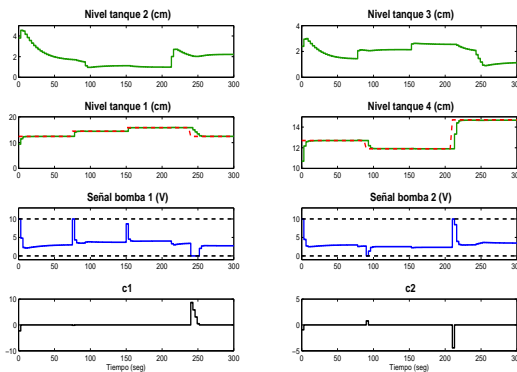


Figura 3. Niveles de los tanques 1 y 4 con el esquema DOMPC

niveles de los tanques, el tanque 4 se estabiliza en un menor tiempo que el caso centralizado.

En la Tabla II se muestra el resultado de la evaluación de la función costo (29) para los esquemas OMPC y DOMPC. En esta tabla se puede observar que el costo obtenido con el esquema OMPC es menor que el obtenido con el esquema DOMPC. En esta misma tabla se muestran los costos para el error y el esfuerzo de control. Como se observa, los costos obtenidos de los esfuerzos de control no presenta gran diferencia, pero los costos del error si tienen una diferencia significativa, haciendo que el esquema OMPC tenga un menor costo.

$$J = \underbrace{\|y_k - r_k\|_Q^2}_{J_e} + \underbrace{\|u_k\|_R^2}_{J_u} \quad (29)$$

## V. CONCLUSIONES

Partiendo de los conceptos de control predictivo de modo dual y de los conceptos de control predictivo óptimo de desarrolló el esquema de control predictivo distribuido óptimo. Los resultados en simulación demuestran la factibilidad de la aplicación del esquema DOMPC y de

TABLA II  
COSTOS OBTENIDOS DE LOS ESQUEMAS OMPC Y DOMPC.

	Costo OMPC	Costo DOMPC
$J$	43.6069	77.1042
$J_e$	20.0180	53.0396
$J_u$	23.5889	24.0646

realizar la optimización de forma distribuida. En lo que respecta a los costos obtenidos de los esquemas OMPC y DOMPC, el costo del esquema DOMPC es mayor al costo del esquema OMPC. En este trabajo no se realiza el análisis de la causa del aumento del costo, pero en trabajos futuros se abordará. En el diseño del esquema DOMPC no se considera el rechazo a perturbaciones, sólo la regulación a una referencia constante. La inclusión de retardos de más de un instante de muestreo no se abordan en este trabajo.

## REFERENCIAS

- Camponogara, E., D. Jia, B. H. Krogh y S. Talukdar (2002). Distributed Model Predictive Control. *IEEE Control System Magazine* **22**, 44–52.
- Fukushima, H., K. Kon y F. Matsuno (2005). Distributed Model Predictive Control for Multi-Vehicle Formation with Collision Avoidance Constraints. *IEEE European Control Conference*, Sevilla, España. 5480–5485.
- Jia, D. y B. H. Krogh (2001). Distributed Model Predictive Control. *IEEE American Control Conference*, Arlington, VA., 2767–2771.
- Johansson, K. H. (2000). The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory with an Adjustable Zero. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* **8**, 456–465.
- Leirens, S., C. Zamora, R. R. Negenborn y B. De Schutter (2010). Coordination in Urban Water Supply Networks using Distributed Model Predictive Control. *IEEE American Control Conference*, Marriott, Waterfront, Baltimore, MD, USA., 3957–3962.
- Maestre, J. M., D. Muñoz de la Peña y E. F. Camacho (2009). Distributed MPC based on a Cooperative Game. *IEEE Chinese Control Conference*, Shanghai, P. R. China, 5390–5395.
- Mercangöz, M. y F. J. Doyle III (2007). Distributed Model Predictive Control of an Experimental Four-Tank System. *Journal of Process Control* **17**, 297–308.
- Michalska, H. y D. Q. Mayne (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* **36**, 1623–1633.
- Muske, K. R. and J. B. Rawlings (1993). Model predictive control with linear models. *American Institute of Chemical Engineers (AIChE) Journal* **39**, 262–287.
- Rossiter, J. A., B. Kouvaritakis y M. J. Price (1998). A numerically robust state-space approach to stable-predictive control strategies. *Automatica* **33**, 789–797.
- Rossiter, J. A. (2003). Model-Based Predictive Control: A Practical Approach. *CRC PRESS*.
- Sokaert, P. O. M., J. B. Rawlings (1998). Constrained linear quadratic regulation. *IEEE Transaction on Automatic Control* **43**, 1163–1168.
- Vaccarrini, M., S. Longhi y M. R. Katebi (2009). Unconstrained networked decentralized model predictive control. *Journal of Process Control* **14**, 328–339.
- Venkat, A. N., I. A. Hiskens, J. B. Rawling y S. J. Wright (2008). Distributed MPC Strategies with Application to Power System Automatic Generation Control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **16**, 1192–1206.