

# Superficie deslizante discontinua aplicada a un sistema torsional

Ricardo Cuesta<sup>†,‡</sup>, Joaquín Alvarez<sup>†</sup>, Cesar Liera<sup>†</sup>, Moises Miranda<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, CICESE, {jcuesta, jqalvar, cliera}@cicese.mx

<sup>‡</sup> Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, UABC, {ricardo.cuesta, mmiranda}@uabc.edu.mx

**Resumen**—Se propone un controlador que presenta una superficie deslizante discontinua para regular la posición de un sistema torsional con fricción viscosa. Se muestra que el sistema evoluciona a una velocidad constante hasta llegar a la posición deseada, posteriormente la solución sale de la superficie para converger al origen en las variables de error. Se demuestra que el origen es el único punto de equilibrio y que éste es asintóticamente estable. Se propone una familia de superficies discontinuas con las que se tienen las mismas cualidades de estabilidad. Se incluyen ejemplos numéricos y experimentales para ilustrar y complementar la teoría.

**Palabras clave:** Modos deslizantes, regulación, estabilidad asintótica.

## I. INTRODUCCIÓN

Un problema de estudio importante es el control de sistemas que presentan incertidumbres y/o perturbaciones. Una de las estrategias de control más efectivas desarrolladas para esta clase de sistemas es el control por modos deslizantes [1]. El control por modos deslizantes es robusto ante incertidumbres e insensible a las perturbaciones acotadas y acopladas a la señal de control, su aplicación a sistemas electro-mecánicos para el caso de regulación ha sido estudiado por diversos autores [2], [3].

En este trabajo se presenta el desarrollo de un control de regulación por modos deslizantes, donde la superficie deslizante presenta una discontinuidad, lo cual permite bajo ciertas condiciones que el sistema llegue a la posición deseada con una velocidad constante y posteriormente converja de forma asintótica al punto de equilibrio. La superficie deslizante propuesta, al presentar una discontinuidad, no permite el uso de las herramientas propuestas por Utkin [1] para mostrar que se tiene convergencia al punto de equilibrio. Por lo que se presenta un análisis a partir del campo vectorial, así como resultados numéricos y experimentales para mostrar que el esquema de control propuesto converge al punto de equilibrio.

## II. MODELO

Considere el sistema mecánico torsional que se ilustra en la figura 1. Dicho sistema cuenta con una carga inercial dada por  $J$  y una fricción viscosa cuyo coeficiente está dado por  $b$ . La entrada de control  $u$  se aplica a la flecha principal mediante un motor de corriente directa por medio de engranes y bandas dentadas. La salida del sistema ( $q$ ) es la posición angular de la carga inercial medida por un encoder óptico

conectado mecánicamente a la flecha mediante engranes y bandas dentadas. Una ecuación diferencial que puede describir al sistema antes descrito es

$$J\ddot{q} + b\dot{q} = u. \quad (1)$$

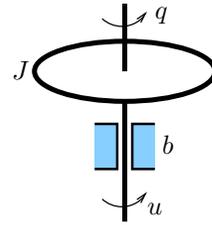


Figura 1. Sistema mecánico torsional.

Definiendo la posición y velocidad angular como  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, tenemos que las ecuaciones de estado del sistema descrito en (1) son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= J^{-1}(u - bx_2) \end{aligned} \quad (2)$$

De esta forma, dado el sistema (2), el objetivo principal de este trabajo es diseñar un controlador para que dicho sistema tenga una velocidad constante mientras alcanza una referencia deseada.

## III. CONTROLADOR

Suponga que para el sistema (2) se implementa el siguiente controlador

$$u = -\alpha \text{sign}(\beta \text{sign} x_1 + x_2), \quad (3)$$

con  $\alpha, \beta$  constantes reales positivas y la función  $\text{sign}(\cdot)$  se define como.

$$\text{sign}(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi < 0 \\ [-1, 1], & \xi = 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases} \quad (4)$$

La ley de control (3) divide el espacio de estado en dos regiones, tal como se muestra en la figura 2. Las regiones están delimitadas en el plano de fase por la superficie

$$x_2 = -\beta \text{sign} x_1. \quad (5)$$

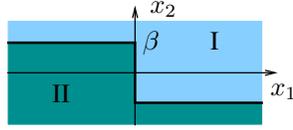


Figura 2. Regiones generadas por la superficie discontinua.

La región I se tiene cuando  $x_2 + \beta \text{sign } x_1 > 0$ , mientras que  $x_2 + \beta \text{sign } x_1 < 0$  define a la región II. Así, dentro de las regiones, las ecuaciones de estado (2) son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= J^{-1}(\mp \alpha - bx_2) \end{aligned} \quad (6)$$

donde el signo negativo (positivo) de  $\alpha$  corresponde a la región I (II). De esta forma, las soluciones de (6) dentro de las regiones son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} + (1 - e^{-\hat{b}(t-t_0)})(x_{20} \pm \hat{\alpha})/\hat{b} \mp \hat{\alpha}(t - t_0) \\ x_2(t) &= e^{-\hat{b}(t-t_0)}(x_{20} \pm \hat{\alpha}) \mp \hat{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\hat{\alpha} = \alpha/b$ ,  $\hat{b} = b/J$  y  $x_{10} = x_1(t_0)$ ,  $x_{20} = x_2(t_0)$  son las condiciones iniciales del sistema en el instante  $t_0$ .

### III-A. Atracción y deslizamiento

Observe de (7) que, si la superficie  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = -\beta \text{sign } x_1\}$  es atractora, las trayectorias convergen a dicha superficie en tiempo finito, y si además dicha superficie es deslizante, la solución evolucionará sobre la superficie [4].

En nuestro caso, debido a la construcción de la superficie, si ésta es atractora y deslizante, impondrá una velocidad constante dada por  $\beta$  (véase figura 3).

Entonces, para que la superficie  $\beta \text{sign } x_1 + x_2 = 0$  sea atractora, la componente vertical del campo vectorial debe apuntar hacia la superficie, es decir, se debe satisfacer que  $\dot{x}_2 < 0$  para la región I y que  $\dot{x}_2 > 0$  para la región II.

Veamos las condiciones que se deben cumplir para que  $\dot{x}_2 > 0$  cuando el sistema se encuentra en la región II. Primeramente, dado que  $\dot{x}_2 > 0$ , entonces de (6) tenemos que  $J^{-1}(\alpha - bx_2) > 0$ , por lo que  $x_2 < \hat{\alpha}$ . De esta forma, cuando la velocidad es negativa (i.e.  $x_2 < 0$ ) la desigualdad anterior siempre se satisface debido a que  $\hat{\alpha}$  es positiva. Sin embargo, cuando la velocidad es positiva, ésta no puede ser mayor a  $\hat{\alpha}$ ; es decir, la velocidad impuesta  $\beta$  tiene que satisfacer que  $\beta < \hat{\alpha}$ . Un razonamiento similar se emplea cuando se está en la región I y se llega a la misma condición. De esta forma, la superficie  $S$  es atractora si

$$\beta < \hat{\alpha}. \quad (8)$$

Por otra parte, la superficie (5) será deslizante debido a que  $\dot{x}_1 = x_2$ , independientemente de la región. Así, sobre la superficie, cuando  $x_1 < 0$ , tenemos que  $x_2 > 0$ , por lo que la solución se deslizará sobre la superficie de izquierda a derecha y, cuando  $x_1 > 0$ , la solución se deslizará sobre la superficie de derecha a izquierda.

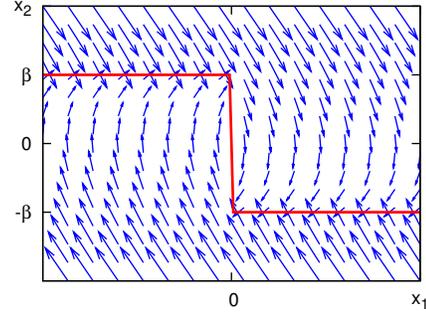


Figura 3. Campo vectorial y superficie de conmutación.

Con esto concluimos que la superficie (5) del sistema (2)-(3) es atractora y deslizante si se satisface (8).

La condición (8) aparece también como una restricción natural del sistema, ya que éste no podrá adquirir una velocidad mayor que la aportada por la entrada menos la oposición que ofrece la fricción y su relación con la carga inercial.

### III-B. Estabilidad

En la sección anterior se demostró que la superficie (5) es atractora y deslizante y que estando sobre dicha superficie, la posición  $x_1$  se dirige a cero con una rapidez  $\beta$ . Lo siguiente en nuestro análisis, es determinar el comportamiento y la estabilidad cuando la solución deja la superficie, es decir, cuando  $x_1 = 0$  y  $x_2 = \pm\beta$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que la solución deja la superficie en el instante  $t_0 = 0$ , es decir,  $x(0) = (0, \pm\beta)^T$ , por lo que (7) quedará como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \pm(1 - e^{-\hat{b}t})(\beta + \hat{\alpha})/\hat{b} \mp \hat{\alpha}t, \\ x_2(t) &= \pm e^{-\hat{b}t}(\beta + \hat{\alpha}) \mp \hat{\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Lo siguiente es determinar el tiempo  $t_1$  en que la solución cruza nuevamente el eje  $x_2$  tal como se muestra en la figura 4.

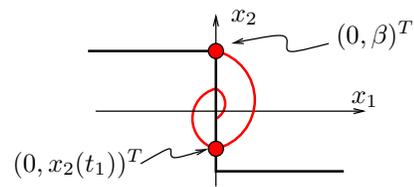


Figura 4. Evolución del sistema al dejar la superficie deslizante.

Expandiendo en series de Taylor y truncando hasta el tercer término despejemos el tiempo de la ecuación  $x_1(t) \approx 0$  obteniendo que

$$t_1 \approx t_1^+ = \frac{2}{\hat{b}} \frac{\beta}{\beta + \hat{\alpha}}. \quad (10)$$

Por otra parte, al sustituir  $t_1^+$  en  $x_2(t)$  y expandiendo en

series de Taylor hasta el tercer término, obtenemos

$$x_2(t_1^+) \approx \pm\beta \cdot \frac{\beta - \hat{\alpha}}{\beta + \hat{\alpha}}. \quad (11)$$

Debido a que  $|(\beta - \hat{\alpha})/(\beta + \hat{\alpha})| < 1$  para toda  $\hat{\alpha}, \beta > 0$  tenemos que  $x_2(t_1) < x_2(t_0)$ . Considerando ahora el punto  $x(t_1^+)$  como la nueva condición inicial, podemos reemplazar  $\beta$  por  $x_2(t_1^+)$  en (9) y realizar el mismo procedimiento antes descrito. De esta forma, cuando la solución deje la superficie deslizante, ésta cruzará el eje  $x_2$  con una velocidad menor con la que salió y así sucederá cada que  $x_1 = 0$  y  $|x_2| \leq \beta$ , por lo que  $x_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### III-C. Sobrepaso máximo

Suponga las condiciones que dieron origen a la ecuación (9), entonces el sobrepaso que tendrá la posición  $x_1$  sucederá cuando  $\dot{x}_1 = x_2 = 0$ . Resolviendo, obtenemos

$$t^* = -\frac{1}{b} \ln \left( \frac{\hat{\alpha}}{\beta + \hat{\alpha}} \right) \quad (12)$$

De esta forma, tenemos que el sobrepaso estará dado por

$$x_1(t^*) = \pm \frac{\beta}{b} \pm \frac{\hat{\alpha}}{b} \ln \left( \frac{\hat{\alpha}}{\beta + \hat{\alpha}} \right) \quad (13)$$

Podemos reemplazar  $\beta$  por  $x_{20} \in (-\beta, \beta)$  en (9) y realizar el mismo procedimiento antes descrito. Haciendo eso de manera iterativa y de acuerdo al apartado anterior, tenemos que  $x_2 \rightarrow 0$  por lo que, de la ecuación (13), tenemos que  $x_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por otra parte, de las ecuaciones de estado (6) y de la solución (7), no es difícil ver que el origen es el único punto de equilibrio.

De esta forma, obtenemos el siguiente resultado:

*Teorema 1:* Si el sistema (2) tiene a (3) como ley de control, entonces el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio asintótico global.

## IV. GENERALIZACIONES

### IV-A. Regulación

Si deseamos que el sistema (1) llegue a una posición constante  $x_d \neq 0$ , podemos definir la siguiente ley de control

$$u = -\alpha \text{sign}(\beta \text{sign}(x_1 - x_d) + x_2) \quad (14)$$

y haciendo  $e_1 = x_1 - x_d$  y  $e_2 = x_2$ , obtenemos las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= J^{-1}(-\alpha \text{sign}(\beta \text{sign} e_1 + e_2) - b e_2) \end{aligned} \quad (15)$$

Con esta estructura y al aplicar el teorema 1 tenemos que  $e_1 \rightarrow 0$  y  $e_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo que se puede concluir que  $x_1 \rightarrow x_d$  y  $x_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### IV-B. Otra superficie discontinua

La superficie dada en (5) no es la única superficie discontinua capaz de estabilizar el origen del sistema (1) de forma asintótica. Sin pérdida de generalidad, suponga el sistema (1) con  $J = 1$  y la ley de control  $u = -\alpha \text{sign}(s)$ , donde  $s$  se puede definir como

$$s = \beta \text{sign} x_1 + x_2 + f(x_1, x_2), \quad (16)$$

con  $f$  una función escalar y diferenciable. La intención es determinar las condiciones de  $f$  para que  $s$  sea una superficie atractora y deslizante para todo el espacio de estado fuera de  $x_1 = 0$ . Si  $x_1 > 0$  entonces  $s = \beta + x_2 + f(x_1, x_2)$ . Así, la superficie  $s$  es atractora si  $s\dot{s} < 0$  cuando  $s \neq 0$  [Referencia]. En este caso tenemos que

$$s\dot{s} = -\alpha(1 - f_{x_2})|s| - s x_2(b(1 + f_{x_2}) - f_{x_1}), \quad (17)$$

donde  $f_{x_i} = \partial f / \partial x_i$  con  $i = \{1, 2\}$ . Una manera sencilla de que  $s\dot{s} < 0$  es haciendo

1.  $1 - f_{x_2} > 0$  y
2.  $b(1 + f_{x_2}) - f_{x_1} = 0$ .

Del primer punto obtenemos que  $f_{x_2} < 1$  y del segundo punto tenemos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = b \left( 1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right). \quad (18)$$

Resolviendo obtenemos que

$$f(x_1, x_2) = c(bx_1 + x_2) + bx_1, \quad (19)$$

con  $c$  una constante real. Debido a la condición que  $f_{x_2} < 1$ , obtenemos que  $c < 1$ . Si  $x_1 < 0$  entonces  $s = -\beta + x_2 + f(x_1, x_2)$  y se realiza un procedimiento similar al anterior y se llega a las mismas condiciones. Finalmente, tenemos que una superficie atractora será

$$s = \beta \text{sign} x_1 + (1 + c)(x_2 + bx_1), \quad c < 1. \quad (20)$$

Sobre la superficie, la dinámica está dada por  $\dot{x}_1 + bx_1 = -\beta/(1 + c) \text{sign} x_1$ , por lo que  $x_1 \rightarrow 0$ . De esta forma la superficie es atractora y deslizante. Por último, la solución deja la superficie cuando  $x = (0, \pm\beta)^T$  al igual que sucede con la superficie (5) y, al tener condiciones iniciales idénticas, las soluciones y su estabilidad también serán idénticas. De esta forma podemos concluir que el sistema (2), con el controlador visto en esta sección, tiene un punto de equilibrio en el origen y es asintóticamente estable.

En general, cualquier superficie deslizante atractora de la forma (16) estabiliza el origen del sistema (1).

## V. EJEMPLOS

*Ejemplo 1 (Estabilización del origen):* Considere el sistema (1) y la entrada de control (3) con los siguientes parámetros  $b = 0,05$ ,  $J = 0,0206$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 1$  y las condiciones iniciales  $x_1(0) = 0,5$  y  $x_2(0) = 1,5$ . Los resultados numéricos de la posición, esfuerzo de control y plano de fase se presentan en la figura 5 cuando  $t \in [0, 5]$ .

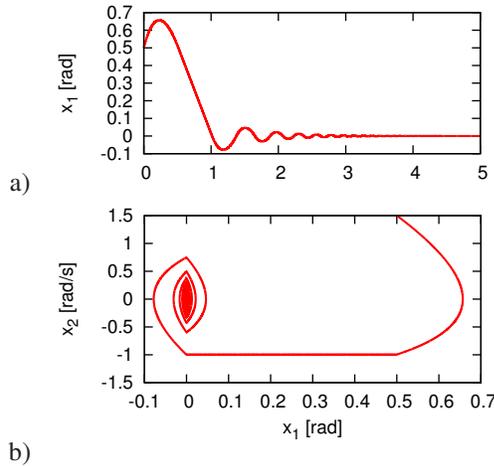


Figura 5. Resultados numéricos.

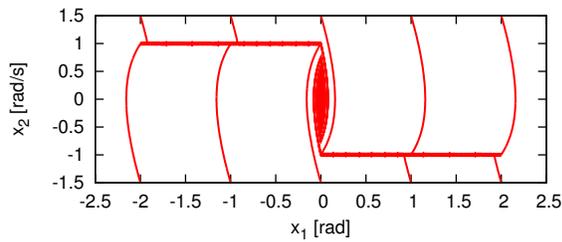


Figura 6. Retrato de fase del ejemplo 1.

En la figura 6 se muestran los resultados numéricos cuando las condiciones iniciales están dadas por  $x(0) \in X_1 \times X_2$  donde  $X_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  y  $X_2 = \{-1, 5, 1, 5\}$ .

*Ejemplo 2 (Otra superficie):* Considere el sistema (1), la entrada de control  $u = -\alpha \text{sign } s$ , con  $s = \beta \text{sign } x_1 + (1 + c)(x_2 + bx_1)$ , los parámetros  $b = 0,05$ ,  $J = 1$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\beta = 1$ ,  $c = 0$  y las condiciones iniciales  $x(0) = (0, \pm 30)^T$ . En la figura 7 se muestra la solución numérica ante las consideraciones anteriores y se compara cuando la superficie es  $s = \beta \text{sign } x_1 + x_2$  con la mismas consideraciones.

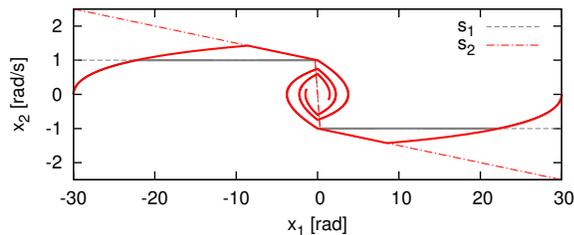


Figura 7. Otra.

Observe que la evolución es la misma para ambas superficies deslizantes desde la condición inicial hasta que la solución tiene contacto con su respectiva superficie discontinua. Después, la solución evoluciona sobre la superficie para

llegar al punto  $(0, \pm\beta)$ , y desde ese punto, las soluciones vuelven a ser idénticas.

*Ejemplo 3 (Experimento):* Para implementar físicamente el controlador propuesto en (3) se usó el equipo ECP-220 de Educational Control Products con el que cuenta el Laboratorio de Control del CICESE. El equipo se describe en la sección II. La inercia del disco usando 4 masas de 0.5kg a 10cm de la flecha principal es  $J = 0,0206 \text{kg m}^2$ . De acuerdo al manual, el coeficiente de la fricción viscosa es  $b = 0,05 \frac{\text{N/m}}{\text{rad/s}}$ . Para el controlador se propusieron los siguientes parámetros,  $\alpha = 0,1$  y  $\beta = 1$ . Para estimar la velocidad se emplea un observador lineal con una ganancia  $K = [122,57, 3,45 \times 10^3]^T$ . En la figura 8 se muestra la posición angular y el esfuerzo de control, mientras que en la figura 9 se muestra el resultado experimental en el plano de fase  $x_1 - x_2$ , junto con otros experimentos a diferentes condiciones iniciales.

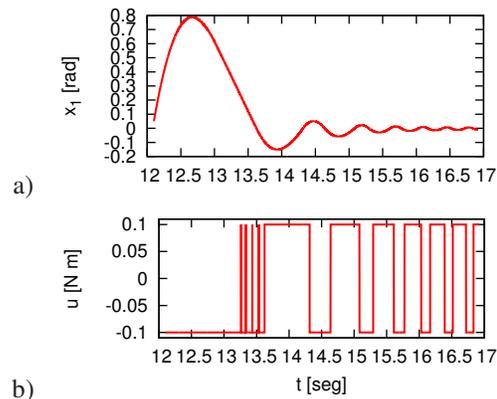


Figura 8. Posición angular.

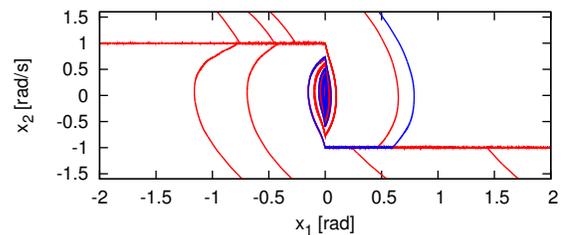


Figura 9. Retrato de fase experimental.

## VI. CONCLUSIONES

El control discontinuo con una superficie deslizante discontinua descrito en este trabajo permite que un sistema torsional alcance una posición angular deseada. Para demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado se usó un análisis diferente al convencional, debido a que la superficie es discontinua y no se pueden emplear las herramientas clásicas para su análisis. Si se desea que el sistema se mueva a una velocidad constante para alcanzar la posición deseada, se debe satisfacer la condición (8), la cual es

una restricción físicamente viable y necesaria. El resultado obtenido se puede extender a otras superficies gracias a la similitud en la discontinuidad de la superficie. Finalmente, los experimentos muestran resultados favorables y además similares a los obtenidos numéricamente.

#### REFERENCIAS

- [1] V.I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1992.
- [2] Vadim I. Utkin and Hao-Chi Chang, *Sliding Mode Control on Electro-Mechanical Systems*, Mathematical Problems in Engineering, 2002, Vol 8(4-5), pp. 451-473.
- [3] Y. Orlov, J. Alvarez, L. Acho and L. Aguilar, *Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control*, Int. J. Control, 2003, Vol 76(14) pp. 1446-1452.
- [4] V.I. Utkin, *Sliding modes and their application in variable structure systems*, Moscow, MIR Publishers, 1978.