

Control de Marcha y Confinamiento para Sistemas Multi-agente*

J. Santiaguillo-Salinas, E. Aranda-Bricaire
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica
CINVESTAV, A.P. 14-740, 07000 México D.F.
jsantiaguillo@cinvestav.mx, earanda@cinvestav.mx

Resumen—El presente artículo está enfocado al control de marcha y confinamiento de sistemas multi-agente. La estrategia de control propuesta es descentralizada y con ella se pretende que dentro de un conjunto de agentes móviles, un subconjunto de ellos (denominados líderes), realice avance en formación, mejor conocido como marcha; mientras que otro subconjunto de agentes (denominados seguidores), converja hacia el área delimitada por los agentes líderes. En este artículo se consideran agentes móviles tipo unicycle. Los resultados teóricos obtenidos son verificados mediante una simulación numérica.

Palabras clave: Sistemas Multi-agente, Control de Confinamiento, Control de marcha, Casco Convexo.

I. INTRODUCCIÓN

En años recientes, se ha puesto especial interés en el estudio de los sistemas multi-agente, ya que estos sistemas a menudo pueden resolver tareas trabajando de forma cooperativa, haciéndolas de forma más confiable, rápida y económica de lo que es posible con agentes que operan de manera individual (Cao et al., 1997).

Entre las principales aplicaciones de los sistemas multi-agente se encuentran el transporte y manipulación de objetos, localización, exploración y coordinación de movimiento (Arai et al., 2002; Cao et al., 1997). Dentro de la coordinación de movimiento, existe un problema que ha atraído la atención de los investigadores, llamado problema de confinamiento. Este problema consiste en que un grupo de agentes móviles (llamados líderes) siga una trayectoria predeterminada, mientras se garantice que otro grupo de agentes (llamados seguidores) se encuentre dentro del área determinada por los líderes durante su traslado (Ji et al., 2008).

El problema de confinamiento tiene diversas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, cuando un grupo de robots aseguran una zona para remover material peligroso y no deben salir de dicha zona, ya que pueden contaminar sus alrededores (Ji et al., 2008). También para la navegación de un grupo de robots, cuando sólo un subconjunto de ellos (líderes) tiene la capacidad de detectar obstáculos, mientras que el resto (seguidores), no tiene tal capacidad. Para los seguidores, una manera de navegar de forma segura es mantenerse dentro

del área en movimiento formada por los líderes (Li et al., 2012).

Algunos trabajos relacionados son (Cai et al., 2012; Dimarogonas et al., 2006; Ji et al., 2008; Li et al., 2012; Wen et al., 2012; Zhao et al., 2012), donde se estudia el caso en el que los agentes líderes permanecen estáticos y/o el caso con agentes líderes en movimiento. Para este último, asignando a cada uno de los líderes una trayectoria por separado, pero colocándolos de tal forma que logren un patrón geométrico al cual deben converger los seguidores. A diferencia de los trabajos mencionados y como principal aporte de este artículo, se emplea el avance en formación para los agentes líderes, mejor conocido como marcha, asignando sólo una trayectoria para el subconjunto de líderes mientras la siguen manteniendo un patrón geométrico deseado.

El objetivo de este artículo es diseñar una estrategia de control descentralizada (Lafferriere et al., 2005; Tanner and Kumar, 2005), con la finalidad de que un subconjunto de agentes llamados líderes realice marcha, mientras que otro subconjunto de agentes llamados seguidores, permanezca dentro del área formada por los líderes. En la estrategia de control se hará una pre-alimentación de la velocidad de marcha a todos los agentes del sistema, que en nuestro caso serán robots móviles tipo unicycle controlando un punto fuera del eje de las ruedas.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección II se presenta la teoría necesaria para el diseño de la estrategia de control, así como la notación empleada en este artículo. El planteamiento del problema se describe en la sección III. La estrategia de control descentralizada para lograr el control de marcha y confinamiento se presenta en la sección IV. La sección V muestra los resultados obtenidos en una simulación numérica. Por último, en la sección VI se presentan algunas conclusiones.

II. PRELIMINARES

II-A. Modelo Cinemático de Robots Móviles tipo Unicycle

Sea $N = \{R_1, \dots, R_n\}$ un conjunto de robots móviles tipo unicycle que se desplazan en el plano, con coordenadas $\xi_i = [x_i, y_i]^T$, $i = 1, \dots, n$. Cada agente tiene un modelo cinemático de acuerdo a la Figura 1 dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

*Este trabajo está financiado parcialmente por el CONACYT, México, a través del No. de Becario 243226.

con u_i y w_i la velocidad longitudinal y angular, respec-

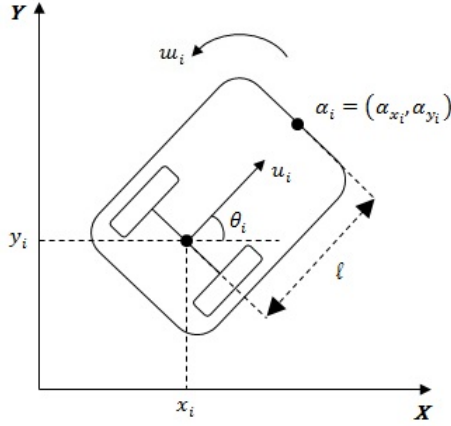


Figura 1. Modelo Cinemático del unicycle.

tivamente, del punto medio del eje de las ruedas del i -ésimo robot. Es bien conocido que sistemas como el (1), no se pueden estabilizar con leyes de control continuas e invariantes en el tiempo (Brockett, 1983). Por ello, con el fin de evitar singularidades en la ley de control, se utiliza el modelo cinemático tomando como salida a controlar un punto fuera del eje de las ruedas, en este caso tomaremos un punto en la parte frontal del robot, al que llamaremos α_i .

Las coordenadas del punto α_i están dadas por

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{x_i} \\ \alpha_{y_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i + \ell \cos \theta_i \\ y_i + \ell \sin \theta_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

Por lo que la dinámica de este nuevo punto α_i es

$$\dot{\alpha}_i = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_{x_i} \\ \dot{\alpha}_{y_i} \end{pmatrix} = A_i(\theta_i) \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} \quad (3)$$

con

$$A_i(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\ell \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \ell \cos \theta_i \end{pmatrix} \quad (4)$$

la matriz de desacoplamiento para cada robot R_i . Como se puede observar, la matriz de desacoplamiento es no singular ya que $\det(A_i(\theta_i)) = \ell \neq 0$. Cabe mencionar que en este enfoque de controlar un punto fuera del eje de las ruedas, se puede controlar la posición de dicho punto, pero no el ángulo de orientación del robot.

Definiendo $v_i = [v_{ix}, v_{iy}]^T$ como variables auxiliares de control, podemos establecer una estrategia para controlar la posición del punto α_i como

$$\begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix} = A_i^{-1}(\theta_i) \begin{pmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

con

$$A_i^{-1}(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\frac{\sin \theta_i}{\ell} & \frac{\cos \theta_i}{\ell} \end{pmatrix} \quad (6)$$

la inversa de la matriz de desacoplamiento. El sistema en lazo cerrado (3)-(5) produce

$$\dot{\alpha}_i = v_i \quad (7)$$

Las variables auxiliares de control v_i corresponden a las estrategias de control que serán diseñadas en el presente trabajo.

II-B. Teoría Algebraica de Grafos Básica

Definición 1: (Gráfica de Formación). Sea $N = \{R_1, \dots, R_n\}$ un conjunto de agentes móviles y N_i el conjunto de agentes que tienen un enlace de comunicación con el i -ésimo agente. Una gráfica de formación $G = \{V, E, C\}$ está formada por

- Un conjunto de vértices $V = \{R_1, \dots, R_n\}$ que corresponden a los n agentes del sistema.
- Un conjunto de aristas $E = \{(R_j R_i) \in V \times V\}$ con $i \neq j$ que contienen pares de vértices que representan las comunicaciones entre los agentes, por lo que si $(R_j R_i) \in E$ entonces $R_j \in N_i$.
- Un conjunto de etiquetas $C = \{c_{ji} = R_i - R_j\}$ con $(R_j R_i) \in E, c_{ji} \in \mathbb{R}^2, \forall i \neq j, j \in N_i$, es decir, c_{ji} es un vector que especifica la posición relativa deseada entre los agentes R_j y R_i .

Una gráfica de formación bien definida debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Ser conexa.
- Si existen aristas $R_j R_{m_1}, R_{m_1} R_{m_2}, \dots, R_{m_r} R_j \in E$, entonces se debe satisfacer

$$c_{jm_1} + c_{m_1 m_2} + c_{m_2 m_3} + \dots + c_{m_r j} = 0$$

- En particular, si $c_{ji}, c_{ij} \in C$ con $i \neq j$, entonces $c_{ji} = -c_{ij}$.

Una gráfica de formación G , en la cual el agente i sólo interactúa con el agente $i + 1$ y el n -ésimo agente se desempeña como líder, encargado de guiar a los demás agentes del sistema, se conoce como una gráfica directa de cadena abierta con líder (ver Figura 2). Esta gráfica también es conocida como gráfica de formación tipo convoy (Belkhouche, 2005) y es ampliamente utilizada en estrategias de control de marcha.

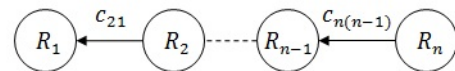


Figura 2. Gráfica directa de cadena abierta con líder.

Definición 2: (Laplaciano). Dada una gráfica de formación G , el Laplaciano asociado con G está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \Delta - \mathcal{A}_d \quad (8)$$

donde Δ es la matriz de grados definida como

$$\Delta = \text{diag} \{n_1, \dots, n_n\} \quad (9)$$

donde n_i es el número de aristas que se dirigen al vértice R_i , $i = 1, \dots, n$, y \mathcal{A}_d es la matriz de adyacencia de G definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (R_j, R_i) \in E \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (10)$$

donde $R_i, R_j \in V$.

II-C. Misceláneos Matemáticos

Definición 3: (Horn and Johnson, 2011; Poole, 1975) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisface $a_{ij} \leq 0$ con $i \neq j$ y $a_{ii} > 0$ para cada i . La matriz A es llamada una M -matriz si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes

- $A = \eta I - M$ para alguna matriz M no negativa y alguna $\eta > \rho(M)$, donde $\rho(M)$ es el radio espectral de M .
- La parte real de cada eigenvalor de A es positiva.
- Todos los menores principales de A son positivos.
- A^{-1} existe y $A^{-1} \geq 0$.

Definición 4: (Rockafellar, 1997) El casco convexo de un conjunto $Z = \{z_1, \dots, z_p\} \subset \mathbb{R}^n$, denotado por $co(Z)$, se define como

$$co(Z) = \left\{ \sum_{j=1}^p \mu_j z_j \mid \mu_j \in \mathbb{R}, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^p \mu_j = 1 \right\}$$

Proposición 1: Sea $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz triangular a bloques

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

con $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ y $C \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$. Entonces, los eigenvalores de la matriz H son los eigenvalores de las submatrices A y C

II-D. Notaciones

Sea $N = \{R_1, \dots, R_n\}$ un conjunto de agentes que se mueven en el plano con posiciones $\alpha_i = (\alpha_{x_i}, \alpha_{y_i})^T$, $i = 1, \dots, n$. El conjunto N , está formado por dos subconjuntos disjuntos, de tal forma que $N = N_F \cup N_L$, donde $N_F = \{R_1, \dots, R_{n_F}\}$ es el subconjunto de agentes seguidores, con posiciones $\alpha_F = [\alpha_1, \dots, \alpha_{n_F}]^T$ y $N_L = \{R_{n_F+1}, \dots, R_n\}$ el subconjunto de agentes líderes con posiciones $\alpha_L = [\alpha_{n_F+1}, \dots, \alpha_n]^T$.

Dado un subconjunto de agentes líderes N_L , el agente R_n será el líder principal, encargado de seguir una trayectoria deseada de marcha; los $n_L - 1$ agentes restantes serán líderes secundarios, encargados de realizar una formación deseada con respecto al líder principal.

Sea $m(t) = [m_p(t), m_q(t)]^T$ una trayectoria de marcha preestablecida continuamente diferenciable.

Sea $\mathcal{L}(G)$ el Laplaciano de una gráfica de formación $G = \{V, E, C\}$. $\mathcal{L}(G)$ se particiona en bloques correspondientes

a los subconjuntos de líderes y seguidores de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(G) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{FF} & \mathcal{L}_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & \mathcal{L}_{LL} \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{L}_{FF} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$ y $\mathcal{L}_{FL} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_L}$ representan, respectivamente, el Laplaciano de una subgráfica de G donde sólo interactúan seguidores y donde interactúan seguidores y líderes, con los vectores $c_{ji} = 0$; $\mathcal{L}_{LL} \in \mathbb{R}^{n_L \times n_L}$ representa el Laplaciano de una subgráfica de G donde sólo interactúan líderes, dada por la gráfica de formación de la Figura 2.

En el resto de este trabajo asumiremos la siguiente

Hipótesis 1: Para cada agente seguidor, debe de existir una comunicación ya sea de forma directa o indirecta, con al menos un agente líder. Es decir, para todo $R_i \in N_F$ existen aristas $R_j R_{m_1}, R_{m_1} R_{m_2}, \dots, R_{m_r} R_i \in E$ con $R_j \in N_L$.

III. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El objetivo del presente trabajo es diseñar una ley de control descentralizada $v_i = (\alpha_i, N_i)$, $i = 1, \dots, n$ tal que

- Se logre el seguimiento asintótico de la trayectoria por el agente líder principal, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$$

- Se alcance una formación deseada por parte de los agentes líderes secundarios con respecto al líder principal, i.e para $i = n_F + 1, \dots, n - 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_{i+1}(t) - c_{(i+1)i}) = 0$$

- Se logre que todos los agentes seguidores converjan al casco convexo formado por los agentes líderes, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_i(t), co(\alpha_L(t))) = 0, \quad i = 1, \dots, n_F$$

IV. ESTRATEGIA DE CONTROL

Para el problema de marcha, proponemos una ley de control para los líderes definida por

$$v_n = -k_m (\alpha_n - m(t)) + \dot{m}(t)$$

$$v_i = -k_f (\alpha_i - \alpha_{(i+1)i} - c_{(i+1)i}) + \dot{m}(t), \quad (11)$$

$$i = n_F + 1, \dots, n - 1$$

con $m(t)$ la trayectoria de marcha, $\dot{m}(t)$ la velocidad de marcha, $c_{(i+1)i} = [h_{(i+1)i}, v_{(i+1)i}]^T$ el vector de posición relativa deseada entre los agentes líderes secundarios, k_m y k_f las ganancias de control de marcha y formación, respectivamente.

Para el problema de confinamiento, proponemos la siguiente ley de control para los seguidores basada en el algoritmo fundamental de consenso (Ren and Beard, 2008)

$$v_i = -k_c \sum_{j \in N_i} (\alpha_i - \alpha_j) + \dot{m}(t), \quad i = 1, \dots, n_F \quad (12)$$

con $N_i \in N_F \cup N_L$ y k_c la ganancia de control de consenso. Como se puede observar, en la estrategia de

control presentada, se realiza una prealimentación de la velocidad de marcha en los agentes.

Teorema 1: Considere el sistema (7) y la ley de control (11)-(12). Suponga que $k_m > 0$, $k_f > 0$ y $k_c > 0$. Entonces, en el sistema en lazo cerrado (7)-(11)-(12)

1. El agente líder principal R_n converge a la trayectoria deseada de marcha, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_n(t) - m(t)) = 0$, al mismo tiempo que los agentes líderes secundarios $n_F + 1, \dots, n - 1$ convergen a la formación deseada, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_i(t) - \alpha_{i+1}(t) - c_{(i+1)i}) = 0$.
2. Los agentes seguidores n_1, \dots, n_F convergen al caso convexo formado por los agentes líderes, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\alpha_i(t), \text{co}(\alpha_L(t))) = 0$.

Demostración: El sistema en lazo cerrado (7)-(11)-(12) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_F \\ \dot{\alpha}_L \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & A_{LL} \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_F \\ c_L \end{bmatrix} \quad (13)$$

donde $\alpha_F = [\alpha_1, \dots, \alpha_{n_F}]^T$, $\alpha_L = [\alpha_{n_F+1}, \dots, \alpha_n]^T$, \otimes denota el producto Kronecker, I_2 es la matriz identidad de 2×2 , $c_F = [\dot{m}(t), \dots, \dot{m}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_F}$, $c_L = [k_f c_{(i+1)i} + \dot{m}(t), \dots, k_m m(t) + \dot{m}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_L}$ con $i = n_F + 1, \dots, n - 1$, $A_{FF} = -k_c \mathcal{L}_{FF}$, $A_{FL} = -k_c \mathcal{L}_{FL}$ y

$$A_{LL} = -k_f \mathcal{L}_{LL} - k_m \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n_L \times n_L}$$

con \mathcal{L}_{LL} el Laplaciano de la gráfica de cadena abierta de los líderes dada por

$$\mathcal{L}_{LL} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n_L \times n_L}$$

Definimos los errores del agente principal, los agentes líderes secundarios y los agentes seguidores como

$$\begin{aligned} e_n &= (\alpha_n - m(t)) \\ e_i &= (\alpha_i - \alpha_{(i+1)} - c_{(i+1)i}), i = n_F + 1, \dots, n - 1 \\ e_i &= \sum_{j \in N_i} (\alpha_i - \alpha_j), i = 1, \dots, n_F, N_i \in V_F \cup V_L \end{aligned} \quad (14)$$

Reescribiendo 14 de forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} e_F \\ e_L \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{FF} & \mathcal{L}_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & P_{LL} \end{bmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{bmatrix} \alpha_F \\ \alpha_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{c}_F \\ \tilde{c}_L \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde $\tilde{c}_F = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n_F}$, $\tilde{c}_L = [c_{(i+1)i}, \dots, m(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_F}$ con $i = n_F + 1, \dots, n - 1$ y

$$P_{LL} = \mathcal{L}_{LL} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n_L \times n_L}$$

La dinámica del error resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_F \\ \dot{e}_L \end{bmatrix} = (B \otimes I_2) \begin{bmatrix} e_F \\ e_L \end{bmatrix} \quad (16)$$

con

$$B = \begin{bmatrix} B_{FF} & B_{FL} \\ 0_{n_L \times n_F} & B_{LL} \end{bmatrix}$$

donde $e_F = [e_1, \dots, e_{n_F}]^T$, $e_L = [e_{n_F+1}, \dots, e_n]^T$, $B_{FF} = A_{FF}$ y B_{FL} similar a A_{FL} , con la diferencia de que se reemplaza k_c por k_f en las columnas de los líderes secundarios y por k_m en la columna del líder principal y

$$B_{LL} = \begin{bmatrix} -k_f & k_f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_f & k_f & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -k_f & k_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -k_m \end{bmatrix}_{n_L \times n_L}$$

Se puede ver que la velocidad de marcha no afecta a los errores de formación en los líderes y a los errores de consenso en los seguidores. La matriz B es triangular superior por bloques y de acuerdo a la Proposición 1, sus eigenvalores coinciden con los eigenvalores de los bloques que se encuentran en la diagonal principal, en este caso B_{FF} y B_{LL} .

Dado que $B_{FF} = -k_c \mathcal{L}_{FF}$, los eigenvalores de B_{FF} serán los eigenvalores de \mathcal{L}_{FF} multiplicados por $-k_c$. Definiendo $\eta = \max_{i=1, \dots, n_F} ((\mathcal{L}_{FF})_{ii})$ (Horn and Johnson, 2011), podemos reescribir a \mathcal{L}_{FF} como

$$\mathcal{L}_{FF} = \eta I_{FF_{n_F \times n_F}} - M_{FF_{n_F \times n_F}}$$

donde $M_{FF_{n_F \times n_F}}$ es una matriz no negativa y de acuerdo a la Hipótesis 1, se cumple que $\rho(M_{FF_{n_F \times n_F}}) < \eta$. Por lo tanto \mathcal{L}_{FF} es una M -matriz, la cual es no singular y todos sus eigenvalores tienen parte real positiva. A partir de lo anterior, se tiene que B_{FF} es una matriz definida negativa.

La matriz B_{LL} es triangular superior, por lo que sus eigenvalores coinciden con los elementos de la diagonal principal. Ya que todos los elementos de la diagonal principal de B_{LL} son negativos, entonces B_{LL} es una matriz definida negativa.

Por lo tanto, la matriz B tiene todos sus eigenvalores negativos y los errores del sistema convergen exponencialmente a cero.

Para el inciso 1. Despejando la posición de los agentes líderes $\alpha_L(t)$ de la ecuación (15) tenemos

$$\alpha_L(t) = P_{LL}^{-1} e_L(t) + P_{LL}^{-1} \tilde{c}_L$$

Ya que $e_L(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, entonces $\alpha_L(t) \rightarrow P_{LL}^{-1} \tilde{c}_L$. Por lo que

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) &\rightarrow \sum_{j=i}^{n-1} c_{(j+1)j} + m(t), i = n_F + 1, \dots, n-1 \\ \alpha_n(t) &\rightarrow m(t) \end{aligned} \quad (17)$$

conforme $t \rightarrow \infty$, llegando al resultado deseado.

Para el inciso 2. Despejando la posición de los agentes seguidores $\alpha_F(t)$ de la ecuación (15) tenemos

$$\alpha_F(t) = \mathcal{L}_{FF}^{-1} e_F(t) - \mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL} \alpha_L(t)$$

Ya que $e_F(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, entonces $\alpha_F(t) \rightarrow -\mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL} \alpha_L(t)$, con $\alpha_L(t)$ definida en (17). Haciendo un análisis similar a (Cai et al., 2012) para las posiciones de los seguidores, vemos que \mathcal{L}_{FF} es una M -matriz, por lo que \mathcal{L}_{FF}^{-1} existe y $\mathcal{L}_{FF}^{-1} \geq 0$ y dado que $\mathcal{L}_{FL} \leq 0$ entonces $-\mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL} \geq 0$. Ya que la sumatoria de los elementos de cada renglón del Laplaciano $\mathcal{L}(G)$ es cero, tenemos que la sumatoria de los elementos de cada renglón de $-\mathcal{L}_{FF}^{-1} \mathcal{L}_{FL}$ es 1 y de acuerdo a la Definición 4, cuando $t \rightarrow \infty$, las posiciones de los seguidores se encuentran dentro del casco convexo formado por los líderes. ■

V. SIMULACIÓN

A continuación se presentan los resultados obtenidos en una simulación numérica utilizando la estrategia de control dada por (11) y (12). Para la simulación se consideran 6 robots móviles tipo unicycle, donde el punto α_i a controlar se encuentra a 15 cm del punto medio del eje de las ruedas. La gráfica de formación empleada en la simulación se muestra en la Figura 3.

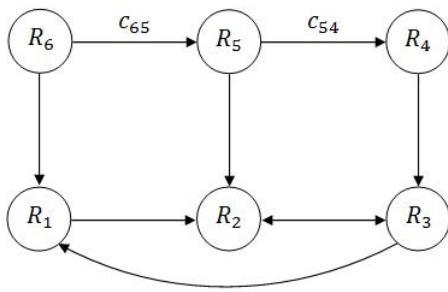


Figura 3. Gráfica de formación.

El Laplaciano de la gráfica de formación está dado por

$$\mathcal{L}(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los parámetros utilizados en la simulación son $k_m, k_f, k_c = 1$. La trayectoria deseada de marcha es una senoide con amplitud de 2 m y un periodo de 50 s. Los vectores de posición deseada entre los líderes están dados por $c_{65} = [-1.6 \sin(\pi/3), -1.6 \cos(\pi/3)]$ y $c_{54} = [0, 1.6]$.

La Figura 4 muestra el movimiento de los agentes en el plano. Las posiciones iniciales de los agentes están indicadas con una "x" y las posiciones en los tiempos $t = 15, 30, 45$ y 60 s se representan con un círculo "o". Se observa como el agente líder principal sigue la trayectoria deseada mientras que los líderes secundarios alcanzan la formación. Además, los agentes seguidores convergen al casco convexo formado por los líderes.

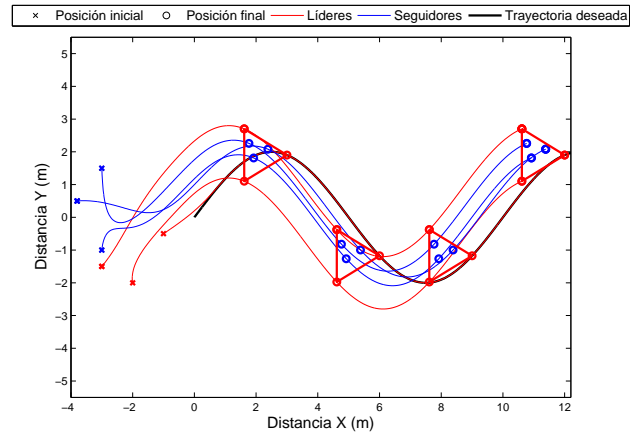


Figura 4. Movimiento en el plano de los agentes.

Las Figuras 5 y 6, presentan los errores de los agentes seguidores y líderes, respectivamente. Dichos errores convergen a cero. Las señales de control requeridas para lograr la marcha y confinamiento se muestran en las Figuras 7 y 8.

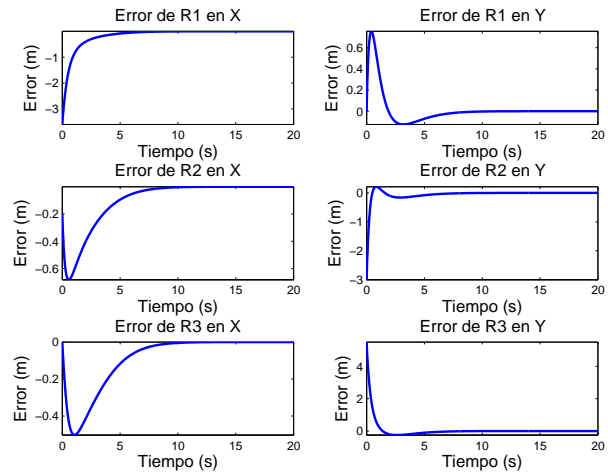


Figura 5. Errores de los agentes seguidores.

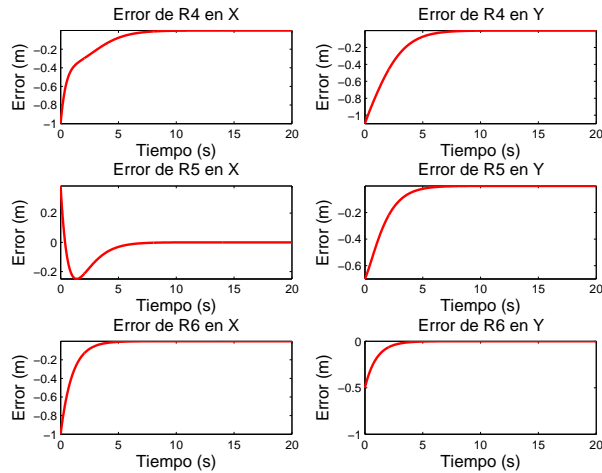


Figura 6. Errores de los agentes líderes.

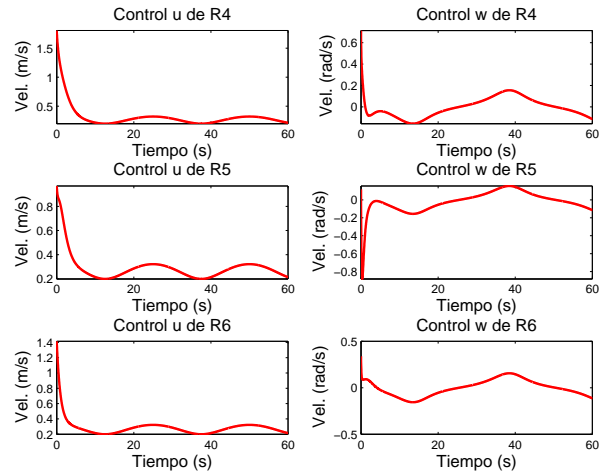


Figura 8. Controles de los agentes líderes.

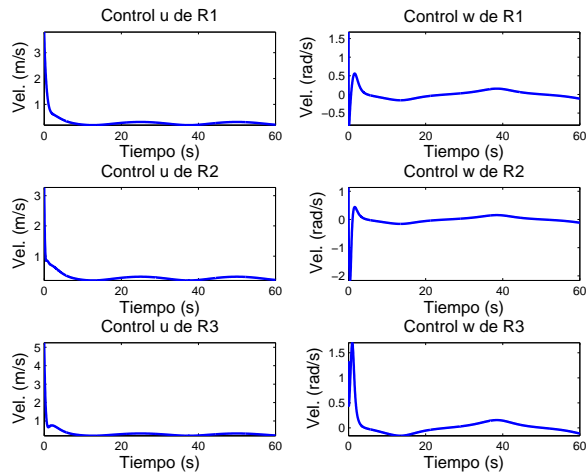


Figura 7. Controles de los agentes seguidores.

VI. CONCLUSIONES

Este artículo presenta el problema de marcha y confinamiento para sistemas multi-agente, donde los agentes son robots móviles tipo unicycle. Se propone una estrategia de control descentralizada con la que se garantiza que los agentes seguidores se muevan hacia el casco convexo formado por los agentes líderes, mientras que estos últimos avanzan en formación. Como se puede observar en la simulación, se logran los objetivos propuestos y los errores del sistema convergen a cero.

Como trabajo futuro se propone el estudio de vectores de posición variantes en el tiempo para los líderes y utilizar campos vectoriales artificiales para evitar colisiones entre los seguidores.

REFERENCIAS

Arai, T., Pagello, E. and Parker, L.E. (2002). Guest editorial advances in multirobot systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18, 655–661.

Belkhouche, F. and Belkhouche, B. (2005). Modeling and controlling a robotic convoy using guidance laws strategies. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 35(4), 813–825.

Brockett, R.W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. In R.W. Brockett, R.S. Millman and H.J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, 181–191, Birkhauser, Boston.

Cai, Y., Liu, H. and Xie, G. (2012). Finite-time containment control for multi-agent systems with single-integrator dynamics. *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, 6433–6438.

Cao, Y.U., Fukunaga, A.S. and Kahng, A.B. (1997). Cooperative mobile robotics: antecedents and directions. *Autonomous Robots*, 4, 226–234.

Dimarogonas, D. V. and Egerstedt, M. and Kyriakopoulos, K. J. (2006). A leader-based containment control strategy for multiple unicycles. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 5968–5973.

Horn, R.A. and Johnson C.R. (2011). *Topics in Matrix Analysis (Online publication)*, Cambridge University Press.

Ji, M., Ferrari-Trecate, G., Egerstedt, M. and Buffa A. (2008). Containment Control in Mobile Networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(8), 1972–1975.

Lafferriere, G., Williams, A., Caughman, J. and Veerman, J.J.P. (2005). Decentralized control of vehicle formations. *Systems and Control Letters*, 54, 899–910.

Li, J., Ren, W. and Xu, S. (2012). Distributed Containment Control with Multiple Dynamic Leaders for Double-Integrator Dynamics Using Only Position Measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(6), 1553–1559.

Poole, G.D. (1975). Generalized M-matrices and applications. *Mathematics of Computation*, 29(131), 903–910.

Ren, W. and Beard, R. W. (2008). *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control Theory and Applications*, Springer London.

Rockafellar, R.T. (1997). *Convex analysis*, Princeton University Press.

Tanner, H.G. and Kumar, A. (2005). Towards decentralization of multi-robot navigation functions. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4132–4137.

Wen, G. and Duan, Z. and Zhang, Y. and Chen, G. (2012). Distributed containment control of uncertain linear multi-agent systems. *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 869–874.

Zhao, Y. and Duan, Z. and Wen, G. and Zhang, Y. (2012). Distributed finite-time containment control for second-order multi-agent systems. *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, 6202–6207.