

Método recursivo de Newton–Euler modificado para el modelado y el control de manipuladores móviles

Gastón H. Salazar-Silva
Instituto Politécnico Nacional
UPIITA
Av. IPN 2580
Col. La Laguna Ticoman
C.P. 07340, México, D.F.,
correo-e: ghsalazar@ipn.mx

Jaime Álvarez Gallegos
CINVESTAV–IPN
Av. IPN 2508
Col. San Pedro Zacatenco
C.P. 07360, México D.F.,
correo-e: jalvarez@cinvestav.mx

Marco A. Moreno-Armendáriz
Instituto Politécnico Nacional
Centro de Investigación en Computación
Av. Juan de Dios Bátiz
Esq. Miguel Othón de Mendizábal
Col. Nueva Industrial Vallejo
México, D.F.

Resumen—Los modelos dinámicos usados en el modelado y control de manipuladores móviles están normalmente basados en el método de Euler–Lagrange, y su implementación computacional no es necesariamente eficiente; si bien existen en la literatura algunas implementaciones computacionales basadas en el método de Newton–Euler para ciertos tipos de sistemas no holónomos, no existe un esquema general de modelado recursivo dinámico para el caso de manipuladores móviles.

En el presente trabajo se propone un algoritmo recursivo para este tipo de sistemas, el cual se puede aplicar en sistemas con restricciones no holónomas tanto en la base móvil como en el brazo de un manipulador móvil. Una ventaja del algoritmo presentado es que se puede implementar al aplicar un cambio de coordenadas en la configuración al método de Newton–Euler para sistemas holónomos; también se presentan resultados numéricos de un control de un manipulador móvil por dinámica inversa aplicando este algoritmo.

I. INTRODUCCIÓN

Una gran herramienta en el diseño e implementación de sistemas de control para robots es el modelado. En el caso de los manipuladores móviles se han usado tanto los modelos cinemáticos como dinámicos. En el modelo cinemático, no se considera el efecto directo de las fuerzas en el comportamiento del manipulador móvil. En Bayle *et al.* (2003) se propone un método para analizar la cinemática en esta clase de robots. En la literatura se han reportado controladores basados en el modelado cinemático, por ejemplo en Hamner *et al.* (2010). Por otro lado, en los modelos dinámicos sí se consideran el efecto de las fuerzas sobre el manipulador móvil así como las inercias que existe en éste; ejemplos del uso de modelos dinámicos para el análisis y desarrollo de controles se reportan en Mazur y Szakiel (2009), y Moosavian y Eslamy (2008). Sin embargo todos estos trabajos usan la metodología de Euler–Lagrange para obtener el modelo dinámico, la cual puede ser numéricamente ineficiente.

Por otro lado, el método de Newton–Euler es usado en la práctica para desarrollar los modelos de robots estacionarios, los cuales se aplican en el desarrollo de

simulaciones y en la implementación de controladores por dinámica inversa; este método es numéricamente muy eficiente (Featherstone y Orin, 2000). Los primeros trabajos aplicando el algoritmo recursivo de Newton–Euler a mecanismos con cadenas cinemáticas abiertas fueron presentados en Stepanenko y Vukobratović (1976) y Orin *et al.* (1979) (Featherstone y Orin, 2000). En el caso de manipuladores móviles se encontró en la literatura el trabajo de Boyer y Ali (2011), donde se plantea un algoritmo recursivo para sistemas multi-cuerpos con articulaciones y ruedas pero solo considera las ligaduras no holónomas en las ruedas y no en las articulaciones. Otros trabajos usan el método de Newton–Euler en manipuladores móviles pero no consideran las ligaduras no holónomas; por ejemplo, en Murphy *et al.* (1991) se modelan dos brazos montados sobre una plataforma móvil, pero no se modela la plataforma ni se consideran restricciones no holónomas; en Chung y Velinsky (1999) se modela un manipulador móvil considerando el derrape lateral y, por lo tanto, el modelo desarrollado es holónimo. Finalmente en Kobayashi *et al.* (2005) se utiliza el algoritmo de Newton–Euler en un manipulador móvil diferencial; sin embargo, solo se considera el movimiento rectilíneo de la base móvil y, por lo tanto, no consideran ligaduras no holónomas; el algoritmo usado es el clásico para manipuladores estacionarios.

En el presente trabajo se desarrolla un algoritmo recursivo para obtener numéricamente el modelo dinámico para manipuladores móviles, el cual está basado en el método de Newton–Euler. Primeramente se revisará el marco teórico–conceptual (sección II), para pasar posteriormente al desarrollo del método recursivo para obtener el modelo dinámico (sección III); posteriormente se presenta una implementación del algoritmo basada en el paradigma funcional (sección IV); el algoritmo se validó de forma numérica por medio de un control robusto en el espacio de tarea (sección V); finalmente se presentan conclusiones (sección VI).

II. MARCO TEÓRICO–CONCEPTUAL

El sistema a analizar es un manipulador móvil de tracción diferencial de n GDL y que además tiene m ligaduras no holónomas. El sistema puede ser descrito como un manipulador estacionario con ligaduras no holónomas en las articulaciones (Salazar-Silva *et al.*, 2012). Para ello se consideró que el manipulador móvil consiste de un sistema de 5 GDL (figura 1).

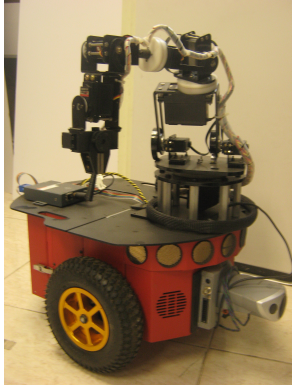


Figura 1. Manipulador móvil.

El modelo cinemático de un robot móvil con ruedas está caracterizado por las restricciones al movimiento impuestas por las ruedas; estas restricciones se conocen como ligaduras (Goldstein, 2000). Una forma de clasificar a las ligaduras es determinando si son holónomas o no holónomas. Una ligadura se dice holónoma si ésta se puede expresar sin considerar las velocidades del sistema, por ejemplo

$$h_i(q) = 0.$$

Por otro lado, una ligadura se dice no holónoma si la ligadura no es independiente de la velocidad, la cual se expresa de la forma

$$a_i(q, \dot{q}) = 0.$$

Un caso particular es la ligadura *pfaffiana*, la cual es lineal con respecto a las velocidades del sistema, es decir que se puede expresar de la forma

$$a_i(q)\dot{q} = 0;$$

Éste es el tipo de ligadura que aparece en los robots móviles con ruedas. Una ligadura *pfaffiana* es holónoma si existe una función $h_i(q)$, tal que

$$\frac{\partial h_i}{\partial q}(q) = a_i(q),$$

esto es, la ligadura es integrable.

Por otro lado, es importante notar que las posiciones, velocidades y aceleraciones de una partícula o un cuerpo rígido son consideradas como vectores en el espacio euclidiano de dimensión 3, denotado como \mathbf{E}^3 ; a diferencia de los vectores expresadas en \mathbb{R}^n , en \mathbf{E}^3 se deben expresar con respecto a un marco de referencia, ya que es un espacio

afín; el marco de referencia A se denota como $\{A\}$. Un punto $\mathbf{p} \in \mathbf{E}^3$ se denotará por medio de negritas. El vector correspondiente con respecto al marco de referencia $\{A\}$ se denotará por el mismo símbolo pero con un superíndice indicando el marco de referencia, por ejemplo \mathbf{p}^A . Si para una magnitud particular no se menciona de forma explícita el marco de referencia se asumirá que está dado por el propio contexto. En el caso particular de los eslabones del robot, los marcos de referencia se asignan de acuerdo a la convención de Denavit-Hartenberg (Spong *et al.*, 2006), donde se enumeran del 0, para la base, 1 para el siguiente eslabón, hasta n para el n -ésimo eslabón. Otro caso particular es el de los centros de masa de los eslabones, que se denotarán $\{c_i\}$. Para cambiar la descripción de la orientación de un vector \mathbf{p} de un marco de referencia $\{A\}$ a un marco de referencia $\{B\}$ se usa una transformación ortogonal R_A^B tal que

$$\mathbf{p}^B = R_A^B \mathbf{p}^A.$$

Por otro lado, la descripción más usada para el modelado de sistemas no holónomos está dada por el método de Euler–Lagrange, el cual depende de las coordenadas generalizadas, denotadas q , y las fuerzas generalizadas, v . La relación entre las fuerzas generalizadas, las fuerzas externas debidas a los actuadores y las fuerzas debidas a las ligaduras no holónomas está dada (Campion *et al.*, 1996)

$$v = S(q)\tau + A(q)^T \lambda; \quad (1)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}^m$ son las fuerzas externas, $\lambda \in \mathbb{R}^k$ son las fuerzas debidas a las ligaduras no holónomas, la matriz $S(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es el mapeo de las fuerzas externas a fuerza generalizadas, y $A(q) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ es la matriz de ligaduras cinemáticas; una propiedad importante de las matrices $A(q)$ y $S(q)$ es que satisfacen la ecuación

$$A(q)S(q) = 0. \quad (2)$$

III. MÉTODO RECURSIVO PARA OBTENER EL MODELO DINÁMICO

A continuación se presenta un método recursivo basado en el método de Newton–Euler, el cual se usa para obtener la dinámica inversa de un manipulador móvil o como apoyo para obtener la dinámica directa. Es importante notar que si bien en el análisis de sistemas robóticos se utiliza normalmente el formalismo de Euler–Lagrange, por razones de eficiencia en el modelado computacional se termina implementando el método recursivo de Newton–Euler. Otra ventaja del método recursivo es que simplifica la obtención del modelo por medio de parámetros.

Las leyes de Euler del movimiento extienden las leyes del movimiento de Newton, las cuales tratan sobre partículas, para el caso de cuerpo rígido. Si se asume que todos los vectores están descritos en el marco de referencia $\{i\}$, entonces la primera ley de Euler es

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (3)$$

donde el vector euclidiano $\mathbf{a}_i \in \mathbf{E}^3$ representa la aceleración del centro de masa del i -ésimo eslabón, y el vector euclidiano $\mathbf{F}_i \in \mathbf{E}^3$ es la suma de fuerzas en el i -ésimo eslabón; el escalar $m_i \in \mathbb{R}$ es la masa del i -ésimo eslabón, la cual es invariante con respecto a la configuración del manipulador;

Por otro lado, la segunda ley de Euler establece una relación entre los momentos de fuerza y la derivada con respecto del tiempo del momento angular; para el caso de un marco de referencia rotacional se tiene que

$$\mathbf{N}_i = I_i \alpha_i + \omega_i \times (I_i \omega_i) \quad (4)$$

donde el vector euclidiano $\alpha_i \in \mathbf{E}^3$ representa la aceleración angular del i -ésimo eslabón, y el vector euclidiano $\omega_i \in \mathbf{E}^3$ representa la velocidad angular del i -ésimo eslabón; la matriz $I_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el tensor del momento de inercia en el i -ésimo eslabón, la cual es invariante con respecto a la configuración del eslabón cuando su marco de referencia es rotacional; finalmente, el vector euclidiano $\mathbf{N}_i \in \mathbf{E}^3$ es la suma de momentos de fuerza en el i -ésimo eslabón. El símbolo \times en la ecuación representa la operación del producto cruz entre dos vectores.

Para determinar la aceleración lineal \mathbf{a}_i requerida en (3) se parte de la relación (Campion *et al.*, 1996)

$$\mathbf{v}_i = J_{vi} S(q) \eta \quad (5)$$

donde el vector $\mathbf{v}_i \in \mathbf{E}^3$ es la velocidad del centro de masa del i -ésimo eslabón, el vector $\eta \in \mathbb{R}^m$ son las velocidades de los actuadores, el vector $q \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas generalizadas, y la matriz $J_{vi} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ es el jacobiano de velocidad lineal del centro de masa del i -ésimo eslabón. Para encontrar la aceleración del centro de masa del i -ésimo eslabón \mathbf{a}_i , se deriva (5) con respecto al tiempo

$$\mathbf{a}_i = J_{vi} \dot{S}(q) \eta + \dot{J}_{vi} S(q) \eta + J_{vi} \dot{S}(q) \eta. \quad (6)$$

Por otro lado, para encontrar la aceleración angular α_i y la velocidad angular ω_i usadas en (4) se parte de la expresión

$$\omega_i = J_{wi} S(q) \eta \quad (7)$$

donde la matriz $J_{wi} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ es el jacobiano de velocidad angular del centro de masa. Al derivar a (7) con respecto al tiempo se tiene

$$\alpha_i = J_{wi} \dot{S}(q) \eta + \dot{J}_{wi} S(q) \eta + J_{wi} \dot{S}(q) \eta. \quad (8)$$

Es importante notar que la obtención de J_{vi} y J_{wi} se puede realizar numéricamente de manera recursiva, lo cual resulta numéricamente muy eficiente.

A continuación se determinan las fuerzas que actúan sobre un eslabón (figura 2); si se asume que todos los vectores están descritos en el marco de referencia $\{i\}$, entonces \mathbf{F}_i está dada por

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{g}_i \quad (9)$$

donde $\mathbf{f}_i \in \mathbf{E}^3$ es la fuerza ejercida por el eslabón $i-1$ sobre el i -ésimo eslabón, $\mathbf{f}_{i+1} \in \mathbf{E}^3$ es la fuerza ejercida por el eslabón $i+1$ sobre el i -ésimo eslabón, y $\mathbf{g}_i \in \mathbf{E}^3$ es la

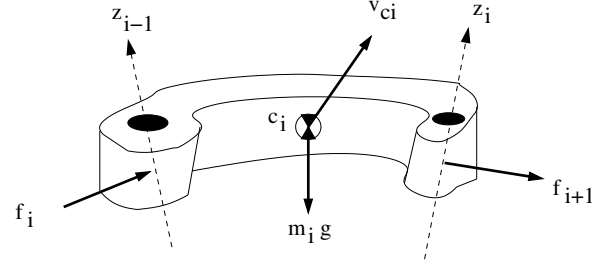


Figura 2. Fuerzas afectando al eslabón.

aceleración debida a la gravedad ejercida sobre el i -ésimo eslabón. Resolviendo (9) para \mathbf{f}_i se tiene entonces que

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1} - m_i \mathbf{g}_i. \quad (10)$$

Es importante notar que (3) y (10) dependen de los valores de \mathbf{f}_{i+1} y \mathbf{a}_{c_i} .

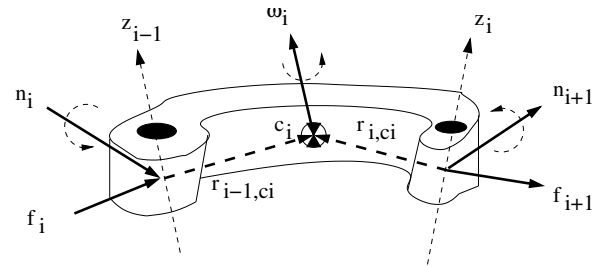


Figura 3. Momentos de fuerza afectando al eslabón.

En cuanto a los momentos de fuerza en el eslabón (figura 3), si se asume que todos los vectores están descritos en el marco de referencia $\{i\}$, se tiene que la suma de momentos de fuerza \mathbf{N}_i está dada por

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1,ci} - \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,ci} \quad (11)$$

donde $\mathbf{n}_i \in \mathbf{E}^3$ es el momento de fuerza ejercido por el eslabón $i-1$ sobre el i -ésimo eslabón, $\mathbf{n}_{i+1} \in \mathbf{E}^3$ es el momento de fuerza ejercido por el eslabón $i+1$ sobre el i -ésimo eslabón, $\mathbf{r}_{i-1,ci}$ es el vector de desplazamiento que va del marco de referencia $\{i-1\}$ a $\{c_i\}$, y $\mathbf{r}_{i,ci}$ es el vector de desplazamiento que va del marco de referencia $\{i\}$ a $\{c_i\}$; tanto $\mathbf{r}_{i-1,ci}$ como $\mathbf{r}_{i,ci}$ son magnitudes invariantes con respecto a la configuración del eslabón. Resolviendo (11) para \mathbf{n}_i se obtiene la expresión

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{N}_i + \mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{i-1,ci} + \mathbf{f}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i,ci} \quad (12)$$

Para resolver (4) y (12) se necesita conocer los valores de \mathbf{n}_{i+1} , α_i y ω_i .

Una vez obtenidas las fuerza y momentos de fuerza aplicados a los eslabones, se necesitan encontrar las fuerzas o momentos de fuerza proporcionados por los actuadores. En el caso de una articulación prismática se tiene que la relación entre fuerza ejercida por el eslabón $i-1$ sobre el i -ésimo eslabón y las fuerzas generalizadas está dada por la expresión

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \mathbf{f}_i \quad (13)$$

donde v_i es el i -ésimo componente del vector de fuerzas generalizadas, y $\mathbf{z}_{i-1} \in \mathbf{E}^3$ es el vector euclidiano correspondiente al eje z del $i-1$ eslabón. Por otro lado, si la articulación es rotacional entonces se tiene que la relación entre fuerza ejercida por el eslabón $i-1$ sobre el i -ésimo eslabón y las fuerzas generalizadas se define como

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{z}_{i-1}^T \mathbf{n}_i. \quad (14)$$

Es importante notar que en el caso de un manipulador móvil, la fuerza ejercida por el eslabón $i-1$ sobre el i -ésimo eslabón \mathbf{f}_i incluye las fuerzas debidos a las ligaduras no holónomas que actúan sobre el eslabón; por otro lado, también el momento de fuerza ejercido por el eslabón $i-1$ sobre el i -ésimo eslabón \mathbf{n}_i incluye los momentos de fuerza debidos a las ligaduras no holónomas que actúan sobre el eslabón.

IV. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO

En la descripción de algoritmos, normalmente se utiliza el paradigma imperativo; un enfoque diferente es el paradigma funcional (Rabhi y Lapalme, 1999), en el cual los procesos computacionales se presentan como una composición de funciones primitivas, en donde composición se refiere a que la salida de una función es la entrada de otra. A continuación se presenta una implementación del algoritmo (sección III), el cual usa composiciones de transformaciones de coordenadas de configuración y fuerzas generalizadas, aplicadas al algoritmo clásico de Newton–Euler.

En un contexto puramente funcional, se asume que ya existe una función *rne* que implementa el método de Newton–Euler, pero solo considera las restricciones holónomas, y está definida como

$$\mathbf{v} = \text{rne}(\xi) \quad (15)$$

donde el vector $\xi \in \mathbb{R}^{3n}$ se define como

$$\xi = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Por otro lado, el método desarrollado (sección III) depende de las variables q , η y $\dot{\eta}$, las cuales se pueden usar para definir el vector ζ

$$\zeta = \begin{pmatrix} q \\ \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Teorema 1. *Sea la función *rne* que implementa el método de Newton–Euler que considera sólo las restricciones holónomas. entonces el algoritmo recursivo para sistemas no holónomos se puede expresar de la forma*

$$\tau = (S(q)^T S(q))^{-1} S(q)^T \text{rne}(W(q)\zeta). \quad (18)$$

donde $W(q)$ es una matriz definida por

$$W(q) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & S(q) & 0 \\ 0 & \dot{S}(q) & S(q) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Demostración: La relación entre ξ y ζ está dada por

$$\xi = W(q)\zeta. \quad (20)$$

Entonces, usando (1), (15) y (20), el algoritmo recursivo de Newton–Euler para sistemas con restricciones no holónomas, expresado en un estilo funcional, queda de la forma (18). \square

Para implementar el algoritmo (18) se usó la función *rne* suministrada por el *robotics toolbox* para *Matlab* (Corke, 1996). El algoritmo (18) implementa el método recursivo de Newton–Euler no solo tomando en consideración las restricciones no holónomas; es importante notar que las restricciones no holónomas restringen las velocidades posibles más no su posición, esto es su cinemática directa no depende de dichas restricciones; por lo tanto la parte de la función *rne* que depende de la cinemática directa tampoco se ve afectada si el manipulador móvil se modela para este fin como un manipulador estacionario, permitiendo usar de manera integral las mismas herramientas de modelado cinemático.

V. VALIDACIÓN NUMÉRICA POR MEDIO DE UN CONTROL ROBUSTO EN EL ESPACIO DE TAREA

Para validar el algoritmo de dinámica inversa se desarrolló un control por resolución de aceleración (RAC) robusto en el espacio de tarea (Salazar-Silva *et al.*, 2012). Los parámetros cinemáticos del robot aparecen en la tabla I. En cuanto a los parámetros que dictan el comportamiento dinámico aparecen en la tabla II.

TABLA I
PARÁMETROS DE DENAVIT–HARTENBERG PARA EL MANIPULADOR MÓVIL DE 5 GRADOS DE LIBERTAD (GDL).

i	α (rad)	a (mm)	θ (rad)	d (mm)	tipo de par cinemático
1	$-\pi/2$	0	0	0	prismático
2	$-\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	prismático
3	$+\pi/2$	0	0	237	rotacional
4	0	150	0	0	rotacional
5	0	168	0	0	rotacional

TABLA II
DIMENSIONES DE LOS ESLABONES DEL MANIPULADOR MÓVIL DE 5 GDL; SE CONSIDERA QUE LOS ESLABONES 1 Y 2 NO TIENEN MASA.

i	Longitud (mm)	Ancho (mm)	Altura (mm)	Masa (kg)
3	445	393	237	9.0
4	150	50	50	0.1
5	168	50	50	0.1

En cuanto al controlador, éste está conformado por dos lazos anidados de control. El primer lazo control está dado por

$$\tau = (S(q)^T S(q))^{-1} S(q)^T \text{rne}(W(q)\zeta^d). \quad (21)$$

donde el vector $\zeta^d \in \mathbb{R}^{n+2m}$ está definida por

$$\zeta^d = \begin{pmatrix} q \\ \eta \\ a \end{pmatrix}, \quad (22)$$

donde $a \in \mathbb{R}^m$ son las aceleraciones deseadas en los actuadores.

Por otro lado, el lazo de control externo está dado por

$$a_r = \ddot{r}_d + K_1 \dot{\tilde{r}} + K_0 \tilde{r} + \delta. \quad (23)$$

donde la entrada $a_r(t) \in \mathbb{R}^P$ es el vector de las aceleraciones en el espacio de tarea deseadas, el vector $r_d(t) \in \mathbb{R}^P$ denota la postura deseada del marco de referencia asociado al elemento final de control, el vector $\tilde{r}(t) \in \mathbb{R}^P$ es el error de la postura del marco de referencia asociado al elemento final de control, definido como

$$\tilde{r} = r_d - r; \quad (24)$$

las ganancias K_0, K_1 son matrices cuadradas constantes que se eligen para ajustar la dinámica del error; la función $\delta \in \mathbb{R}^P$ está definida por

$$\delta = \begin{cases} -\rho(e) \frac{H^T P e}{\|H^T P e\|} & \text{si } \|H^T P e\| \neq 0 \\ 0 & \text{si } \|H^T P e\| = 0, \end{cases} \quad (25)$$

el vector $e \in \mathbb{R}^{2P}$ es una medición del error

$$e = \begin{pmatrix} \tilde{r} \\ \dot{\tilde{r}} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

la matriz $P \in \mathbb{R}^{2P \times 2P}$ es una matriz constante definida positiva, la matriz $H \in \mathbb{R}^{2P \times P}$ es una matriz constante

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix}, \quad (27)$$

la matriz E es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas. La función $\rho(e) \in \mathbb{R}$ se define por

$$\rho(e) = \frac{1}{1-\alpha} (\gamma_2 \|e\|^2 + \gamma_1 \|e\| + \gamma_0) \quad (28)$$

y finalmente $\alpha, \gamma_0, \gamma_1$ y γ_2 son escalares constantes. Los valores usados para estos parámetros aparecen en la tabla III.

TABLA III
VALORES DE LOS PARÁMETROS DE LA FUNCIÓN δ .

Parámetro	α	γ_1	γ_2	γ_3
Valor	0.0	0.1	0.2	0.0

Finalmente, para interconectar a (21) y (23) se parte de la relación (Campion *et al.*, 1996)

$$r = B(q)\eta. \quad (29)$$

Al derivar a (29) con respecto al tiempo y al despejar la aceleraciones deseadas en los actuadores, se tiene el RAC

$$a = -B(q)^\dagger \dot{B}(q)\eta + B(q)^\dagger a_r, \quad (30)$$

donde la matriz $B(q) \in \mathbb{R}^{P \times m}$ es el mapeo de las velocidades de los actuadores a las velocidades de postura.

El control resultante se aplicó al modelo numérico del manipulador móvil; es importante notar que el modelo numérico del manipulador móvil y la dinámica inversa no se cancelan de forma exacta; esto se hizo con la finalidad de probar la robustez del control.

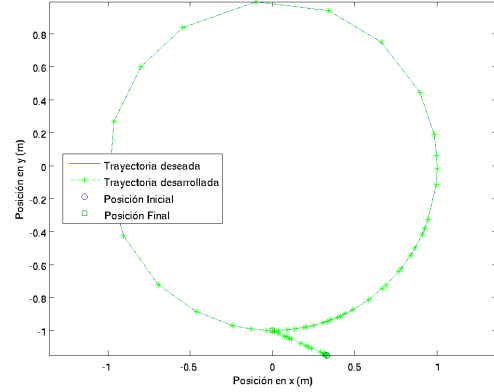


Figura 4. Seguimiento de la trayectoria.

Para verificar experimentalmente la robustez del control, se diseñaron y desarrollaron dos tipos de simulaciones. El objetivo del primer tipo de simulaciones fue medir el comportamiento del manipulador móvil ante variaciones en los parámetros. En el caso del segundo tipo, su propósito fue determinar el efecto del ruido en las mediciones en el comportamiento del manipulador móvil.

Para determinar el efecto de la variación de parámetros en el manipulador móvil, primeramente se definió que la variable de salida sería el error de postura, y en cuanto a las entradas, se consideraron los siguientes parámetros: el desplazamiento articular y la masa del tercer eslabón, y las distancias entre ejes del cuarto y quinto eslabón. Se usó un diseño factorial a dos niveles para determinar la cantidad de simulaciones a realizar; se desarrollaron dieciséis simulaciones, donde catorce simulaciones fueron exitosas; en las otras dos simulaciones, la plataforma de desarrollo indicó que los modelos eran numéricamente rígidos; esto es, si bien la solución analítica es estable, la solución numérica es inestable para el método de integración usado (Butcher, 2008).

En el caso del segundo tipo de simulaciones, se mantuvo el error de postura como salida, pero las entradas se consideraron las mediciones de la postura del manipulador móvil. Se asumió un error estándar de 0.05 % con un intervalo de confianza de 97 %. Se desarrollaron dieciséis simulaciones, de las cuales trece fueron exitosas. En cuanto a las otras tres simulaciones, la plataforma numérica indicó que eran numéricamente rígidas.

Se puede observar que el último eslabón del manipulador móvil sigue muy bien la trayectoria propuesta (figura 4); de nuevo es importante notar que la trayectoria propuesta es

en dirección contraria a las manecillas del reloj y el robot empieza a avanzar en el otro sentido.

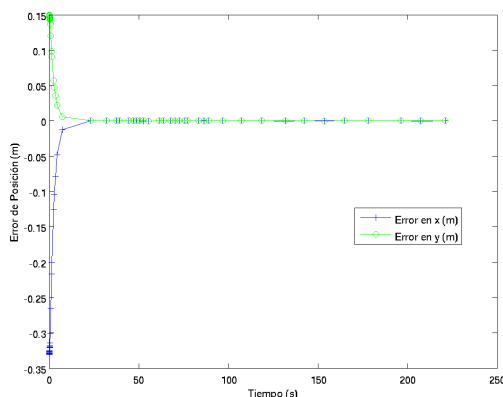


Figura 5. Error de la postura.

En cuanto al error de seguimiento (figura 5), se tiene que también converge exponencialmente a cero en el intervalo de tiempo durante el cual se realiza la simulación.

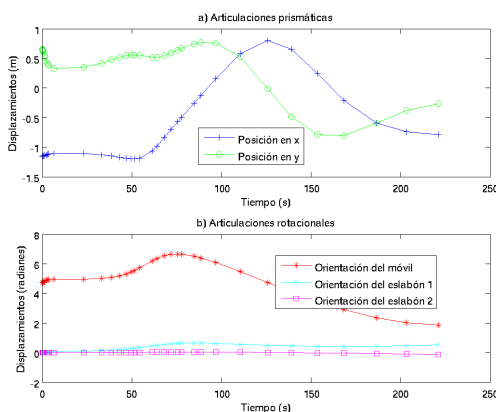


Figura 6. Desplazamiento de las articulaciones.

Por otro lado, los desplazamientos de las articulaciones (figura 6) están acotados. Es importante notar, que a pesar de ser un robot redundante en la cinemática, todas las articulaciones tienen desplazamientos. Esto se debe a que la cancelación entre la dinámica inversa y el modelo no es perfecta.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un algoritmo recursivo para obtener el modelo dinámico para manipuladores móviles está basado en el método de Newton–Euler. Este algoritmo se implementó usando el paradigma funcional, lo cual permite aprovechar las herramientas ya existentes para manipuladores estacionarios con ligaduras holónomas gracias a una transformación de coordenadas; el algoritmo se validó de forma numérica por medio de un control robusto en el espacio de tarea. Los resultados obtenidos

en las simulaciones muestran que el algoritmo al aplicarse al cálculo de la dinámica inversa tiene un buen desempeño.

El algoritmo desarrollado en el presente trabajo simplificará el análisis y el diseño de controles para manipuladores móviles con ligaduras no holónomas. Como trabajo futuro se estudiará el uso de este algoritmo en combinación con otros sistemas de control, como por ejemplo el uso de proyecciones en el espacio de la dinámica para la realización concurrente de tareas.

VII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN, COFAA-IPN y PIFI-IPN) y del gobierno mexicano (SNI y CONACYT).

REFERENCIAS

- Bayle, B., J.-Y. Fourquet y M. Renaud (2003). Manipulability of wheeled mobile manipulators: Application to motion generation. *The International Journal of Robotics Research* **22**(7-8), 565–581.
- Boyer, F. y S. Ali (2011). Recursive inverse dynamics of mobile multibody systems with joints and wheels. *IEEE Transactions on Robotics* **27**(2), 215–228.
- Butcher, John C. (2008). *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons.
- Campion, G., G. Bastin y B. Dandrea-Novet (1996). Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **12**(1), 47–62.
- Chung, Jae H. y Steven A. Velinsky (1999). Robust interaction control of a mobile manipulator - dynamic model based coordination. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* **26**(1), 47–63.
- Corke, P.I. (1996). A robotics toolbox for MATLAB. *IEEE Robotics Automation Magazine* **3**(1), 24–32.
- Featherstone, R. y D. Orin (2000). Robot dynamics: equations and algorithms. En: *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00*. Vol. 1. pp. 826–834 vol.1.
- Goldstein, Herbert (2000). *Mecánica clásica*. 2 ed. Reverté. Barcelona.
- Hamner, Brad, Seth Koterba, Jane Shi, Reid Simmons y Sanjiv Singh (2010). An autonomous mobile manipulator for assembly tasks. *Autonomous Robots* **28**(1), 131–149.
- Kobayashi, S., A. Muis y K. Ohnishi (2005). Sensorless cooperation between human and mobile manipulator. En: *IEEE International Conference on Industrial Technology, 2005. ICIT 2005*. pp. 811–816.
- Mazur, Alicja y Dawid Szakiel (2009). On path following control of nonholonomic mobile manipulators. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **19**(4), 561–574.
- Moosavian, S. A. A. y M. Eslamy (2008). Object manipulation by multiple arms of a wheeled mobile robotic system. En: *2008 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*. Chengdu. pp. 1124–1129.
- Murphy, S.H., J. Ting-Yung Wen y G.N. Saridis (1991). Simulation of cooperating robot manipulators on a mobile platform. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **7**(4), 468–478.
- Orin, D.E., R.B. McGhee, M. Vukobratović y G. Hartoch (1979). Kinematic and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing newton-euler methods. *Mathematical Biosciences* **43**(1-2), 107–130.
- Rabhi, Fethi y Guy Lalpalmé (1999). *Algorithms A Functional Programming Approach*. 1 ed. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.. Boston, MA, USA.
- Salazar-Silva, G.H., M.A. Moreno-Armendáriz y J. Álvarez Gallegos (2012). Modelado y control en espacio de tarea de un manipulador móvil con cancelación de control proporcional-derivativo instalado en fábrica. *Computación y Sistemas*.
- Spong, M.W., S. Hutchinson y M. Vidyasagar (2006). *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons. Hoboken, NJ.
- Stepanenko, Yu. y M. Vukobratović (1976). Dynamics of articulated open-chain active mechanisms. *Mathematical Biosciences* **28**(1-2), 137–170.