

Funciones de Lyapunov para los algoritmos por Modos Deslizantes Twisting y Terminal

Tonámethyl Sánchez y Jaime A. Moreno
Instituto de Ingeniería-UNAM
04510 México D.F., Mexico
TSanchezR@iingen.unam.mx, JMorenoP@ii.unam.mx

Resumen— En este trabajo se diseñan funciones de Lyapunov para los algoritmos por Modos Deslizantes de Segundo Orden “Twisting” y “Terminal”. Tanto el proceso de diseño como las funciones obtenidas proporcionan condiciones sobre las ganancias de los algoritmos para garantizar la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema. Con un análisis adicional se prueba que dichas condiciones son necesarias y suficientes. A pesar de que el método de construcción de las funciones de Lyapunov, aquí utilizado, es útil solo en sistemas no inciertos, este se aplica a sistemas perturbados realizando previamente un análisis de las perturbaciones.

Palabras clave: Control por Modos Deslizantes, Funciones de Lyapunov.

I. INTRODUCCIÓN

En la Teoría de Control, la principal herramienta para estudiar las características de estabilidad de un sistema dinámico, ha sido el método directo de Lyapunov. Este método también es útil en el diseño de controladores robustos, por ejemplo el llamado Rediseño de Lyapunov. A pesar de ello esta no había sido la herramienta más utilizada en el análisis y diseño de algoritmos de control por Modos Deslizantes de Orden Superior (e.g. [2], [3], [4], [5]).

El control por Modos Deslizantes de Orden Superior (MDOS) ofrece muy buenas propiedades como la estabilidad en tiempo finito y la insensibilidad ante cierta clase de perturbaciones además de no estar restringidos por el grado relativo (como los controladores por Modos Deslizantes de Primer Orden).

Debido a las buenas características de los MDOS y las potencialidades del método directo de Lyapunov, se puede observar en la literatura ([8], [9], [12], [10], [11]) una tendencia a realizar análisis y diseño de MDOS basados en Lyapunov. El principal obstáculo que se presenta es que no hay una forma inmediata de obtener las funciones de Lyapunov. Ante esta problemática ya se han propuesto algunas soluciones. Por ejemplo en [10] se propone resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales para encontrar funciones de Lyapunov, tarea que en general no es fácil. En [11] se presenta un método más sencillo. Con este último método se encuentran las condiciones necesarias y suficientes para garantizar que el origen del sistema controlado por MDOS (en el caso no perturbado) es estable en tiempo finito. Una desventaja de este método es que no garantiza

que las funciones obtenidas sean funciones de Lyapunov para el sistema perturbado. En los casos en los que las funciones resultan útiles para el caso perturbado, las condiciones de estabilidad pueden ser muy conservadoras.

El objetivo de este trabajo es dar una propuesta para mejorar el método antes descrito. Esto es, mejorar las condiciones de estabilidad que proporcionan las funciones (diseñadas en el caso nominal) al ser utilizadas con los sistemas perturbados. En particular se aplicará a los algoritmos por Modos Deslizantes de Segundo Orden (MDSO) *Twisting* [2] y *Terminal* [7]. Se verá que incluso se pueden obtener las condiciones necesarias y suficientes para el sistema perturbado.

En la siguiente Sección se describe el método de diseño propuesto en [11] y se define la propuesta de mejora. En las Secciones III y IV se diseñan funciones de Lyapunov para los algoritmos Twisting y Terminal y se dan las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la convergencia en tiempo finito al origen. Finalmente en la Sección V se presentan algunas conclusiones.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PROPUESTA DE SOLUCIÓN

En [11] se introdujo un método para construir Funciones de Lyapunov que en particular es aplicable a los sistemas que pueden ser representados por el integrador de orden n

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= u \end{aligned} \quad (1)$$

donde $u \in \mathbb{R}$ es un controlador constante a tramos. Denótese con $\phi(t; t_0, x)$ la solución de (1) con la condición inicial x en tiempo $t = t_0$. En los sucesivos se considerará $t_0 = 0$ y se usará la notación $x_i(0) = x_{i0}$, $i = 1, \dots, n$.

Antes de iniciar con la descripción del método es preciso aclarar que para esta clase de sistemas no se puede proceder como se hace para cierta clase de sistemas conmutados (ver por ejemplo [6]). Para esa clase de sistemas se requiere que los subsistemas compartan un punto de equilibrio y que no se presente el fenómeno de Zenón. Los sistemas tratados en

el presente trabajo presentan el fenómeno de Zenón e incluso sus subsistemas no tienen algún punto de equilibrio.

El método consiste en obtener una función de Lyapunov por medio de la integración de una función positiva definida W a lo largo de las soluciones ϕ del sistema (1) siempre que su origen sea asintóticamente estable. Esto es

$$V(x) = \int_0^{\infty} W(\phi(\tau; 0, x)) d\tau.$$

Este método es factible ya que siempre se puede calcular explícitamente la solución ϕ debido a la estructura afín de (1). Además de dar una función de Lyapunov para cada W que se selecciona, el método proporciona las condiciones necesarias y suficientes sobre las ganancias de los controladores para garantizar la convergencia de las trayectorias al origen del sistema (en el caso nominal). Nótese que el grado de homogeneidad de la función V puede elegirse arbitrariamente al momento de escoger una función W homogénea.

Para lidiar con el caso perturbado, en [11] se propone verificar si la función obtenida para el caso nominal es también útil en el caso perturbado. La desventaja de este procedimiento es la inminente pérdida de la necesidad en las condiciones de convergencia. Lo anterior puede llevar a reglas de diseño muy conservadoras para las ganancias de los algoritmos de control. Bajo estas circunstancias es que surge la pregunta ¿Qué hacer para que las condiciones de diseño de ganancias no resulten tan conservadoras? o incluso ¿Cómo evitar la pérdida de necesidad en dichas condiciones?

La propuesta de solución, en este trabajo, es hacer un análisis de las perturbaciones y fijar una antes de diseñar la función de Lyapunov. Es decir, en algún sentido buscar la peor perturbación que sea adecuada para el método de diseño de la función.

Se concentra la atención en el caso $n = 2$ para (1), es decir en el siguiente sistema dinámico (incierto) de segundo orden:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(t, x) + g(t, x)u, \quad (2)$$

donde $x^T = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$ es el estado y $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control. Las funciones inciertas $f(t, x)$, $g(t, x) \in \mathbb{R}$ cumplen, para todo $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, lo siguiente: $|f(t, x)| \leq F$ y $0 < G_m \leq g(t, x) \leq G_M$ para las constantes reales conocidas F , G_m y G_M . En particular se analizará (2) en lazo cerrado con los algoritmos por MDSO Twisting y Terminal.

III. ALGORITMO TWISTING

Considere el controlador por Modos Deslizantes de Segundo Orden conocido como Algoritmo Twisting [2]

$$u = -k_1 \text{sign}(x_1) - k_2 \text{sign}(x_2), \quad 0 < k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Note que (3) es una ley de control constante a tramos. Esto es, si se definen $k = k_1 + k_2$ y $\bar{k} = k_1 - k_2$ entonces

$$u = \begin{cases} u_1 = -k, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ u_2 = -\bar{k}, & x_1 > 0, x_2 < 0 \\ u_3 = k, & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ u_4 = \bar{k}, & x_1 < 0, x_2 > 0 \end{cases}. \quad (4)$$

En la siguiente Proposición se dan las condiciones necesarias y suficientes para que el origen del lazo cerrado (2), (3) sea estable en tiempo finito. Con el fin de facilitar la escritura defínase $U = G_m \bar{k} - F$ y $\bar{U} = G_M \bar{k} + F$.

Proposición 1: Las trayectorias del sistema (2), (3) convergen en tiempo finito al origen si y solo si las ganancias de k_1 y k_2 de (3) son seleccionadas tal que las desigualdades siguientes sean satisfechas:

$$U > \bar{U} > 0 \quad \text{y} \quad G_m \bar{k} > F. \quad (5)$$

Además, la función $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ con regla de correspondencia

$$V(x) = \begin{cases} \alpha_1 |x_2| + \alpha_2 \sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|}, & x_1 x_2 > 0 \\ \alpha_3 |x_2| + \alpha_4 \sqrt{x_2^2 + 2\bar{U}|x_1|}, & x_1 x_2 \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{U}, \quad \alpha_2 = \frac{r^{-1} + r}{U(1-r)}, \quad r = \sqrt{\frac{\bar{U}}{U}},$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{\bar{U}}, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3.$$

es una función de Lyapunov (continua) para (2), (3). El tiempo de convergencia T al origen puede ser estimado como sigue:

$$T \leq \begin{cases} V(x(0)), & x_1(0)x_2(0) > 0 \\ \gamma V(x(0)), & x_1(0)x_2(0) \leq 0 \end{cases}, \quad \gamma = \frac{\bar{U}}{U}.$$

Demostración de la Proposición 1

La comprobación de la Proposición 1 se realizará en los pasos siguientes: 1) Se fijará una perturbación para (2), (3); 2) Se aplicará el método de diseño de funciones de Lyapunov propuesto en [11] y; 3) Se verificará que la función obtenida es una función de Lyapunov para (2), (3).

Con el fin de elegir una perturbación para (2), (3) se encontrará la curva del espacio fase que, para una condición inicial, acote a todas las posibles trayectorias del sistema (note que esto equivale a encontrar la curva Mayorante definida en [1]). De (2) es claro que

$$x_1(t) = x_{10} + \int_0^t x_2(\tau) d\tau \quad (7)$$

$$x_2(t) = x_{20} + \int_0^t [f(\tau, x) + g(\tau, x)u] d\tau. \quad (8)$$

De (4) se tiene que sobre el cuadrante $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ el control $u = -k$. Así se obtiene lo siguiente:

$$x_2(t) = x_{20} + \int_0^t [f(\tau, x) - g(\tau, x)k] d\tau$$

$$\leq x_{20} - (kG_m - F)t. \quad (9)$$

Ahora, defínase la curva paramétrica $\hat{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\hat{x}(t) = [\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)]^T$ que cumple la propiedad $\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2$. Si a partir de (9) se establece que $\hat{x}_2 = \hat{x}_{20} - (kG_m - F)t$ entonces en el cuadrante $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{10} + \hat{x}_{20}t - \frac{1}{2}(kG_m - F)t^2 \\ \hat{x}_{20} - (kG_m - F)t \end{bmatrix},$$

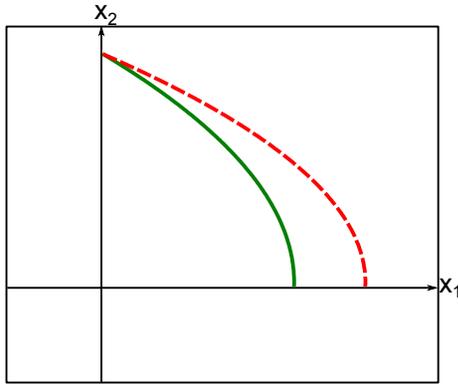


Fig. 1. Trayectorias de (2), (3) sobre $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$; Sólida: $x(t)$ nominal; Punteada: $\hat{x}(t)$

la Figura 1 muestra una trayectoria nominal de (2), (3) y una traza de $\hat{x}(t)$ sobre el cuadrante $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

Un análisis análogo al anterior puede ser hecho para el resto de los cuadrantes de \mathbb{R}^2 . Entonces, recordando que $U = G_m \bar{k} - F$ y $\bar{U} = G_M \bar{k} + F$, es posible escribir $\hat{x}(t)$ como sigue:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{10} + \hat{x}_{20}t + \frac{1}{2}Ut^2 \\ \hat{x}_{20} + Ut \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde

$$U = \begin{cases} -U, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ -\bar{U}, & x_1 > 0, x_2 < 0 \\ U, & x_1 < 0, x_2 < 0 \\ \bar{U}, & x_1 < 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

De manera que (10) es una curva (Mayorante) que acota en el espacio fase a todas las posibles trayectorias de (2), (3). Esto es ilustrado en el Figura 2. Es importante recalcar que la

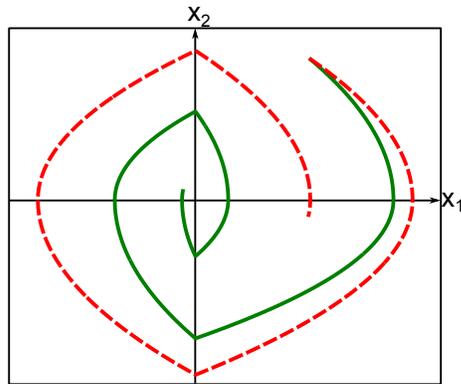


Fig. 2. Trayectorias de (2), (3); Sólida: $x(t)$ nominal; Punteada: $\hat{x}(t)$

curva encontrada no necesariamente representa la trayectoria con el mayor tiempo de llegada al origen. Obsérvese que (10) puede considerarse la solución del sistema afín por tramos:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U. \quad (11)$$

Así es posible diseñar una función de Lyapunov para (11) utilizando el método descrito en la Sección II. Sean $\hat{x}(t; 0, x)$

la solución de (11) cuya condición inicial es x en el tiempo $t_0 = 0$ y T_i cada uno de los tiempos de tránsito de \hat{x} por los cuadrantes del espacio fase. Entonces de acuerdo con [11], si se elige $W(x) = 1$ la siguiente es una función de Lyapunov para (11)

$$V(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i. \quad (12)$$

siempre que la suma converja. Para cada conjunto de condiciones iniciales en cada cuadrante habrá una sucesión distinta de T_i que pueden ser calculados a partir de (10). Suponiendo que la condición inicial x se encuentra en el cuadrante $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, de (12) se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i = \frac{x_2}{U} + \frac{\sqrt{x_2^2 + 2Ux_1}}{U} \sum_{j=1}^{\infty} (r^j + r^{j+1}). \quad (13)$$

Note que $V(x)$ existe si y solo si $\sum_{j=1}^{\infty} (r^j + r^{j+1})$ es una suma geométrica. Eso ocurre si y solo si

$$r = \sqrt{\frac{\bar{U}}{U}} < 1 \iff G_m \bar{k} - F > G_M \bar{k} + F \quad (14)$$

siempre que $G_m \bar{k} - F > 0$. El procedimiento para calcular V en el resto de los cuadrantes es similar y así se obtiene:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha_1 x_2 + \alpha_2 \sqrt{x_2^2 + 2Ux_1}, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ -\alpha_3 x_2 + \alpha_4 \sqrt{x_2^2 + 2Ux_1}, & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \\ -\alpha_1 x_2 + \alpha_2 \sqrt{x_2^2 - 2Ux_1}, & x_1 < 0, x_2 > 0 \\ \alpha_3 x_2 + \alpha_4 \sqrt{x_2^2 - 2Ux_1}, & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

la cual es equivalente a (6).

Ahora considérese (6) como candidata a función de Lyapunov para (2), (3). Tomando su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema sobre los cuadrantes $\{x_1 x_2 > 0\}$ se obtiene que:

$$\dot{V} \leq -1.$$

Por otro lado, sobre los cuadrantes $\{x_1 x_2 < 0\}$, la derivada de (6) a lo largo de las trayectorias de (2), (3) es:

$$\dot{V} \leq -\frac{G_m \bar{k} - F}{G_M \bar{k} + F},$$

por lo tanto se tiene que para (2), (3):

$$\dot{V} \leq \begin{cases} -1, & x_1 x_2 > 0 \\ -\frac{G_m \bar{k} - F}{G_M \bar{k} + F}, & x_1 x_2 < 0 \end{cases} \quad (15)$$

De manera que \dot{V} es negativa siempre que se cumpla la desigualdad $G_m \bar{k} > F$.

Ahora sea $\dot{z} = a$ una ecuación diferencial a partir de la cual se tiene que:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} z(t) dt = \int_0^T a dt \implies z(T) - z(0) = aT.$$

Sea T el tiempo de convergencia al origen de las trayectorias de (2), (3), entonces $V(x(T)) = 0$, y aplicando el Lema de Comparación con (15) se sigue que:

$$V(x(T)) - V(x(0)) \leq \begin{cases} -T, & x_1 x_2 > 0 \\ -\frac{G_m \bar{k} - F}{G_M \bar{k} + F} T, & x_1 x_2 < 0 \end{cases}$$

y por lo tanto:

$$T \leq \begin{cases} V(x(0)), & x_1 x_2 > 0 \\ \frac{G_M \bar{k} + F}{G_m \bar{k} - F} V(x(0)), & x_1 x_2 < 0 \end{cases}.$$

Para concluir la demostración de la Proposición 1 falta exhibir que la condición $G_m \bar{k} > F$ es también necesaria. Considere de (2), (3) el campo vectorial $H(x_1, x_2) = [x_2, f(t, x) + g(t, x)u]^T$. Suponga que la perturbación que actúa sobre el sistema está dada por $f(t, x) = F$, $g(t, x) = G_m$, y que las ganancias del controlador fueron elegidas tales que $G_m \bar{k} \leq F$. Bajo estas suposiciones, en la Figura 3 se puede observar un ejemplo del campo H . Suponga ahora que una trayectoria es llevada al conjunto $\{x_2 = 0\}$ en un tiempo t_1 entonces esta trayectoria permanecerá en dicho conjunto para todo $t > t_1$ debido a la dirección del campo H . De la primera ecuación de (2) es fácil ver que $x_1(t) = x_1(t_1)$, $\forall t \geq t_1$ y por lo tanto la trayectoria no será dirigida al origen del sistema. De modo que la condición $G_m \bar{k} > F$ es también necesaria.

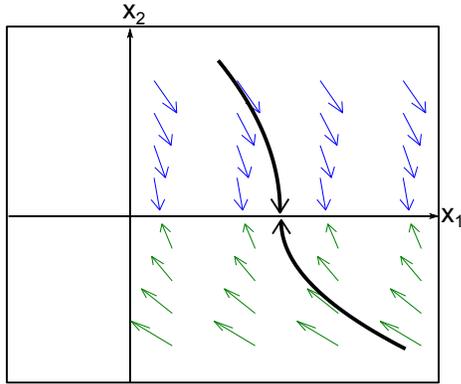


Fig. 3. Trayectorias de (2), (3) suponiendo que $G_m \bar{k} \leq F$

La función (6) es similar a la presentada en [10]. Las condiciones sobre las ganancias dadas en el Teorema 1 coinciden con las proporcionadas en [2], sin embargo la diferencia es que en el presente trabajo se puede asegurar que dichas condiciones son también necesarias (afirmación que no se había hecho anteriormente). Una ventaja adicional sobre la técnica de diseño de funciones de Lyapunov presentada en [10] es que, con el método aquí utilizado, es posible incrementar el grado homogéneo de la función de Lyapunov con tan solo incrementar el grado homogéneo de W , por ejemplo eligiendo $W(x_1, x_2) = |x_1| + x_2^2$ (véase [11]).

IV. ALGORITMO TERMINAL

Considere ahora el controlador por Modos Deslizantes de Segundo Orden conocido como Algoritmo Terminal [7]

$$u = -\alpha \text{sign}(\sigma), \quad \sigma = x_2 + \beta \sqrt{|x_1|} \text{sign}(x_1) \quad (16)$$

con α, β reales positivos. Observe que u es constante en cada una de las regiones en que el plano \mathbb{R}^2 es dividido por la superficie de conmutación $\sigma = 0$, i.e.

$$u = \begin{cases} u_1 = -\alpha, & \sigma > 0 \\ u_2 = \alpha, & \sigma < 0 \end{cases}. \quad (17)$$

Asumiendo que el origen de (2), (16) es estable en tiempo finito, es posible observar distintos comportamientos de las trayectorias. Lo anterior depende de la relación entre las ganancias α y β y los valores que toman las perturbaciones. A continuación se describen estos comportamientos.

- 1) La curva $\sigma = 0$ es un dominio de deslizamiento, de forma que cuando las trayectorias alcanzan $\sigma = 0$ permanecen sobre la curva y son llevadas al origen del sistema. Por simplicidad nos referiremos a este comportamiento como modo Terminal
- 2) En el caso en el que $\sigma = 0$ es solo una superficie de conmutación del control (vea la Figura 5), las trayectorias son llevadas al origen del sistema tan solo cruzando la superficie (nunca permanecen sobre ella). Nos referiremos a este comportamiento como modo Twisting (por analogía al comportamiento del algoritmo que lleva este nombre)
- 3) El tercer comportamiento es una mezcla de los dos anteriores. Esto quiere decir que las trayectorias convergen al origen permaneciendo o no sobre la curva $\sigma = 0$.

En las proposiciones siguientes se establecen las condiciones necesarias y suficientes para las cuales el origen del lazo cerrado (2), (16) es estable en tiempo finito. También se dan los conjuntos de ganancias para los cuales se presentan los tres diferentes comportamientos ya descritos (vase la Figura 4). Para facilitar las expresiones posteriores defínase $U = G_m \alpha - F$ y $\bar{U} = G_M \alpha + F$.

Proposición 2: a) Las trayectorias del sistema (2), (16) convergen en tiempo finito al origen si y solo si las ganancias α y β de (16) son elegidas tales que se cumple lo siguiente:

$$U > 0 \quad \text{y} \quad \beta^2 < \frac{4U\bar{U}}{\bar{U} - U}. \quad (18)$$

b) Si además de (18) se elige $\beta^2 > 2U$, entonces la función continua $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ con

$$V(x) = \begin{cases} \gamma_1 |x_2| + \gamma_2 \sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|_2}, & \sigma x_2 \geq 0 \\ \gamma_3 |x_2| + \gamma_4 \sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|_1}, & \sigma x_2 < 0 \end{cases} \quad (19)$$

donde $[x_1]_2 = x_1 \text{sign}(x_2)$ y

$$\gamma_1 = \frac{1}{\bar{U}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\bar{U}} \frac{\beta(U + \bar{U})}{\sqrt{U\bar{U}(\beta^2 + 2\bar{U})}} \frac{1}{1 - r},$$

$$R = \sqrt{\frac{\bar{U}(\beta^2 - 2U)}{U(\beta^2 + 2\bar{U})}}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\bar{U}}$$

$$\gamma_4 = \frac{\beta(U + \bar{U})}{U\bar{U}\sqrt{\beta^2 + 2\bar{U}}} + \gamma_2 \sqrt{\frac{\beta^2 - 2U}{\beta^2 + 2\bar{U}}}.$$

es una función de Lyapunov para (2), (16). El tiempo de convergencia T al origen puede ser estimado como sigue:

$$T \leq \begin{cases} V(x(0)), & x(0) \in \{\sigma x_2 \geq 0\} \\ \gamma V(x(0)), & x(0) \in \{\sigma x_2 < 0\} \end{cases}, \quad \gamma = \frac{\bar{U}}{U}$$

c) Por otro lado, si además de (18) se elige $\beta^2 < 2U$ entonces la siguiente es una función de Lyapunov para (2), (16):

$$V(x) = \begin{cases} \eta_1|x_2| + \eta_2\sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|}, & \sigma x_2 \geq 0 \\ -\eta_3|x_2| + \eta_4\sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|}, & \sigma x_2 < 0 \\ \eta_3|x_2| + \eta_5\sqrt{-x_2^2 + 2U|x_1|}, & \sigma s_1 < 0 \end{cases} \quad (20)$$

donde

$$\eta_1 = \frac{1}{U}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{U}{\bar{U}}} \frac{\sqrt{\beta^2 + 2\bar{U}}}{\beta U}, \quad \eta_3 = \frac{1}{\bar{U}}$$

$$\eta_4 = \sqrt{\frac{U}{\bar{U}}} \eta_2, \quad \eta_5 = \frac{\sqrt{-\beta^2 + 2\bar{U}}}{\beta \bar{U}},$$

y el tiempo de convergencia al origen es estimado de la siguiente manera:

$$T \leq \begin{cases} V(x(0)), & x(0) \in \{s x_2 \geq 0\} \\ \gamma V(x(0)), & x(0) \in \mathbb{R}^2 - \{s x_2 \geq 0\} \end{cases}, \quad \gamma = \frac{\bar{U}}{U}.$$

Proposición 3: Supóngase que (18) se cumple. a) Si $\beta^2 > 2\bar{U}$ entonces la convergencia al origen de las trayectorias de (2), (16) será en modo Twisting. b) Si $\beta^2 < 2U$ entonces el comportamiento será en modo Terminal. c) Cuando $2\bar{U} \leq \beta^2 \leq 2U$ a pesar de que las trayectorias son llevadas al origen el comportamiento dependerá de los valores que tomen las funciones $f(t, x)$ y $g(t, x)$.

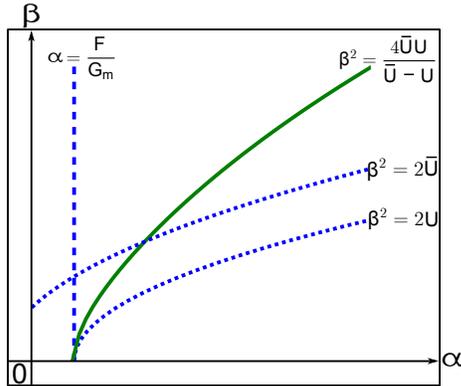


Fig. 4. Conjuntos aceptables de ganancias α, β

Demostración de la Proposición 2

Tal como se hizo en la Sección anterior y para demostrar la Proposición 2 se puede hacer un análisis de perturbaciones para el lazo cerrado (2), (16).

Supóngase que el comportamiento del sistema es en modo Twisting, entonces una cota para todas las posibles trayectorias de (2), (16) es:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{10} + \hat{x}_{20}t + \frac{1}{2}Ut^2 \\ \hat{x}_{20} + Ut \end{bmatrix}. \quad (21)$$

donde

$$U = \begin{cases} -U, & \sigma > 0, x_2 > 0 \\ -\bar{U}, & \sigma > 0, x_2 < 0 \\ U, & \sigma < 0, x_2 < 0 \\ \bar{U}, & \sigma < 0, x_2 > 0 \end{cases}$$

con $U = G_m\alpha - F$ y $\bar{U} = G_M\alpha + F$ (véase la Figura 5).

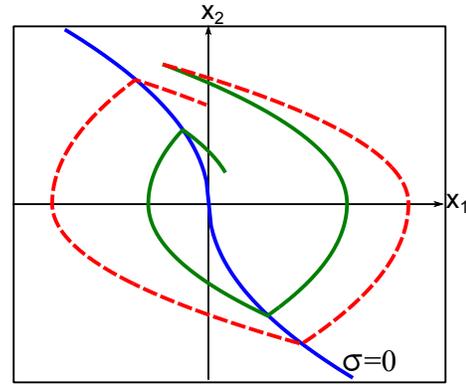


Fig. 5. Trayectorias de (2), (16); Sólida: $x(t)$ nominal; Punteada: $\hat{x}(t)$

Note que la curva (21) puede verse como la solución del siguiente sistema afín por tramos:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U. \quad (22)$$

Así se puede aplicar el método de diseño de funciones de Lyapunov a (22). Eligiendo $W = 1$ se obtiene la función:

$$V(x) = \begin{cases} \gamma_1 x_2 + \gamma_2 \sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|}, & \sigma > 0, x_2 > 0 \\ \gamma_3 x_2 + \gamma_4 \sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|}, & \sigma > 0, x_2 < 0 \\ -\gamma_1 x_2 + \gamma_2 \sqrt{x_2^2 - 2U|x_1|}, & \sigma < 0, x_2 < 0 \\ -\gamma_3 x_2 + \gamma_4 \sqrt{x_2^2 - 2U|x_1|}, & \sigma < 0, x_2 > 0 \end{cases} \quad (23)$$

Dados los valores para las cotas de las perturbaciones, la función (23) existe si y solo si α y β son tales que se cumple la siguiente condición:

$$R = \sqrt{\frac{\bar{U}(\beta^2 - 2U)}{U(\beta^2 + 2\bar{U})}} < 1.$$

Ahora, tomando la derivada de (23) a lo largo de las trayectorias de (2), (16) se obtiene que:

$$\dot{V} \leq \begin{cases} -1, & \sigma x_2 > 0 \\ -\frac{G_m\alpha - F}{G_M\alpha + F}, & \sigma x_2 < 0 \end{cases} \quad (24)$$

así, \dot{V} es negativa siempre que $U = G_m\alpha - F > 0$. Con esta restricción es claro que R es un número real si y solo si $\beta^2 > 2U$. Por lo que se puede decir que $R < 1$ es equivalente a la desigualdad $\beta^2 < \frac{4U\bar{U}}{\bar{U}-U}$.

Por otro lado, a partir de (24) es claro que el tiempo de convergencia al origen T puede ser estimado como sigue:

$$T \leq \begin{cases} V(x(0)), & \sigma x_2 > 0 \\ \frac{G_M\alpha + F}{G_m\alpha - F} V(x(0)), & \sigma x_2 < 0 \end{cases}.$$

Hasta aquí hemos demostrado el inciso b de la Proposición 2. Si ahora se supone que el régimen de las trayectorias de (2), (16) es en modo Terminal entonces el plano fase queda dividido en diferentes regiones delimitadas por las superficies $\sigma = 0$, $s_1 = 0$ and $s_2 = 0$ (véase la Figura 6) donde σ es como en (16) y s_1, s_2 son como sigue:

$$s_1 = x_2 + \sqrt{2U|x_1|} \text{sign}(x_1), \quad s_2 = x_2 + \sqrt{2\bar{U}|x_1|} \text{sign}(x_1).$$

La explicación para esta división es la siguiente:

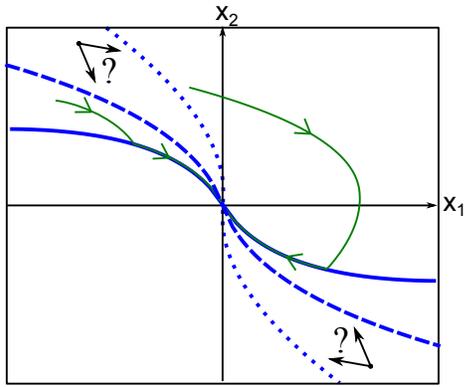


Fig. 6. Comportamiento de las trayectorias de (2), (16) en modo Terminal

- Todas las trayectorias con condiciones iniciales en el conjunto $\{\sigma > 0, s_1 < 0\}$ alcanzarán la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ sobre su lado izquierdo ($x_1 \leq 0$)
- Todas las trayectorias con condiciones iniciales en el conjunto $\{\sigma > 0, s_2 > 0\}$ alcanzarán la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$ sobre su lado derecho ($x_1 \geq 0$)
- Debido a la incertidumbre del sistema, no es posible saber en que parte de $\sigma = 0$ llegarán las trayectorias que comienzan en el conjunto $\{s_1 \geq 0, s_2 \leq 0\}$. El resto del espacio es la parte simétrica de lo descrito.

Nuevamente se hace un análisis de las perturbaciones, es decir se busca una curva que acote a todas las posibles trayectorias del sistema (2), (16) con una misma condición inicial. Para la construcción de la función se evita la problemática del subdominio $\{s_1 s_2 \leq 0\}$ incluyéndolo en $\{\sigma s_1 > 0\}$.

Elijiendo $W(x) = 1$ se puede construir la función:

$$V(x) = \begin{cases} \eta_1|x_2| + \eta_2\sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|_2}, & \sigma x_2 \geq 0 \\ -\eta_3|x_2| + \eta_4\sqrt{x_2^2 + 2U|x_1|}, & \sigma x_2 < 0 \\ \eta_3|x_2| + \eta_5\sqrt{-x_2^2 + 2U|x_1|}, & \sigma s_1 < 0 \end{cases} \quad (25)$$

donde

$$\eta_1 = \frac{1}{U}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{U}{U}} \frac{\sqrt{\beta^2 + 2U}}{\beta U}, \quad \eta_3 = \frac{1}{U}$$

$$\eta_4 = \sqrt{\frac{U}{U}} \eta_2, \quad \eta_5 = \frac{\sqrt{-\beta^2 + 2U}}{\beta U}.$$

La existencia de la función 25 está garantizada por las condiciones

$$U = G_m \alpha - F > 0 \quad \text{and} \quad 2\bar{U} = 2(G_M \alpha + F) > \beta^2.$$

La derivada de (25) a lo largo de las trayectorias del sistema perturbado (2), (16) está dada por:

$$\dot{V} \leq \begin{cases} -1, & \sigma x_2 > 0 \\ -\frac{G_m \alpha - F}{G_M \alpha + F}, & \text{otro} \end{cases},$$

El tiempo de convergencia al origen T con esta función puede ser estimado de la siguiente manera:

$$T \leq \begin{cases} V(x(0)), & x(0) \in \{\sigma x_2 \geq 0\} \\ \gamma V(x(0)), & \text{otro} \end{cases}, \quad \gamma = \frac{\bar{U}}{U}.$$

Con lo anterior hemos demostrado el inciso c de la Proposición 2. Además es claro que el inciso a es una consecuencia directa de los incisos b y c.

Es importante mencionar que para el algoritmo Terminal en el modo Terminal en [10] se da una función que es solo positiva semidefinida ya que se anula sobre la superficie de deslizamiento. A diferencia de aquella, la función (20) es una función de Lyapunov positiva definida y estricta, por lo tanto no es necesario hacer un análisis extra sobre la superficie de deslizamiento.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se diseñaron funciones de Lyapunov para los algoritmos Twisting y Terminal. El método utilizado fué aquel reportado en [11] y que se aplica a sistemas no inciertos. En el presente texto se mostró que haciendo uso de la poca información que se tiene acerca de las perturbaciones es posible mejorar los resultados de las funciones de Lyapunov diseñadas. En particular se encontraron las condiciones necesarias y suficientes sobre las ganancias de los controladores Twisting y Terminal para garantizar la convergencia en tiempo finito de las trayectorias del sistema.

VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de PAPIIT, UNAM, proyecto IN111012, Fondo de Colaboración del II-FI, UNAM, IISGBAS-144-2012, y CONACyT CVU: 371652.

REFERENCIAS

- [1] S. V. Emel'yanov, S. K. Korvin, and A. Levant. High-Order Sliding Modes in Control Systems. *Computational Mathematics and Modeling*, 7(3):294-318, 1996.
- [2] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in Sliding Mode Control. *International Journal of Control*, 58(6):1247-1263, 1993.
- [3] A. Levant. Universal SISO Sliding-Mode Controllers with Finite-Time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9), September 2001.
- [4] A. Levant. Homogeneity approach to High-Order Sliding Mode design. *Automatica*, 41:823-830, 2005.
- [5] A. Levant. Principles of 2-Sliding Mmode design. *Automatica*, 43(4):576-586, April 2007.
- [6] Daniel Liberzon. *Switching in systems and control*. Birkhäuser, Boston, MA, June 2003.
- [7] Z. Man, A. P. Paplinski, and H. R. Wu. A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12):2464-2468, 1994.
- [8] Y. Orlov. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(4):1253-1271, 2005.
- [9] A. Polyakov and A. Poznyak. Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: "Twisting" controller for second-order sliding mode realization. *Automatica*, 45(2):444-448, February 2009.
- [10] A. Polyakov and A. Poznyak. Unified Lyapunov function for a finite-time stability analysis of relay second-order sliding mode control systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 29(4):529-550, 2012.
- [11] T. Sánchez and J. A. Moreno. Construction of Lyapunov Functions for a Class of Higher Order Sliding Modes algorithms. In *51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6454-6459, 2012.
- [12] R. Santiesteban, J. A. Moreno, and L. M. Fridman. Finite-time convergence analysis for "Twisting" controller via a strict Lyapunov function. *11th International Workshop on Variable Structure Systems-VSS 2010. Mexico City, Mexico*, pages 26-28, June 2010.