

Control Difuso Takagi–Sugeno Robusto Aplicado a un Sistema Carro–Péndulo

¹Wilfredo De La Torre, ¹Miguel A. Llama, ¹Francisco Jurado, ²Ramon Garcia Hernandez

¹Instituto Tecnológico de la Laguna

Bldv. Revolución y Calzada Cuauhtémoc, Apdo. Postal 49, Adm. 1, Torreón, Coah., 27001, México

Tel: +52 (871) 705 13 31 Ext. 125 Fax: +52 (871) 705 13 26

² Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Carmen, Cd. del Carmen, Campeche, México

[wdelat] [mllama] [fjurado]@itlalaguna.edu.mx, rghernandez@pampano.unacar.mx

Resumen—En el presente artículo, partiendo de un modelo no lineal para el sistema carro–péndulo, el cual considera fricción viscosa, se propone un modelo difuso Takagi–Sugeno (T–S) para el sistema en cuestión. Teniendo presente que el diseño del controlador difuso T–S se basa en el modelo difuso T–S propuesto, además se propone un modelo difuso T–S con incertidumbres (robusto). Cada uno de los modelos difusos, constituidos por dos reglas difusas, son diseñados empleando la técnica de aproximación local en espacios de partición difusa. Para cada uno de los modelos difusos T–S se propone un Compensador Paralelo Distribuido (PDC) de realimentación de estados para los cuales las ganancias son calculadas mediante el recurso de Desigualdades Lineales Matriciales (LMI), garantizando estabilidad global en lazo cerrado. Por otra parte, debido a que la velocidad tanto del carro como del péndulo no son medibles y obedeciendo al principio de separación de la teoría de sistemas lineales, se propone agregar un observador difuso T–S al sistema de control difuso T–S robusto. Para llevar el péndulo a la posición vertical hacia arriba se emplea la bien conocida técnica del vaivén (*swing-up*). El desempeño de los esquemas de control propuestos se valida vía implementación en tiempo real.

Palabras clave: Compensación Paralela Distribuida, control difuso Takagi–Sugeno robusto, desigualdades lineales matriciales, observador difuso Takagi–Sugeno, sistema carro–péndulo.

I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los sistemas no lineales pueden ser representados por modelos difusos T–S, los cuales son considerados como aproximadores universales (Tanaka y Wang, 2001). En (H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin, 1995), (H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin, 1995), (H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin, 1996), la estabilidad del sistema de control difuso T–S ha sido verificada considerando una función de Lyapunov común, la cual es determinada haciendo uso del recurso de Desigualdades Lineales Matriciales (*Linear Matrix Inequalities*, LMI) y algoritmos de optimización. Nuevas condiciones de estabilidad relajadas y diseños basados en LMI para sistemas de control difuso en tiempo continuo y en tiempo discreto han sido presentados en (K. Tanaka, T. Ikeda, y H. O. Wang, 1998), cuya utilidad es

demostrada sobre el diseño de un regulador y un observador difusos.

El sistema carro–péndulo es una adecuada plataforma experimental para la demostración de aspectos teóricos y prácticos de la teoría de control, debido a su inherente inestabilidad en lazo abierto con dinámicas altamente no lineales, donde las diferentes dinámicas del péndulo y del carro están conjuntamente acopladas. Existen algunas restricciones en el control del sistema tales como el movimiento del carro, debido a la limitada longitud del riel, y la restricción sobre el máximo de la acción de control.

Existen distintos trabajos que abordan el problema de balanceo y estabilización del péndulo invertido sobre un carro, como por ejemplo (E. Asa et al., 2008), (C. W. Tao et al., 2008) y (Trihastuti A., Achmad J., Mohammad N., 2011). En (E. Asa et al., 2008) el método de control de energía se utiliza para llevar y estabilizar el péndulo para una posición vertical con dirección hacia arriba mediante un servo-controlador lineal por realimentación de estados diseñado mediante el Método de Diagramas de Coeficientes (*Coefficient Diagram Method*, CDM). En (C. W. Tao et al., 2008), un controlador híbrido difuso con esquemas de balanceo difuso y asignación de polos vía Compensación Paralela Distribuida (*Parallel Distributed Compensation*, PDC) se adopta para posicionar el péndulo y el carro en los estados deseados. El modelo difuso T–S propuesto para el sistema carro–péndulo, obtenido por linealización mediante series de Taylor alrededor de diferentes puntos de operación, está compuesto por siete reglas difusas en el cual se considera fricción. La efectividad del controlador difuso propuesto es validada en simulación. En (Trihastuti A., Achmad J., Mohammad N., 2011) un control híbrido difuso para el balanceo y estabilización del sistema carro–péndulo ha sido propuesto. El controlador es diseñado empleando el recurso de LMI para sistemas difusos del tipo T–S. El modelo difuso T–S propuesto, compuesto por tres reglas difusas, se obtiene mediante linealización por series de Taylor y para el cual no se consideró la fricción. La efectividad del método se valida a través de simulación y resultados de experimentación en tiempo real.

En el presente trabajo, empleando la técnica de aproxima-

ciones locales en espacios de partición difusa, se propone un modelo difuso T-S así como un modelo difuso T-S robusto para un sistema carro-péndulo, ambos constituidos por dos reglas difusas, en las cuales se considera la fricción viscosa. Se propone para cada modelo difuso T-S un PDC de realimentación de estados cuyas ganancias son determinadas empleando el recurso LMI con el fin de asegurar la estabilidad global en lazo cerrado. Además, se propone un observador difuso paralelo distribuido, considerando el *principio de separación* de la teoría de sistemas lineales, para la estimación de las velocidades del carro y del péndulo. El observador difuso en cuestión se agrega al sistema de control difuso T-S robusto. Para llevar el péndulo a la posición vertical hacia arriba se emplea la técnica del vaivén (*swing-up*). El desempeño de ambos controladores difusos es comparado tanto en simulación como en experimentación. Se reportan únicamente los resultados en tiempo real.

II. MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA CARRO-PÉNDULO

El modelo matemático, en representación en espacio de estados, para el sistema carro-péndulo considerando la fricción viscosa es descrito como (García, 2006):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= \Delta[\gamma\beta x_4^2 \sin x_2 - \beta f_{vx} x_3 + \\ &\quad + \gamma\delta \sin x_2 \cos x_2 + \gamma f_{v\theta} x_4 \cos x_2 + \beta u(t)], \\ \dot{x}_4 &= \Delta[-\gamma^2 x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 - \alpha\delta \sin x_2 + \\ &\quad + \gamma f_{vx} x_3 \cos x_2 - \alpha f_{v\theta} x_4 - \gamma \cos x_2 u(t)];\end{aligned}\quad (1)$$

donde x_1 representa la posición del carro o distancia respecto al centro del riel (m), x_2 representa el ángulo del péndulo con respecto a la vertical (rad), x_3 es la velocidad del carro (m/s), x_4 es la velocidad angular del péndulo (rad/s), g es la constante de gravedad (m/s^2), m es la masa del péndulo (kg), M es la masa del carro (kg), l es la distancia desde el eje de rotación al centro de masa del sistema carro-péndulo (m), I es el momento de inercia del sistema carro-péndulo con respecto al centro de masa ($kg \cdot m^2$), $u(t)$ es la fuerza F aplicada al carro (N), f_{vx} y $f_{v\theta}$ representan la fuerza de fricción viscosa del carro y del péndulo respectivamente ($N \cdot m \cdot s / rad$), $\alpha = m + M$, $\beta = ml^2 + I$, $\gamma = ml$, $\delta = -mgl$ y $\Delta = 1/(\alpha\beta - \gamma^2 \cos^2 x_2)$.

III. MODELADO DIFUSO T-S

III-A. Modelo difuso T-S

El modelo difuso T-S (Takagi y Sugeno, 1985) es descrito mediante reglas difusas del tipo SI-ENTONCES (*IF-THEN*), las cuales representan aproximaciones de entrada-salida locales lineales de un sistema no lineal. La principal característica de un modelo difuso T-S consiste en expresar las dinámicas locales de cada regla a través de un sub-sistema lineal. El modelo difuso completo del sistema se consigue mediante la interpolación difusa de los modelos lineales del sistema.

La estructura de un modelo difuso T-S para un sistema continuo es descrita de la siguiente forma:

Regla i del modelo

$$\begin{aligned}\text{SI} & \quad z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES} & \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r;\end{aligned}\quad (2)$$

donde $z_1(t), \dots, z_p(t)$ son variables premisas conocidas que pueden depender de las variables de estado, perturbaciones externas y/o el tiempo; M_{ij} son los conjuntos difusos, r es el número de reglas del modelo, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son las matrices de los modelos lineales locales.

Dado un par $(x(t), u(t))$, la salida final del sistema difuso T-S es inferida usando un fuzzificador *singleton*, una máquina de inferencia producto y un desfuzzificador centro promedio (L. X. Wang, 1997):

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (3)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \quad (4)$$

donde $z(t) = (z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t))$ y $h_i(z(t)) = w_i(z(t)) / \sum_{i=1}^r w_i(z(t))$ puede ser considerado como el peso normalizado de cada regla SI-ENTONCES. $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$ y el término $M_{ij}(z_j(t))$ es el grado de pertenencia de $z_j(t)$ en M_{ij} .

III-B. Recurso PDC

Para diseñar un controlador difuso para el modelo difuso T-S (2) se emplea la conocida técnica PDC. El recurso PDC ofrece un procedimiento para diseñar un controlador difuso a partir de un modelo difuso T-S dado. Para realizar el controlador PDC, un sistema no lineal deberá primero representarse por un modelo difuso T-S. En el diseño PDC cada i -ésima regla de control es diseñada a partir de la correspondiente i -ésima regla del modelo difuso T-S, i.e., el controlador difuso diseñado comparte los mismos conjuntos difusos con el modelo difuso en las partes premisas. El siguiente controlador difuso vía PDC es sugerido:

Regla i de control

$$\begin{aligned}\text{SI} & \quad z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES} & \quad u(t) = -K_i x(t), \quad i = 1, 2, \dots, r;\end{aligned}\quad (5)$$

donde r es el número de reglas y K_i es la ganancia de realimentación local. El controlador difuso completo está dado por:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t). \quad (6)$$

Note que el controlador (6), en general, es no lineal.

III-C. Modelo difuso T-S robusto

El primer paso para abordar la robustez del control de sistemas difusos es introducir una clase de sistemas difusos con incertidumbres. Para este propósito se introducen bloques del modelo difuso T-S para llegar al siguiente modelo difuso con incertidumbres (Tanaka y Wang, 2001):

Regla i del modelo

$$\begin{array}{ll} \text{SI} & z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES} & \dot{x}(t) = (A_i + D_{ai}\Delta_{ai}(t)E_{ai})x(t) + \\ & + (B_i + D_{bi}\Delta_{bi}(t)E_{bi})u(t), \end{array} \quad (7)$$

para $i = 1, 2, \dots, r$, donde los bloques de incertidumbres satisfacen

$$\|\Delta_{ai}\| \leq \frac{1}{\gamma_{ai}}, \quad \Delta_{ai} = \Delta_{ai}^T(t) \quad (8)$$

$$\|\Delta_{bi}\| \leq \frac{1}{\gamma_{bi}}, \quad \Delta_{bi} = \Delta_{bi}^T(t) \quad (9)$$

para todo i . El modelo difuso robusto completo es representado como

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + D_{ai}\Delta_{ai}(t)E_{ai})x(t) + (B_i + D_{bi}\Delta_{bi}(t)E_{bi})u(t) \}. \quad (10)$$

III-D. Observador difuso T-S

Como en todo diseño del observador, los observadores difusos están obligados a satisfacer que $x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, donde $\hat{x}(t)$ representa al vector de estados estimados por el observador difuso. Como en el caso del diseño del controlador, la técnica PDC puede ser empleada para establecer la siguiente estructura para el observador difuso:

Regla i del observador

$$\begin{array}{ll} \text{SI} & z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES} & \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + \\ \quad + L_i(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C_i\hat{x}(t), \end{cases} \end{array} \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad (11)$$

donde $L_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$ son las ganancias del observador, $y(t)$ y $\hat{y}(t)$ son la salida del sistema difuso y del observador difuso, respectivamente. El observador difuso tiene las leyes del observador lineal en sus partes del consecuente. El estado final estimado por el observador difuso está dado por

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i\hat{x}(t) + B_iu(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))] \quad (12)$$

y la salida final del observador difuso como

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i\hat{x}(t). \quad (13)$$

El problema en el diseño del observador difuso es determinar las ganancias locales L_i en las partes del consecuente. Sustituyendo (4) y (13) en (12) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) B_iu(t) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) L_i C_j (x(t) - \hat{x}(t)). \end{aligned} \quad (14)$$

III-E. Controlador difuso T-S robusto

En la presencia del observador difuso, el controlador PDC difuso, en lugar de (6), adquiere la siguiente forma:

Regla i de control

$$\begin{array}{ll} \text{SI} & z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES} & u(t) = -F_i\hat{x}(t), \end{array} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (15)$$

Luego, el controlador difuso general está dado por

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i\hat{x}(t). \quad (16)$$

donde F_i son las ganancias de realimentación de estados obtenidas del modelo difuso T-S robusto.

Considerando el observador difuso (12)–(13) y el controlador difuso (16), así como (3)–(4), y denotando $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ como el error de estimación se obtiene la siguiente representación:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [(A_i - B_i F_j)x(t) + B_i F_j \tilde{x}(t)] \quad (17)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - L_i C_j) \tilde{x}(t). \quad (18)$$

IV. DISEÑO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

IV-A. Modelo difuso T-S del sistema carro-péndulo

Considerando el modelo no lineal (1) y estableciendo la posición del péndulo, i.e. $x_2(t)$, como variable premisa, empleando el recurso de aproximación local en espacios de partición difusa (Tanaka y Wang, 2001) se propone el siguiente modelo difuso T-S para el sistema carro-péndulo:

Regla 1 del modelo

$$\begin{array}{ll} \text{SI} & x_2(t) \approx 0 \\ \text{ENTONCES} & \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \end{array} \quad (19)$$

Regla 2 del modelo

$$\begin{array}{ll} \text{SI} & x_2(t) \approx \left| \frac{\pi}{8} \right| \\ \text{ENTONCES} & \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \end{array} \quad (20)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Delta_1\gamma\delta & -\Delta_1\beta f_{vx} & \Delta_1\gamma f_{vt} \\ 0 & -\Delta_1\alpha\delta & \Delta_1\gamma f_{vx} & -\Delta_1\alpha f_{vt} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Delta_2\gamma\delta\xi_1 & -\Delta_2\beta f_{vx} & \Delta_2\gamma\Gamma f_{vt} \\ 0 & -\Delta_2\alpha\delta\xi_2 & \Delta_2\gamma\Gamma f_{vx} & -\Delta_2\alpha f_{vt} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_1\beta \\ -\Delta_1\gamma \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta_2\beta \\ -\Delta_2\gamma\Gamma \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con $\xi_1 = \sin(\pi/4)/(\pi/4)$, $\xi_2 = \sin(\pi/8)/(\pi/8)$, $\Delta_1 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2)$, $\Delta_2 = 1/(\alpha\beta - \gamma^2\Gamma^2)$, $\Gamma = \cos(\pi/8)$ y funciones de membresía $\mu_1(x_2(t)) = (\pi/8 - x_2(t))/(\pi/8)$ y $\mu_2(x_2(t)) = 1 - \mu_1(x_2(t))$ para las reglas difusas 1 y 2, respectivamente.

IV-B. Diseño del controlador difuso Takagi–Sugeno vía PDC

Evaluando las matrices para cada subsistema lineal local del modelo difuso T–S (19)–(20) para el carro–péndulo considerando los parámetros del sistema no lineal (1) dados por $M = 2,278$ kg, $m = 0,266$ kg, $l = 0,2958$ m, $I = 0,00532$ kg·m², $f_{vt} = 0,003$ N·m/s/rad, $f_{vx} = 6,33$ N·m/s/rad y asumiendo que el par (A_i, B_i) es controlable, se procede con el diseño del controlador difuso estable. El problema de diseño del control difuso (6) es determinar las ganancias K_i de los controladores lineales locales que satisfagan las condiciones establecidas en el siguiente teorema:

Teorema 1: (Tanaka y Wang, 2001) El equilibrio del sistema de control difuso continuo en lazo cerrado (3)–(6) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz P_C común definida positiva tal que

$$G_{ii}^T P_C + P_C G_{ii} < 0, \quad (21)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P_C + P_C \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad (22)$$

para $i < j$, tal que $h_i \cap h_j \neq \emptyset$, con $G_{ij} = A_i - B_i K_j$.

Las condiciones (21) y (22) no son conjuntamente convexas en K_i y P_C . Multiplicando las desigualdades por la izquierda y por la derecha por P_C^{-1} , definiendo una nueva variable $X = P_C^{-1}$ y definiendo $M_i = K_i X$, de modo que para $X > 0$ se tenga $K_i = M_i X^{-1}$ resultan las siguientes condiciones LMIs que definen el problema del diseño del controlador difuso estable (Tanaka y Wang, 2001):

$$-X A_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i > 0, \quad (23)$$

$$-X A_i^T - A_i X - X A_j^T - A_j X + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i \geq 0, \quad (24)$$

Las ganancias de realimentación K_i y una P_C común pueden obtenerse como

$$P_C = X^{-1}, \quad K_i = M_i X^{-1} \quad (25)$$

a partir de las soluciones X y M_i .

Luego, resolviendo el problema de diseño del controlador difuso estable empleando el LMI Control Toolbox de MATLAB® se determinó la existencia de una matriz P_C simétrica común definida positiva así como las matrices de ganancia K_1 y K_2 , las cuales no se incluyen por falta de espacio.

IV-C. Modelo difuso T–S robusto para un sistema carro–péndulo

Tomando en cuenta las mismas consideraciones de diseño del controlador difuso T–S (CDTS) propuesto previamente, se sugiere ahora el siguiente modelo difuso T–S con incertidumbres para el sistema carro–péndulo:

Regla 1 del modelo robusto

SI $x_2(t)$ es ≈ 0

ENTONCES $\dot{x}(t) = (A_1 + D_{a1}\Delta_{a1}(t)E_{a1})x(t) + (B_1 + D_{b1}\Delta_{b1}(t)E_{b1})u(t)$ (26)

Regla 2 del modelo robusto

SI $x_2(t) \approx |\frac{\pi}{8}|$

ENTONCES $\dot{x}(t) = (A_2 + D_{a2}\Delta_{a2}(t)E_{a2})x(t) + (B_2 + D_{b2}\Delta_{b2}(t)E_{b2})u(t)$ (27)

donde las matrices de incertidumbres están dadas como:

$$D_{a1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_1\beta f_{vx} \\ \Delta_1\gamma f_{vx} \end{bmatrix}, D_{a2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta_2\beta f_{vx} \\ \Delta_2\gamma\Gamma f_{vx} \end{bmatrix},$$

$$D_{b1} = D_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{a1} = E_{a2} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0],$$

$$E_{b1} = \begin{bmatrix} \Delta_1\beta \\ -\Delta_1\gamma \end{bmatrix}, E_{b2} = \begin{bmatrix} \Delta_2\beta \\ -\Delta_2\gamma\Gamma \end{bmatrix},$$

con $\Delta_{a1}(t) = \Delta_{a2}(t) = \Delta_{b1}(t) = \Delta_{b2}(t) = \sin(t)/\gamma_r$, $\gamma_{a1} = \gamma_{a2} = \gamma_{b1} = \gamma_{b2} = \gamma_r = 10$.

IV-D. Diseño del controlador difuso Takagi–Sugeno robusto vía PDC

Evaluando las matrices para cada subsistema lineal local del modelo difuso T–S robusto (26)–(27), se procede con el diseño del controlador difuso T–S robusto. El problema de diseño del controlador difuso robusto es determinar las ganancias F_i de los controladores lineales locales que satisfagan las condiciones establecidas en el siguiente teorema:

Teorema 2: (Tanaka y Wang, 2001) Las ganancias de realimentación F_i que estabilizan el modelo difuso (7) y maximizan las normas de los bloques de incertidumbres (i.e., minimizan γ_{ai} y γ_{bi}) pueden ser obtenidas resolviendo

las siguientes LMIs, donde $\alpha_i, \beta_i > 0$ son parámetros de diseño:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^r \{\alpha_i \gamma_{ai} + \beta_i \gamma_{bi}\}$$

$\gamma_{ai}^2, \gamma_{bi}^2, X, M_1, \dots, M_r, Y_0$

sueto a

$$X > 0, \quad Y_0 \geq 0, \quad \hat{S}_{ii} + (s-1)Y_1 < 0,$$

$$\hat{T}_{ij} - 2Y_2 < 0, \quad i < j \text{ tal que } h_i \cap h_j \neq \emptyset$$

donde $s > 1$, $Y_0 = XQ_0X$, $Q_0 \geq 0$,
 $Y_1 = \text{bloque-diag}(Y_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, $Y_2 = \text{bloque-diag}(Y_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$,

$$\hat{S}_{ii} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} XA_i^T + A_iX \\ -B_iM_i - M_i^T B_i^T \end{pmatrix} & D_{ai} & D_{bi} & XE_{ai}^T & -M_iE_{bi}^T \\ D_{ai}^T & -I & 0 & 0 & 0 \\ D_{bi}^T & 0 & -I & 0 & 0 \\ E_{ai}X & 0 & 0 & -\gamma_{ai}^2 I & 0 \\ -E_{bi}M_i & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 I \end{bmatrix},$$

$$\hat{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} XA_i^T + A_iX \\ -B_iM_j - M_j^T B_i^T \\ +XA_j^T + A_jX \\ -B_jM_i - M_i^T B_j^T \end{pmatrix} & D_{ai} & D_{bi} & D_{aj} & D_{bj} & XE_{ai}^T & -M_j^T E_{bi}^T & XE_{aj}^T & -M_i^T E_{bj}^T \\ D_{ai}^T & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bi}^T & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{aj}^T & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{bj}^T & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai}X & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{ai}^2 I & 0 & 0 & 0 \\ -E_{bi}M_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bi}^2 I & 0 & 0 \\ E_{aj}X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{aj}^2 I & 0 \\ -E_{bj}M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{bj}^2 I \end{bmatrix},$$

donde $X = P^{-1}$ y $M_i = K_i P^{-1}$ para toda i , con P como una matriz común definida positiva. Las ganancias de realimentación pueden ser obtenidas como $F_i = M_i X^{-1}$ de las soluciones X y M_i de las desigualdades descritas anteriormente.

IV-E. Diseño del observador difuso

En el sistema real se tienen dos estados no medibles, la velocidad del carro, i.e. $x_3(t)$, y la velocidad del péndulo, i.e. $x_4(t)$, por lo que es necesario el diseño de un observador difuso para la estimación de los mismos. Considerando para las reglas del observador difuso la misma variable premisa del modelo difuso T-S (19)–(20), i.e. $x_2(t)$, éstas son establecidas como se describe a continuación:

Regla 1 del observador

$$\text{SI} \quad x_2(t) \approx 0$$

$$\text{ENTONCES} \quad \begin{cases} \hat{x}(t) = A_1 \hat{x}(t) + B_1 u(t) + \\ \quad \quad \quad + L_1 (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_1 \hat{x}(t) \end{cases} \quad (28)$$

Regla 2 del observador

$$\text{SI} \quad x_2(t) \approx \left| \frac{\pi}{8} \right|$$

$$\text{ENTONCES} \quad \begin{cases} \hat{x}(t) = A_2 \hat{x}(t) + B_2 u(t) + \\ \quad \quad \quad + L_2 (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_2 \hat{x}(t) \end{cases} \quad (29)$$

Utilizando el *principio de separación*, el problema de estabilidad del observador difuso es resuelto atendiendo el siguiente teorema:

Teorema 3: (Trihastuti A., Achmad J., Mohammad N., 2011) La ecuación (18) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz $P_{\mathcal{O}}$ común definida positiva tal que

$$H_{ii}^T P_{\mathcal{O}} + P_{\mathcal{O}} H_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\left(\frac{H_{ij} + H_{ji}}{2} \right)^T P_{\mathcal{O}} + P_{\mathcal{O}} \left(\frac{H_{ij} + H_{ji}}{2} \right) \leq 0,$$

para $i < j \leq r$ tal que $h_i \cap h_j \neq \emptyset$, con $H_{ij} = A_i - L_i C_j$.

Suponiendo el par (A_i, C_i) observable y ubicando los polos de lazo cerrado en $[-25 + 10i \quad -25 - 10i \quad -27 + 10i \quad -27 - 10i]$ se obtuvieron las ganancias L_1 y L_2 para el observador difuso.

Luego, una matriz $P_{\mathcal{O}}$ común simétrica definida positiva se obtuvo resolviendo las desigualdades del teorema anterior vía LMI Control Toolbox de MATLAB®. Las matrices en cuestión son también excluidas debido a la falta de espacio.

V. RESULTADOS

Para el control de vaivén se utilizó una fuerza positiva $u_{\vartheta(+)}(t) = 23,5 \text{ N}$ y una fuerza negativa $u_{\vartheta(-)}(t) = -21 \text{ N}$. La conmutación del control del vaivén al control difuso T-S se establece para cuando la desviación del péndulo es de $|\frac{\pi}{8}|$ rad con respecto a la vertical hacia arriba. El desempeño en tiempo real para el CDTS (6) y el controlador difuso T-S robusto + observador (CDTSRO) (16) se exhibe en las figuras 1-2. En la figura 1 se muestra la posición tanto del péndulo como del carro utilizando el CDTS (trazo discontinuo) y el CDTSRO (trazo continuo). La figura 2 describe la acción de control aplicada al carro.

Aunque en simulación se conseguía llevar tanto al carro como al péndulo a cero, en tiempo real el carro algunas veces se desplazaba ligeramente alejándose del cero. Para solucionar esto se le sumó la acción de control de un PID y una compensación de la fricción de Coulomb para garantizar la convergencia a cero.

VI. CONCLUSIÓN

En el presente trabajo se propuso un modelo difuso T-S así como un modelo difuso T-S robusto para un sistema carro-péndulo. A diferencia de otros trabajos, ambos modelos están constituidos por un menor número de reglas, además de que se consideró y añadió incertidumbre a la fricción viscosa. También se propuso para cada modelo difuso T-S un PDC de realimentación de estados cuyas ganancias fueron determinadas vía LMIs con el fin de asegurar estabilidad global en lazo cerrado. Además, utilizando el principio de separación, se propuso un observador difuso para la estimación de las velocidades del carro y del péndulo. El observador difuso en cuestión se agregó al sistema de control difuso T-S robusto. Para llevar el péndulo a la posición vertical hacia arriba se empleó la técnica del vaivén (*swing-up*). El desempeño de ambos controladores

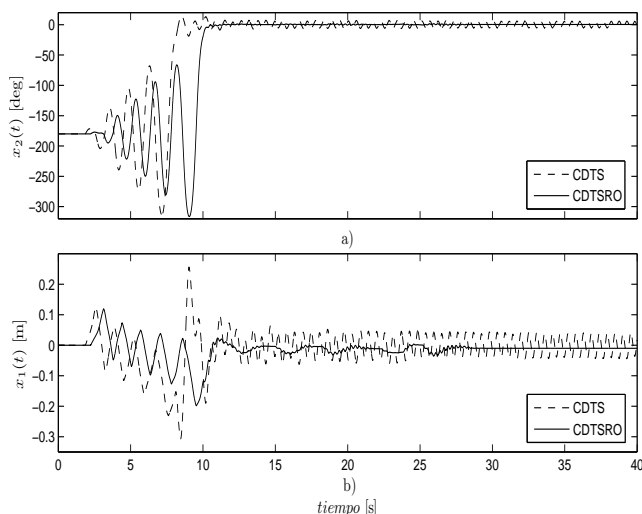


Figura 1. a) Posición del péndulo y b) posición del carro

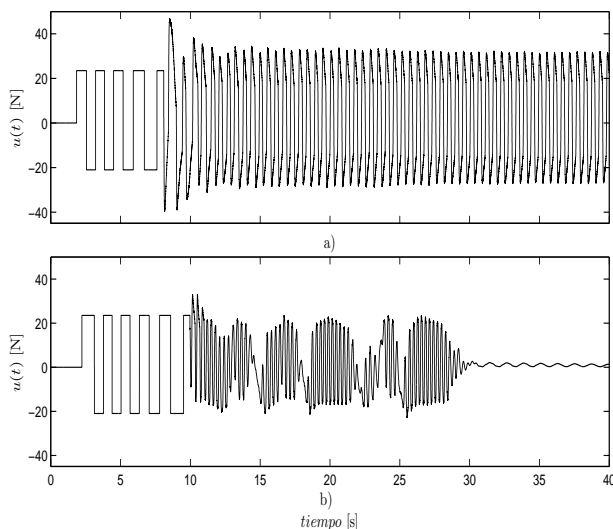


Figura 2. Señales de control a) CDTS y b) CDTSRO

difusos es comparado tanto en simulación como en tiempo real. Se reportan únicamente los resultados en tiempo real, donde el CDTSRO presentó un mejor desempeño.

REFERENCIAS

- Kazuoo Tanaka, Hua O. Wang (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-22459-6.
- Trihastuti A., Achmad J., Mohammad N. (2011). Hybrid fuzzy control for swinging up and stabilizing of the pendulum-cart system. *IEEE*.
- Trihastuti A., Achmad J., Mohammad N. (2011). Swinging up and tracking controller design for a pendulum-cart system using hybrid fuzzy control. *European Journal of Science Research, ISSN 1450-216X Vol.62, No.2, pp. 182-197*.
- García F. Jesús (2006). *Implementación y Control de un Sistema Péndulo Invertido*. Tesis de Maestría, Instituto Tecnológico de la Laguna.
- H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin (1995). Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. *FUZZ-IEEE/IFES'95, pp. 531-538*.
- T. Takagi and M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Tans. Syst. Man. Cyber., Vol. 15, pp 116-132*.
- H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin (1995). An analytical framework of fuzzy modeling and control of nonlinear systems. *American Control Conf., Seattle, Vol.3, pp. 2272-2276*.
- L. X. Wang (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.
- H. O. Wang, K. Tanaka, y M. Griffin (1995). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 4, No. 1, pp. 14-23*.
- K. Tanaka, T. Ikeda, y H. O. Wang (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265*.
- E. Asa, T. Benjanarasuth, J. Ngamwiwit, y N. Komine (2008). Hybrid controller for swinging up and stabilizing the inverted pendulum on cart. *Proc. Int. Conf. Control, Automation and System, pp. 2504-2507*.
- C. W. Tao, J. S. Taur, T. W. Hsieh, y C. L. Tsai (2008). Design of a fuzzy controller with fuzzy swing-up and parallel distributed pole assignment schemes for an inverted pendulum and cart system. *IEEE Trans. Control System Technology, Vol. 16, pp. 11277-1288*.