

# Control de Seguimiento Práctico de un Robot Móvil Tipo (2,0) en Tiempo Discreto

O. Martínez-Zuñiga, M. Velasco-Villa y R. Castro-Linares.  
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.  
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica  
Av. I.P.N. No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco 07360, México, D.F., México.  
Email: {omartinezz,velasco,rcastro}@cinvestav.mx

**Resumen**—Se presenta una estrategia de control por seguimiento para un robot móvil no holónimo tipo unicycle o (2,0) controlando el punto medio del eje de las llantas. El robot se modela considerando una representación discreta exacta. El diseño del controlador se basa en la utilización de retroalimentación estática del estado y en la utilización de las tres ecuaciones de la postura del modelo discreto, con la finalidad de controlar tanto la posición como el ángulo de orientación. Se presentan resultados experimentales y una breve explicación de la plataforma utilizada.

**Palabras clave:** Robótica móvil, control de seguimiento, discretización, retroalimentación.

## I. INTRODUCCIÓN.

Al paso de los años la investigación en el gran campo de la robótica ha generado un vasto conocimiento tanto teórico como aplicado, impulsado por la necesidad de dar solución a un gran mundo de problemas industriales. Del campo de aplicaciones se desprende el área de la robótica móvil (Siegwart and Nourbakhsh, 2004), rama que en la última década ha logrado un gran número de avances teóricos que han permitido la inclusión de ésta área en el ambiente industrial, de servicios y en los últimos años en aplicaciones militares.

Entre las múltiples aplicaciones e investigaciones de la robótica móvil se pueden encontrar la coordinación de vehículos para diversas tareas (Razaei and Abdollahi, 2011), transporte, exploración (minas, espacial, tuberías, terrenos de difícil acceso, etc.) (Liu and Liu, 2009), vigilancia, limpieza, procesos de manufactura, manejo de materiales tóxicos o patógenos peligrosos y en los últimos años, en la industria de almacenaje. Las diversas acciones que pueden realizar los robot móviles están basadas en múltiples teorías como sincronización (Sun and Wang, 2007); basadas en comportamiento, estructuras virtuales, seguimiento (Sun et al., 2009) y líder-seguidor (Li et al., 2005) entre otras. Los diseños de controladores reportados en tiempo discreto para robots móviles utilizan técnicas de control como: seguimiento de caminos (Secchi and Mut, 2007), modos deslizantes (Hamerlain and Alalouche, 2004) y seguimiento de trayectorias (Filipescu et al., 2011); en el control de robots tipo (2,0), pero utilizando un punto de control fuera del eje de las llantas (Rosales-Hernández et al., 2012a) o para otra clase de robots como los omnidireccionales (Velasco-Villa et al., 2007).

En este trabajo se propone una estrategia de control en tiempo discreto para el seguimiento práctico de trayectorias

preestablecidas (Velasco-Villa et al., 2007), con la premisa de que el punto cartesiano a controlar esta colocado en el punto medio del eje de las llantas y que el desarrollo teórico esta basado en una representación discreta exacta del modelo cinemático estándar del robot tipo (2,0) (Rosales-Hernández et al., 2012b).

El problema de seguimiento de trayectorias considerando el punto medio de las llantas ha sido resuelto en tiempo continuo mediante retroalimentación dinámica del estado en (D'Andrea-Novel et al., 1992) mediante un esquema que presenta singularidades en el control cuando la velocidad lineal es cero y soluciones basadas en conmutaciones de la ley de control se presentan en (Velasco-Villa et al., 2009), (Velasco-Villa et al., 2012). El problema de regulación ha sido abordado mediante retroalimentaciones discontinuas (Astolfi, 1996) o mediante retroalimentaciones variantes en el tiempo (Pomet, 1992), (Dixon, 2000). En el presente trabajo la solución presentada para el caso de seguimiento de trayectorias, aunque aproximada (o práctica) esta basada en una retroalimentación estática clásica del estado y se encuentra libre de singularidades en el rango de trabajo del robot móvil.

## II. CLASIFICACIÓN Y PRELIMINARES MATEMÁTICOS.

Se considera un robot móvil tipo unicycle ó (2,0), el cual presenta restricciones no holónomas. Se considera como punto de control el punto medio del eje de las llantas (Canudas et al., 1996) (punto  $P$  descrito en la Figura 1). A partir de la representación gráfica mostrada en la Figura 1 es posible obtener de manera sencilla el modelo cinemático del robot móvil dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cos(x_3) \\ u_1 \sin(x_3) \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Este modelo esta formado por tres estados y dos variables de control  $u_1$  y  $u_2$ , donde  $u_1$  es la velocidad lineal y  $u_2$  es la velocidad angular del robot móvil;  $x_1$  y  $x_2$  son las componentes de posición en el eje  $X_1$  y  $X_2$  respectivamente y  $x_3$  es la orientación angular con respecto al eje  $X_1$ ;  $w_i$  y  $w_d$  son las velocidades angulares izquierda y derecha de las llantas del robot, relacionadas con las velocidades  $u_1$  y  $u_2$  por

$$\begin{bmatrix} w_i \\ w_d \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 1 & -\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

donde  $r$  es el radio de las llantas y  $2\ell$  es la distancia entre las llantas del robot.

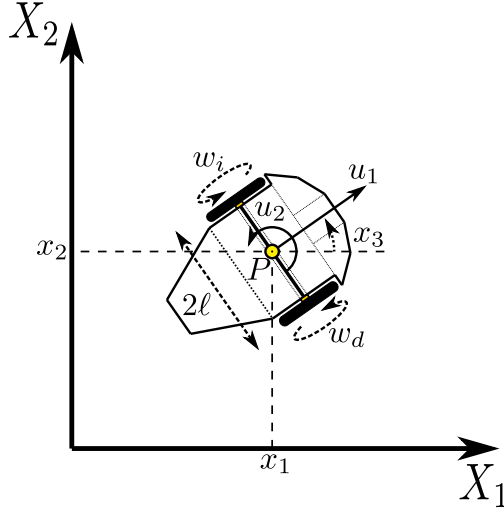


Figura 1. Robot móvil (2,0)

### II-A. Discretización exacta.

El enfoque de control de seguimiento de trayectorias está fundamentado en la utilización del modelo cinemático equivalente en tiempo discreto. Considérese un sistema continuo dado por

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (2)$$

Sea  $T > 0$  un periodo de muestreo constante y sea,  $t_k = \{t \in (kT, kT + T)\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  el intervalo de tiempo entre dos periodos de muestreo consecutivos. La solución de (2) con condiciones iniciales  $kT$  está dada por

$$x(t) = x(kT) + \int_{kT}^t f(x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Considerando señales de control constantes entre instantes de muestreo, esto es,  $u(\tau) = u(kT)$  en  $t_k$  y evaluando la ecuación anterior en  $t = kT + T$  se obtiene

$$x(kT + T) = x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} f(x(\tau), u(kT)) d\tau. \quad (4)$$

Considerando la notación,  $\xi = \xi(kT)$ ,  $\xi^{[\pm]} = \xi(kT \pm T)$  y  $\xi^{[\pm n]} = \xi(kT \pm nT)$ , la ecuación (4) se puede escribirse como

$$x^+ = x + \int_{kT}^{kT+T} f(x(\tau), u(kT)) d\tau, \quad (5)$$

donde, si la integral tiene una solución analítica, entonces es posible obtener un modelo discreto exacto.

### II-B. Modelo discretizado.

Considerando la ecuación (5) y el tercer estado de la ecuación (1), se produce la representación discreta equivalente,

$$x_3^+ = x_3 + Tu_{i2}. \quad (6)$$

Ahora, tomando el primer estado de (1) es sencillo observar que en el intervalo  $t_k$  se obtiene

$$x_1(t) = x_1(kT) + \int_{kT}^t [u_1(\tau) \cos(x_3(kT) + u_2(\tau - kT))] d\tau. \quad (7)$$

Resolviendo la integral y evaluando al final del intervalo  $t_k$  con  $t = kT + T$ , se obtiene

$$x_1^+ = x_1 + \frac{u_1}{u_2} [\sin(x_3 + Tu_2) - \sin(x_3)]. \quad (8)$$

Procediendo de manera similar para el segundo estado de la ecuación (1) se genera el modelo discreto exacto dado por

$$\begin{bmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \\ x_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \frac{u_1}{u_2} [\sin(x_3 + Tu_2) - \sin(x_3)] \\ x_2 - \frac{u_1}{u_2} [\cos(x_3 + Tu_2) - \cos(x_3)] \\ x_3 + Tu_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

el cual puede ser reescrito en la forma,

$$\begin{bmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \\ x_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + Tu_1 \psi(u_2) \cos(x_3 + \frac{T}{2} u_2) \\ x_2 + Tu_1 \psi(u_2) \sin(x_3 + \frac{T}{2} u_2) \\ x_3 + Tu_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde,

$$\psi(u_2) = \frac{\sin(\frac{T}{2} u_2)}{\frac{T u_2}{2}}. \quad (11)$$

## III. ESTRATEGIA DE CONTROL PARA SEGUIMIENTO PRÁCTICO.

La definición básica del problema de seguimiento utilizando robots móviles tipo unicyclo controlando el punto medio del eje de las llantas (punto  $P$  de la Figura 1) ha sido ampliamente estudiada y existe una gran variedad de estrategias y teorías para resolver los problemas generados por las restricciones no holónomas. En particular (D'Andrea-Novel et al., 1992) presenta una solución dinámica al problema en tiempo continuo que tiene como desventaja una singularidad del controlador cuando  $u_1 = 0$ . Debido a que el sistema (1) no satisface la condición necesaria de Brockett (Brockett, 1983), soluciones alternas han sido consideradas en la literatura. Por ejemplo, en (Velasco-Villa et al., 2009), (Velasco-Villa et al., 2012) se presentan una soluciones basadas en conmutaciones de la ley de control.

### III-A. Estrategia de control.

La estrategia de control se desarrolla con base en la utilización del modelo discreto exacto (10) utilizando los dos primeros estados  $x_1^+$  y  $x_2^+$  para el control de la posición en el plano del robot y el tercer estado  $x_3^+$  para el control de la orientación.

Se consideran inicialmente las señales relacionadas con la evolución del punto medio de las ruedas definiendo las salidas del sistema (10) como el punto

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Considerando su evolución en el tiempo, el aplicar un adelanto a estas señales, se tiene que

$$\begin{bmatrix} y_1^+ \\ y_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2u_1 \psi(u_2) \cos(x_3 + \frac{T}{2} u_2) \\ x_2 + 2u_1 \psi(u_2) \sin(x_3 + \frac{T}{2} u_2) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

El objetivo ahora es sintetizar una señal de control  $u_1$  a partir de las señales anteriores. Asignando un comportamiento virtual a las señales  $y_1^+$ ,  $y_2^+$  en la forma

$$y_1^+ = v_1, y_2^+ = v_2$$

se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 + 2u_1\psi(u_2) \cos(x_3 + \frac{T}{2}u_2) &= v_1 \\ x_2 + 2u_1\psi(u_2) \sin(x_3 + \frac{T}{2}u_2) &= v_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Por lo tanto, para la obtención de la señal de control  $u_1$  (velocidad lineal) a partir de la ecuación (14) es posible obtener,

$$\begin{aligned} Tu_1\psi(u_2) \cos(\gamma) \cos(\gamma) &= (v_1 - x_1) \cos(\gamma) \\ Tu_1\psi(u_2) \sin(\gamma) \sin(\gamma) &= (v_2 - x_2) \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\gamma = x_3 + \frac{T}{2}u_2.$$

Sumando ahora las dos ecuaciones de (15) y simplificando términos se obtiene

$$Tu_1\psi(u_2) = (v_1 - x_1) \cos(\gamma) + (v_2 - x_2) \sin(\gamma), \quad (16)$$

para finalmente obtener la variable de control  $u_1$ , en la forma

$$u_1 = \left( \frac{1}{T\psi(u_2)} \right) [(v_1 - x_1) \cos(\gamma) + (v_2 - x_2) \sin(\gamma)] \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} v_1 &= y_{1d}^+ + k_1(y_1 - y_{1d}) \\ v_2 &= y_{2d}^+ + k_2(y_2 - y_{2d}) \end{aligned}$$

con  $y_{1d}$ ,  $y_{2d}$  siendo los valores deseados de las salidas  $y_1$ ,  $y_2$  respectivamente.

Continuando el proceso para obtener la segunda variable de control  $u_2$  (velocidad angular) se define la señal  $y_3 = x_3$ . La evolución de esta señal produce

$$x_3^+ = x_3 + Tu_2. \quad (18)$$

Proponiendo ahora la retroalimentación,

$$u_2 = \left( \frac{1}{T} \right) (v_3 - x_3) \quad (19)$$

donde

$$v_3 = y_{3d}^+ - k_3(y_3 - y_{3d}),$$

se obtiene en lazo cerrado,

$$y_3^+ = y_{3d}^+ - k_3(y_3 - y_{3d}).$$

*Observación 1:* La ley de control (17)–(19) presenta singularidades cuando  $\psi(u_2) = 0$ , esto es, cuando  $u_2 = \pm \frac{2}{T}n\pi$ , para  $n = 1, 2, \dots$ . Nótese que cuando  $u_2 = 0$ ,  $\psi(u_2) = 1$  con lo cual las singularidades aparecen para altos valores de la velocidad angular dependientes directamente del valor del periodo de muestreo  $T$ .

### III-B. Análisis del error de seguimiento.

Para el análisis del error de seguimiento considere la dinámica generada por el sistema (10) en lazo cerrado con la retroalimentación dada por las ecuaciones (17) y (19). Inicialmente considere la ecuación (18), observando su comportamiento en lazo cerrado tenemos,

$$x_3^+ = x_3 + T \left( \frac{1}{T} (v_3 - x_3) \right) = x_{3d}^+ + k_3(x_3 - x_{3d})$$

esto es,

$$e_3^+ - k_3(e_3) = 0 \quad (20)$$

donde

$$e_3 = x_3 - x_{3d}^d.$$

Nótese entonces que la señal  $x_3$  converge exponencialmente a su valor deseado  $x_{3d}^d$ .

Considerando ahora la dinámica de las primeras dos ecuaciones de (10), equivalentemente, sistema (13), en lazo cerrado con las señales de control (17) y (19) y reescribiendo las ecuaciones en términos de las variables del error de seguimiento  $e_1 = x_1 - x_{1d}^d$  y  $e_2 = x_2 - x_{2d}^d$  se obtiene

$$\begin{aligned} e_1^+ &= \frac{1}{2} \{ (k_1 + 1)e_1 \\ &+ [-(k_1 - 1)e_1 \sin(m) + (k_2 - 1)e_2 \cos(m)] \sin(n) \\ &+ [(k_1 - 1)e_1 \cos(m) + (k_2 - 1)e_2 \sin(m)] \cos(n) \\ &- (x_{1d}^+ - x_{1d}) \\ &+ [-(x_{1d}^+ - x_{1d}) \sin(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \cos(m)] \sin(n) \\ &+ [(x_{1d}^+ - x_{1d}) \cos(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \sin(m)] \cos(n) \} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} e_2^+ &= \frac{1}{2} \{ (k_2 + 1)e_2 \\ &+ [(k_1 - 1)e_1 \cos(m) + (k_2 - 1)e_2 \sin(m)] \sin(n) \\ &+ [(k_1 - 1)e_1 \sin(m) - (k_2 - 1)e_2 \cos(m)] \cos(n) \\ &- (x_{2d}^+ - x_{2d}) \\ &+ [(x_{1d}^+ - x_{1d}) \cos(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \sin(m)] \sin(n) \\ &+ [(x_{1d}^+ - x_{1d}) \sin(m) - (x_{2d}^+ - x_{2d}) \cos(m)] \cos(n) \} \end{aligned} \quad (22)$$

Las ecuaciones anteriores pueden reescribirse en la forma

$$e_1^+ = \frac{1}{2} (k_1 + 1) e_1 + h_1(e_1, e_2, e_3) + h_2(x_d^+, x_d, e_3) \quad (23)$$

$$e_2^+ = \frac{1}{2} (k_2 + 1) e_2 + h_3(e_1, e_2, e_3) + h_4(x_d^+, x_d, e_3) \quad (24)$$

donde

$$h_1 = \frac{1}{2} \{ [-(k_1 - 1)e_1 \sin(m) + (k_2 - 1)e_2 \cos(m)] \sin(n) + [(k_1 - 1)e_1 \cos(m) + (k_2 - 1)e_2 \sin(m)] \cos(n) \}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \{ -(x_{1d}^+ - x_{1d}) + [-(x_{1d}^+ - x_{1d}) \sin(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \cos(m)] \sin(n) + [(x_{1d}^+ - x_{1d}) \cos(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \sin(m)] \cos(n) \}$$

$$h_3 = \frac{1}{2} \{ [(k_1 - 1)e_1 \cos(m) + (k_2 - 1)e_2 \sin(m)] \sin(n) + [(k_1 - 1)e_1 \sin(m) - (k_2 - 1)e_2 \cos(m)] \cos(n) \}$$

$$h_4 = \frac{1}{2} \{ -(x_{2d}^+ - x_{2d}) + [(x_{1d}^+ - x_{1d}) \cos(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \sin(m)] \sin(n) + [(x_{1d}^+ - x_{1d}) \sin(m) - (x_{2d}^+ - x_{2d}) \cos(m)] \cos(n) \}$$

con  $m$  y  $n$  definidos como,

$$m = (x_{3d}^+ + x_{3d}), \quad n = (1 + k_3)e_3.$$

Observando la composición de estos términos es posible obtener una cota superior para  $h_1$  en la forma,

$$\begin{aligned} \|h_1\| &\leq \frac{1}{2} \{ \|-(k_1 - 1)e_1 \sin(m) + (k_2 - 1)e_2 \cos(m)\| \\ &\quad + \|(k_1 - 1)e_1 \cos(m) + (k_2 - 1)e_2 \sin(m)\| \} \\ &\leq \frac{1}{2} \{ [\|(k_1 - 1) \sin(m)\| + \|(k_1 - 1) \cos(m)\|] \|e_1\| \\ &\quad + [\|(k_2 - 1) \cos(m)\| + \|(k_2 - 1) \sin(m)\|] \|e_2\| \} \end{aligned}$$

de donde, definiendo  $e = [e_1 \ e_2]^T$  se obtiene

$$\|h_1(e_1, e_2, e_3)\| \leq k_{P1} \|e\|. \quad (25)$$

Por otra parte, el término  $h_2$  produce

$$\begin{aligned} \|h_2\| &\leq \frac{1}{2} \{ \|x_{1d}^+ - x_{1d}\| \\ &\quad + \|(x_{1d}^+ - x_{1d}) \sin(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \cos(m)\| \\ &\quad + \|(x_{1d}^+ - x_{1d}) \cos(m) + (x_{2d}^+ - x_{2d}) \sin(m)\| \} \\ &\leq \frac{1}{2} \{ \|x_{1d}^+ - x_{1d}\| (1 + \|\sin(m)\| + \|\cos(m)\|) \\ &\quad + \|x_{2d}^+ - x_{2d}\| (\|\sin(m)\| + \|\cos(m)\|) \} \end{aligned}$$

obteniendo equivalentemente

$$\|h_2(x_d^+, x_d, e_3)\| \leq k_{P2}. \quad (26)$$

Aplicando el mismo procedimiento para  $h_3$  y  $h_4$  obtenemos las cotas dadas por,

$$\|h_3(e_1, e_2, e_3)\| \leq k_{P3} \|e\| \quad (27)$$

$$\|h_4(x_d^+, x_d, e_3)\| \leq k_{P4} \quad (28)$$

donde en los desarrollos anteriores  $k_{P1}, k_{P2}, k_{P3}$  y  $k_{P4} \in \mathbb{R}^+$ .

A partir de las ecuaciones (23), (24), la dinámica de  $e_1$  y  $e_2$  se expresa como

$$e^+ = Ae + H_1 + H_2 \quad (29)$$

con

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{bmatrix} h_1(kT) \\ h_3(kT) \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_2(kT) \\ h_4(kT) \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(k_1 + 1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(k_1 + 1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La solución en el tiempo del sistema (29) esta dada por

$$e(k) = A^k e(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{(k-1-m)} H(m) \quad (30)$$

con

$$H(m) = H_1(m) + H_2(m).$$

Considerando que  $H(m)$  puede acotarse como,

$$\|H(m)\| \leq k_{P5} \|e(m)\| + k_{P6},$$

aplicando normas a la ecuación (30) se tiene entonces,

$$\begin{aligned} \|e(k)\| &\leq \|A\|^k \|e(0)\| \\ &\quad + \sum_{m=0}^{k-1} \|A\|^{(k-1-m)} \{k_{P5} \|e(m)\| + k_{P6}\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando ahora el máximo valor de  $\|e(k)\|$  para todo  $k$  dado por  $\|e(k)\|_s = \sup_{k=0,1,2,\dots} \|e(k)\|$  se obtiene la desigualdad

$$\|e(k)\|_s \leq \|A\|^k \|e(0)\| + \left[ \sum_{m=0}^{k-1} \|A\|^{(k-1-m)} \right] \{k_{P5} \|e(m)\|_s + k_{P6}\}. \quad (32)$$

Dado que los valores propios de la matriz  $A$  satisfacen  $\lambda_i\{A\} < 1$ . Es claro que,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\|A\|^k) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=0}^{k-1} \|A\|^{(k-1-m)} \right) &= \frac{1}{1 - \|A\|}. \end{aligned}$$

De lo anterior

$$\|e(k)\|_s \leq \frac{k_{P5} \|e(m)\|_s + k_{P6}}{1 - \|A\|}, \quad (33)$$

y considerando que  $\|e(k)\| \leq \|e(k)\|_s$  se obtiene finalmente,

$$\|e(k)\|_s \leq \frac{k_{P6}}{1 - \|A\| - k_{P5}}. \quad (34)$$

Esta última expresión indica que el sistema es prácticamente estable. Nótese que se requiere adicionalmente satisfacer la condición,

$$\|A\| + k_{P5} < 1. \quad (35)$$

#### IV. RESULTADOS EXPERIMENTALES.

Para la validación de los resultados teóricos se desarrolló una plataforma experimental compuesta por un sistema de visión y sensado especializado (NaturalPoint, 2013). En general, el sistema detecta varios objetos rígidos, de los cuales es posible obtener su posición y orientación respecto a un marco de referencia absoluto. Las posiciones obtenidas son utilizadas para el cálculo de la señal de retroalimentación que se utiliza para el control del robot móvil. El proceso descrito se repite para cada periodo de muestreo considerado.

##### IV-A. Plataforma experimental.

El experimento ejecutado consta de la utilización de un robot García, (ver la Figura 2) de la marca Acroname con comunicación inalámbrica a un sistema de control remoto; un conjunto de 8 cámaras tipo *Flex13* de la compañía *OptiTrack* que genera una área de trabajo de  $2,20 \times 2,50m$  a una tasa de muestreo de 120 cuadros por segundo. Se considera además una configuración geométrica irregular (véase también la Figura 2), de marcadores reflejantes de *OptiTrack* para la detección del cuerpo rígido (robot). La posición y orientación del vehículo se obtiene mediante el programa *TrackingTool* de la compañía *NaturalPoint*. Se utiliza un servidor VRPN (Red Periférica de Realidad Virtual (Virtual Reality Peripheral Network))-(VRPN, 2013) que trasmite en tiempo real a la computadora de control los datos de posición y orientación del robot. Se cuenta con una interfaz gráfica que procesa el comportamiento del robot y los valores de la señal de retroalimentación obtenida, la cual es enviada al robot con un periodo de muestreo de  $94ms$ .

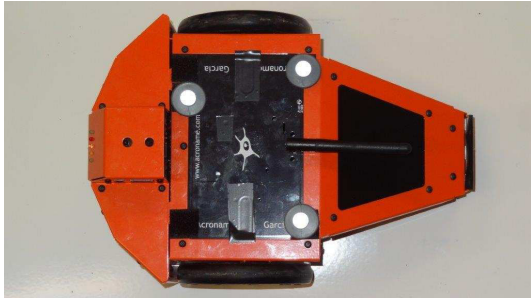


Figura 2. Robot García con marcadores reflejantes de Optitrack

#### IV-B. Parámetros de implementación.

La evaluación experimental de la ley de control se lleva a cabo al considerar una trayectoria de referencia tipo flor. Esta trayectoria consta de tres pétalos y se define como,

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos(3kT) \cos(kT) \\ x_2 &= a \sin(3kT) \sin(kT) \end{aligned}$$

donde  $a = 1$  genera una flor de tres pétalos que se encuentra contenida en una área de  $1,6 \times 2m$ . Los parámetros físicos del robot son  $m = 0,091m$  y  $r = 0,05m$ . Las condiciones iniciales del experimento, tiempo y ganancias de los controladores están descritos en la Tabla I.

Condiciones iniciales			Ganacias			T
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$t$
-0,2m	-0,3m	-2,3rad	0,9	0,9	0,1	86,9s

TABLA I  
CONDICIONES DEL EXPERIMENTO

El experimento tiene una duración de 86,9 seg., en los cuales el robot móvil converge a la trayectoria deseada en un tiempo aproximando de 27 seg., debido a que las condiciones iniciales del robot están bastante alejadas del punto inicial de la trayectoria.

La Figura 3 muestra el comportamiento del robot en el plano. Los errores de posición  $e_1$  y  $e_2$  se muestran en las Figuras 4 y 5 y el error de orientación  $e_3$  en la Figura 6, donde se observa que la convergencia a una vecindad del origen es lenta debido a condiciones iniciales alejadas. En las Figuras 7 y 8 se observan las señales de control donde el control  $u_1$  está acotado a una velocidad máxima de  $0,6342m/s$ , velocidad determinada acorde a las características físicas del robot y  $u_2$  presenta un sobre impulso suscitado por la diferencia entre el ángulo deseado y el real, que se corrige rápidamente, para después tener un comportamiento suave.

De los resultados experimentales, es posible contemplar que la estrategia de control por seguimiento de trayectoria práctica consigue llevar al robot móvil a lo largo de la trayectoria deseada controlando el punto medio del eje de las llantas con un error de seguimiento que se encuentra en una pequeña vecindad del origen.

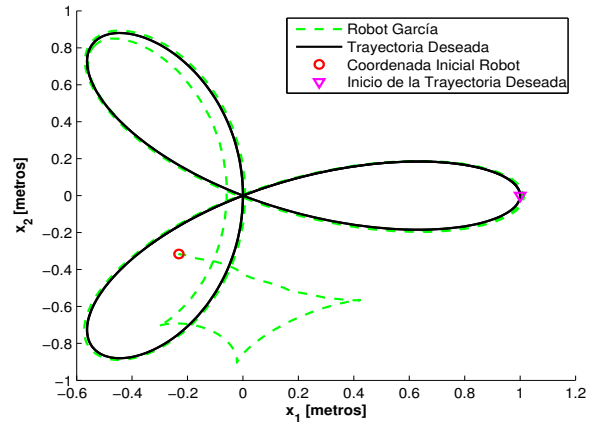


Figura 3. Trayectoria deseada vs trayectoria de seguimiento

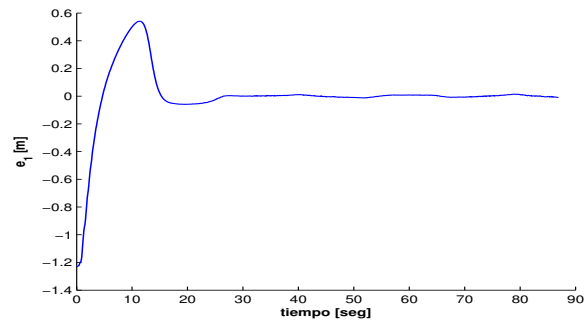


Figura 4. Error experimental en  $e_1$

## V. CONCLUSIONES.

El trabajo presenta una estrategia de control de seguimiento práctico de una trayectoria de referencia. Se considera el modelo discreto exacto de un robot móvil tipo (2,0) el cual presenta restricciones no holónomas en su versión continua equivalente. Se realiza el seguimiento práctico de la posición y orientación del robot mediante una plataforma experimental, la cual permitió corroborar las demostraciones del análisis del error al observar físicamente las pequeñas regiones acotadas cercana a cero de cada error y el correcto seguimiento de la trayectoria por el robot. Actualmente y motivados por los resultados satisfactorios se esta trabajando para ampliar el diseño del control para múltiples robots bajo un esquema de sincronización y con un manejo similar de los errores involucrados.

## REFERENCIAS

- Astolfi, A. (1996). Discontinuous control of nonholonomic systems, *System and Control Letters* 27: 37-45.
- Brockett, R. (1983). *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, in Differential Geometric Control Theory*, Birkhauser, Boston, MA.
- Canudas, C., Siciliano, B., Bastin, G., Brogliato, B., Campion, G., D'Andrea-Novél, B., Luca, A. D., Khalil, W., Lozano, R., Ortega, R., Samson, C. and Tomei, P. (1996). *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, London.
- D'Andrea-Novél, B., Bastin, G. and Campion, G. (1992). Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotic and Automation*, Nice, France, pp. 2527-2532.

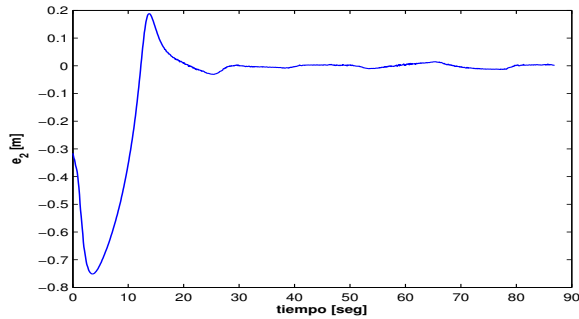


Figura 5. Error experimental en  $e_2$

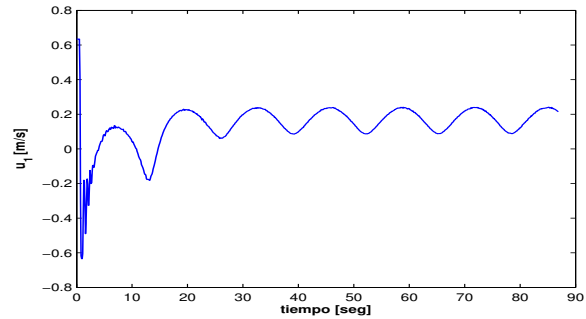


Figura 7. Entrada de control  $u_1$

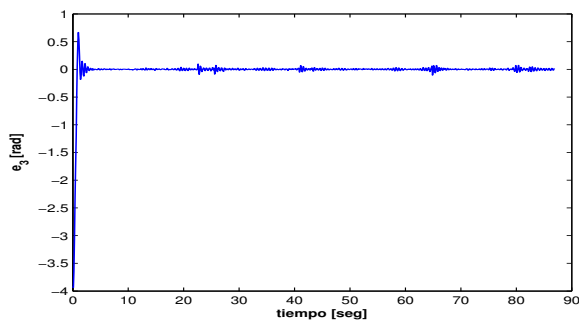


Figura 6. Error experimental en  $e_3$

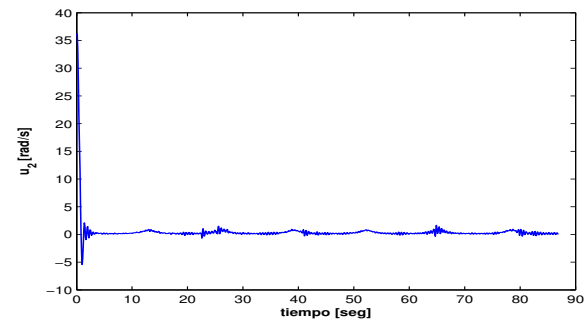


Figura 8. Entrada de control  $u_2$

Dixon, W. E. (2000). Global exponential setpoint control of wheeled mobile robots: a lyapunov approach, *Automatica* **36**: 1741–1746.

Filipescu, A., Minzu, V., Dumitrascu, B. and Filipescu, A. (2011). Trajectory-tracking and discrete-time sliding-mode control of wheeled mobile robots, *IEEE International Conference on Information and Automation*, Shenzhen, China, pp. 27–32.

Hamerlain, M. and Alalouche, T. (2004). Sliding mode control applied to mobile robot: continuous-time and discrete-time cases, *IEEE First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing*, pp. 15–20.

Li, X., Xiao, J. and Cai, Z. (2005). Backstepping based multiple mobile robots formation control, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 887–892.

Liu, Y. and Liu, G. (2009). Mobile manipulation using tracks of a tracked mobile robot, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, St. Louis, MO, pp. 948–953.

NaturalPoint (2013). Optitrack, <http://www.naturalpoint.com/optitrack/>.

Pomet, J. B. (1992). Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift, *System and Control Letters* **18**: 147–158.

Razaei, H. and Abdollahi, F. (2011). Mobile robots cooperative control and obstacle avoidance using potencial field, *IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Budapest, Hungary, pp. 61–66.

Rosales-Hernández, F., Velasco-Villa, M. and Castro-Linares, R. (2012a). Sincronización de robot móviles tipo (2,0) mediante un enfoque discreto, *Congreso Nacional de Control Automático, AMCA*, Campeche, México, pp. 66–71.

Rosales-Hernández, F., Velasco-Villa, M. and Castro-Linares, R. (2012b). Sincronización en tiempo discreto de robots móviles sujeto a retardos de tiempo, *XV Congreso Latinoamericano de Control Automático*, Lima, Perú.

Secchi, H. A. and Mut, V. A. (2007). Path following: discrete stable control of mobile robots, *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, Harbin, China, pp. 2144–2149.

Siegwart, R. and Nourbakhsh, I. (2004). *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, The MIT Press, Massachusetts, USA and London, England.

Sun, D. and Wang, C. (2007). Controlling swarms of mobile robots for switching between formations using synchronization concept, *IEEE*

*International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italy, pp. 2300–2305.

Sun, S., Wang, C. and Feng, G. (2009). A synchronization approach to trajectory tracking of multiple robots while maintaining time-varying formations, *IEEE Transactions on Robotics* **25**(5): 1074–1086.

Velasco-Villa, M., Alvarez-Aguirre, A. and Rivera-Zago, G. (2007). Discrete-time control of an omnidirectional mobile robot subject to transport delay, *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, New York City, USA, pp. 2171–2176.

Velasco-Villa, M., Aranda-Bricaire, E. and Orosco-Guerrero, R. (2009). Discrete-time modeling and path tracking for a wheeled mobile robot, *Computación y Sistemas* **13**(2): 142–160.

Velasco-Villa, M., Aranda-Bricaire, E., Rodríguez-Cortés, H. and González-Sierra, J. (2012). Trajectory tracking for a wheeled mobile robot using a vision based positioning system and an attitude observer, *European Journal of Control* **18**(4): 348–355.

VRPN (2013). Unc computer s, <http://www.cs.unc.edu/Research/vrpn/>.