

Control Tolerante a Fallas de un Sistema Lineal por Pedazos

J.L. Jaimes-Maldonado, M. Adam-Medina, L.G. Vela-Valdés, G.V. Guerrero-Ramírez, J.C. Rodríguez-Cerda, C. Morales-Morales, R.F. Escobar-Jiménez
 Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CENIDET
 Interior Internado Palmira, Cuernavaca Morelos 62490, México
 (jljm11e, adam, velaluis, gerardog, j_cesar, cornelio, esriji)@cenidet.edu.mx
 Tel. 01(777) 362-7770, Fax 01(777) 362-7795

Resumen—El presente trabajo trata sobre el estudio de los sistemas de control con tolerancia a fallas que son modelados lineales por pedazos, cuyo objetivo es representar la dinámica no lineal del sistema mediante aproximaciones lineales en puntos de operación específicos haciendo uso de una ley de conmutación que gobierna el comportamiento del sistema. En particular se trata como caso de estudio un sistema de bandas y rodillos impulsados por 3 servomotores, el cual fue modelado lineal por pedazos empleando el paquete de programación *Matlab*®. Para dicho sistema fue desarrollado un control tolerante a fallas el cual permite compensar desviaciones aditivas (fallas aditivas) abruptas en los sensores de la planta para cada subsistema.

Palabras clave: Sistema Lineal por Pedazos, Sistema Conmutado, Control Tolerante a Fallas, Diagnóstico y Aislamiento de fallas.

I. INTRODUCCIÓN

En general un sistema lineal por pedazos (SLP) es en esencia un sistema lineal conmutado, el cual consiste en un número finito de subsistemas y una ley que coordina las conmutaciones entre esta familia. Este tipo de sistemas proporcionan un marco que une a los sistemas lineales y los sistemas complejos no lineales. Los sistemas lineales por pedazos pertenecen a una clase especial de sistemas de control híbridos, que comprenden un conjunto de subsistemas descritos por dinámicas lineales (diferenciales/ecuaciones en diferencias), junto con una regla o señal de conmutación que rige el comportamiento entre los subsistemas (Sun y Ge, 2005), (Blanke y Kinnaert, 2003). Los sistemas lineales por pedazos no sólo representan un reto para la investigación académica, sino que también sirve de puente entre el tratamiento de sistemas lineales y los sistemas de alta complejidad (Peleties y DeCarlo, 1992). Estos sistemas son relativamente fáciles de manejar con muchas herramientas poderosas de análisis lineal y multilineal aplicables o extensibles para hacer frente a los sistemas no lineales (Baglietto, Battistelli, y Luca, 2006).

II. SISTEMAS CONMUTADOS

Un sistema conmutado esta compuesto por una familia de subsistemas y una ley de conmutación que gobierna el modo de actuar de cada uno de estos modelos sea esta ley conocida y arbitraria o desconocida y arbitraria dependiente del tiempo, los estados, las salidas o entradas exógenas. Matemáticamente y de manera general está descrita por la siguiente ecuación

(Sun y Ge S., 2005):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_{\sigma}(x(t), u(t), d(t)) & x(t_0) &= 0 \\ y(t) &= g_{\sigma}(x(t), w(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x(t)$ es el estado, $u(t)$ es la entrada o señal de referencia, $y(t)$ es la salida medible, $d(t)$ y $w(t)$ se refieren a señales externas tales como perturbaciones, σ es una señal de conmutación constante por pedazos que toma valores de un conjunto índice $M = \{1, \dots, m\}$, f_k para $k \in M$ son campos vectoriales, y g_k , $k \in M$ son funciones vectoriales, para el caso discreto tenemos que el operador derivativo cambia a ecuaciones en sumatorias sucesivas (*i.e.*, $\dot{x} = x(t+1)$). La figura 1 ilustra el diagrama de la arquitectura de un sistema lineal por pedazos. Es claro que un sistema conmutado es por naturaleza multi-modelo. Cada modelo individual para $k \in M$ es denominado *subsistema* o *modo* del sistema conmutado.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_k(x(t), u(t), d(t)) & x(t_0) &= 0 \\ y(t) &= g_k(x(t), w(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

La ley de conmutación depende por lo general del tiempo,

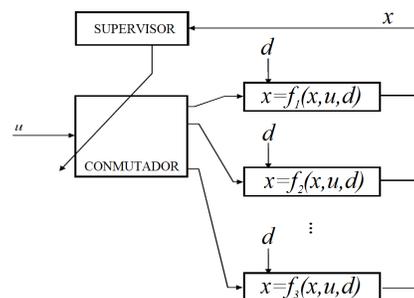


Figura 1. Diagrama de un sistema conmutado genérico

el estado, la salida, y/o posiblemente una señal externa.

$$\sigma(t+) = \varphi(t, x(t), y(t), z(t)), \quad \forall t \quad (3)$$

Donde $z(t)$ es una señal externa producida por otros dispositivos ajenos al sistema. $\sigma(t+) = \lim_{s \downarrow t} \sigma(s)$ es una señal de conmutación dependiente del tiempo continua por la derecha en todo el conjunto índice bajo el supuesto que si no se garantiza la continuidad de la ley de conmutación, no es posible garantizar que el sistema conmutado exhiba

continuidad en los instantes de conmutación. El objetivo de la señal σ es especificar, a cada instante de tiempo t , el índice $\sigma(t) \in M$ del *subsistema activo*, esto es, el subsistema de la familia (2) para el índice indicado por la señal de conmutación. Por lo tanto σ es continua por la derecha para todo el conjunto índice: $\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau)$ para cada $\tau \geq 0$. Un ejemplo de esta señal de conmutación para el caso en que $M = \{1, 2, 3\}$ se muestra a continuación:

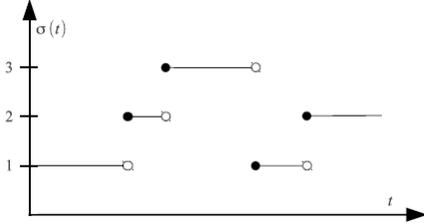


Figura 2. Señal de conmutación dependiente del tiempo

De acuerdo a las definiciones anteriores, enfocaremos nuestra atención a los sistemas lineales por pedazos cuyos subsistemas son LTI y las señales de conmutación son gobernadas por procesos determinísticos, de manera general:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{B}_\sigma u + \mathbf{E}_\sigma z, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= \mathbf{C}_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{D}_\sigma u + \mathbf{G}_\sigma w \\ \sigma &= \varphi(t, x, y, z) \end{aligned} \quad (4)$$

Donde $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k, \mathbf{E}_k, \mathbf{G}_k$ son matrices lineales de dimensiones adecuadas mapeadas en espacios apropiados, el sistema nominal es aquel libre de perturbaciones, esto es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{B}_\sigma u \\ y &= \mathbf{C}_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{D}_\sigma u \\ \sigma &= \varphi(t, x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

Para el caso de sistemas no forzados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}_\sigma \mathbf{x} \\ y &= \mathbf{C}_\sigma \mathbf{x} \\ \sigma &= \varphi(t, x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

II-A. Análisis elemental de sistemas Lineales por Pedazos

Considere el siguiente sistema lineal conmutado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_\sigma x(t) + \mathbf{B}_\sigma u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_\sigma x(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Dado un estado inicial $x(0) = x_0$, una entrada u y una trayectoria de conmutación $\sigma[0, t_f] \mapsto M$, la solución del sistema lineal por pedazos (6) esta dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t; t_0, x_0, u, \sigma) = e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-t_k)} e^{\mathbf{A}_{i_{k-1}}(t-t_{k-1})} \\ &\dots e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-t_0)} x_0 + e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-t_k)} \\ &\dots e^{\mathbf{A}_{i_1}(t_2-t_1)} \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}_{i_0}(t_1-\tau)} \mathbf{B}_{i_0} u(\tau) d\tau + \dots \\ &+ e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-t_k)} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{A}_{i_{k-1}}(t_k-\tau)} \mathbf{B}_{i_{k-1}} u(\tau) d\tau + \dots \\ &+ \int_{t_k}^t e^{\mathbf{A}_{i_k}(t-\tau)} \mathbf{B}_{i_k} u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

para $t_k < t \leq t_{k+1}$ $1 \leq k \leq s$ donde $\{0, t_1, \dots, t_s\}$ es la secuencia en tiempo de conmutación de σ en $[t_0, t_f]$, $\{i_0 = \sigma(0^+), \dots, i_s = \sigma(t_{s+}^+)\}$ es la secuencia índice de conmutación de σ en $[t_0, t_f]$ y $t_{s+1} = t_f$.

Se puede ver que el conjunto alcanzable es:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(C_i, A_i, B_i)_M &= \{x = \phi(t; 0, 0, u, \sigma) : t \geq 0, \\ u \in U^p, \sigma \in \mathcal{S}_{[0, t]}\} &= \{e^{\mathbf{A}_{i_k} h_k} \dots e^{\mathbf{A}_{i_1} h_1} \int_0^{h_0} e^{\mathbf{A}_{i_0} \tau} \mathbf{B}_{i_0} u(\tau) d\tau \\ &+ \dots + \int_0^{h_k} e^{\mathbf{A}_{i_k} \tau} \mathbf{B}_{i_k} u(\tau) d\tau : k \in \mathbb{N}_+, i_j \in M, \\ &h_j > 0, u \in U^p\} \end{aligned}$$

Donde U^p es el conjunto de funciones vectoriales continuas por pedazos *pht*-dimensional. Es posible observar que el conjunto es independiente de la salida. Denotamos al conjunto alcanzable por $\mathcal{R}(C_i, A_i, B_i)_M$. Para algunas matrices $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $t > 0$ tenemos:

$$\left\{ \int_0^t e^{\mathbf{A} \tau} \mathbf{B} u(\tau) d\tau : u \in U^p \right\} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}^j \text{Im} \mathbf{B} \quad (9)$$

donde $\text{Im} \mathbf{B}$ denota el espacio imagen de \mathbf{B}

Definición 1 El sistema (7) es llamado completamente observable, si su espacio no observable es el espacio nulo.

Definición 2 El estado x es llamado no construible si para alguna trayectoria de conmutación σ , existe una entrada u tal que:

$$C_\sigma \phi(t; t_0, x, u, \sigma) = C_\sigma \phi(t; t_0, 0, u, \sigma) \quad \forall t \leq 0$$

II-B. Estabilidad de SLP

Dada una familia de sistemas lineales el sistema conmutado es asintóticamente estable para cada señal de conmutación si se supone que los subsistemas individuales tienen el origen como un punto de equilibrio común: $f_p(0) = 0$ para todas las $p \in P$. Claramente, una condición necesaria para estabilidad (asintótica) bajo conmutación arbitraria es que todos los subsistemas individuales sean estables (asintóticamente). Para comprender esto, considere como ejemplo la Figura 3(a) donde se muestran las trayectorias de dos sistemas aleatorios asintóticamente estables. Si se considera la unión de estos dos sistemas y una ley de conmutación, se tendría entonces un sistema conmutado. Ahora, si se considera una conmutación arbitraria ese sistema conmutado puede, o no, ser estable, esto dependerá de los instantes de conmutación, tal como se ilustra en la Figura 3(b) (Liberzon, 2003):

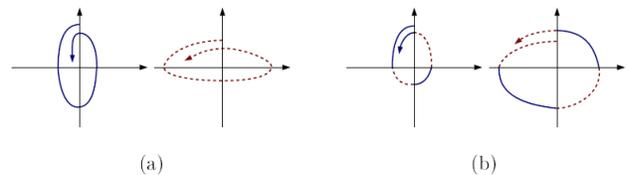


Figura 3. Efecto de la ley de conmutación en la estabilidad de un sistema conmutado. (a) Dos subsistemas aleatorios estables de un sistema conmutado. (b) Instantes de conmutación que hacen el sistema conmutado estable (izquierda) e inestable (derecha).

Para garantizar estabilidad general en el sentido de Lyapunov (Peleties P. y DeCarlo R., 1992), si existe una función común para todos los subsistemas esta decrece a lo largo de cualquier trayectoria del estado del sistema lineal conmutado. Acordemente a esto, el sistema es estable. De hecho, si un sistema lineal conmutado es (garantizado) estable, entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1 Una condición necesaria y suficiente para garantizar estabilidad de un sistema lineal conmutado es la existencia de una función suave de Lyapunov del estado la cual es una función común de Lyapunov para toda la familia de subsistemas (Sun y Ge S., 2005).

Garantizar estabilidad para este tipo de sistemas significa que el sistema es estable aún con una señal de conmutación arbitraria, esto es, ante cualquier trayectoria de conmutación $\sigma_{[0,\infty)} \in M$ el sistema invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad t \geq 0$$

es estable si existe una función cuadrática común de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ para todos los subsistemas:

$$A_i^T P + P A_i \leq 0 \quad i \in M$$

Para el sistema LTI discreto

$$x(k+1) = A_{\sigma}x(k) \quad k \in \mathbb{N}_+ \quad (10)$$

se establece un resultado semejante a su homólogo:

Teorema 2 Para el sistema lineal e invariante en el tiempo descrito por la ecuación (10), las siguientes afirmaciones son equivalentes (Sun y Ge S., 2005):

- el sistema es asintóticamente estable;
- el sistema es exponencialmente estable;
- la matriz A_i es Schur;
- la ecuación en diferencias de Lyapunov

$$P - A_i^T P A_i = Q_i \quad (11)$$

tiene única solución $P > 0$ para cualquier $Q_i > 0$

la solución o trayectoria del sistema estable se refiere a cuando $x_0 \neq 0$ pero esta cerca del origen. Gráficamente podemos expresar lo anterior como:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_{eq}\| \leq \delta \implies \|x(t) - x_{eq}\| \leq \epsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0$

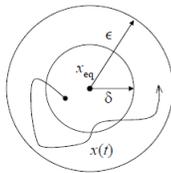


Figura 4. Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

II-C. Observabilidad y controlabilidad de SLP

Para el análisis de observabilidad y controlabilidad de sistemas lineales por pedazos existen criterios que permiten determinar si un sistema es o no observable (Baglietto M., Battistelli G., y Luca S., 2006) y controlable, considere el sistema (7) donde $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall C_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$. CNCA 2013, Enseñada B.C. Octubre 16-18

- El conjunto de estados no observables es igual al subespacio nulo (Kernel) de la matriz de observabilidad $\mathcal{O}[A_i, C_i]$ donde:

$$\mathcal{O}[A_i, C_i] = \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

- El sistema es completamente observable si y solo si $\mathcal{O}[A_i, C_i]$ tiene
- rango columna completo n .

Este análisis puede aplicarse indistintamente a sistemas en tiempo continuo y discreto (Babaali y Pappas, 2005). Otro concepto estrechamente relacionado al de observabilidad, es el que se denomina *reconstructibilidad*. Este, para sistemas de tiempo discreto, se refiere a qué se puede decir de $x(k)$, habiendo observado valores pasados de la salida $y(t)$, durante $0 \leq t \leq k$. Si el subespacio no observable es estable, decimos que el sistema es *detectable*. El conjunto no observable del sistema (7), denotado por $\mathcal{UO}(C_i, A_i, B_i)_M$ es el conjunto de estados no observables, en otras palabras, el conjunto no observable incluye el estado inicial que no puede distinguirse (reconstruirse) desde el origen usando el conocimiento de las salidas y entradas pasadas. Para el análisis de controlabilidad de sistemas lineales conmutados se aplica el siguiente criterio algebraico:

$$\text{rank}[\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_m \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_m, \dots, \mathbf{A}_m \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_1^2 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_m \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1^2 \mathbf{B}_m, \dots, \mathbf{A}_m \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_1^{n-1} \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_m \mathbf{A}_1^{n-2} \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_m^{n-2} \mathbf{B}_m, \mathbf{A}_m^{n-1} \mathbf{B}_m] = n.$$

Dado un sistema para el cual el rango del par $(A, B) = b < n$, existe una matriz transformación de similaridad $\tilde{x} = T^{-1}x$, en que las nuevas matrices de estado tienen la forma:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{nc} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde \tilde{A}_c tiene dimensión k y el par $(\tilde{A}_c, \tilde{B}_c)$ es completamente controlable. Este resultado establece cuáles estados pueden y cuáles no pueden ser llevados a cero. Expresemos el estado y la salida de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c \\ \dot{\tilde{x}}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (14)$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_c & \tilde{C}_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{nc} \end{bmatrix} + Du$$

El *subespacio controlable* del modelo en variables de estado está compuesto por todos los estados generados como combinación de los estados en \tilde{x}_c . La estabilidad de este subespacio está determinada por la ubicación de los valores propios de la matriz \tilde{A}_c . Por otra parte, el *subespacio no controlable* esta formado por todos los estados generados como combinación lineal de los estados en \tilde{x}_{nc} , y su estabilidad queda determinada por los autovalores de la matriz \tilde{A}_{nc} . De esta forma, la entrada no tiene efecto alguno sobre el subespacio no

controlable, por lo que podríamos esperar que este subespacio fuera al menos *estable*, de manera que sus estados decaigan naturalmente al origen. En este caso el modelo en variables de estado se denomina *estabilizable*. Una consecuencia clave de la descripción dada por (13) es el hecho que la función de transferencia esta dada por:

$$\mathbf{H}(s) = \tilde{\mathbf{C}}_c(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_c)^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_c + \mathbf{D} \quad (15)$$

La ecuación (15) establece que los autovalores del subespacio no controlable no aparecen como polos de la función de transferencia. Esto implica que existe una cancelación de los polos correspondientes a las raíces de $\det(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{nc})$.

III. CONTROL TOLERANTE A FALLAS

El avance de la ciencia en el ámbito de Detección, aislamiento, Diagnóstico de fallas y control (Escobar, 2011) se ha incrementado continuamente en requerimientos de optimización, para tales sistemas, las consecuencias de fallas en componentes pueden ser desastrosas. La confiabilidad en este tipo de sistemas ha venido incrementándose para asegurar que tales fallas no ocurran, sin embargo, este objetivo es poco realista y a menudo inalcanzable porque las fallas no solo pueden surgir a causa del envejecimiento y desgaste de los componentes del sistema, sino también por fallas humanas en relación al mantenimiento, conexión, operación e instalación. Por lo tanto, se ha vuelto indispensable el diseño de sistemas de control que puedan tolerar en lo posible fallas en componentes para brindar confiabilidad y disponibilidad (Patton, 1997). Este tipo de sistemas es conocido como sistemas de control tolerantes a fallas (FTCS), que son clasificados en dos categorías: pasivo y activo, con el fin de mantener los objetivos de control a pesar de las restricciones del sistema así como variaciones no deseadas (Hassan, Didier, Christopher y Abbas, 2009).

III-A. Esquemas de Diagnóstico y Aislamiento de Fallas Basado en Observador

Según el número de observadores, los esquemas de diagnóstico pueden clasificarse en (Chen y Patton, 1999)

a) Un solo observador:

- Esquema directo: Observadores de orden completo
- SOS (simplified Observer Scheme) / orden reducido

b) Banco de observadores:

- DOS (Dedicated Observer Scheme) orden (reducido/completo)
- GOS (Generalized Observer Scheme) orden (reducido/completo)

de acuerdo al tipo de falla los esquemas de diagnóstico se clasifican en:

- Falla en sensores IFD (Instrument Fault Detection)
- Falla en actuadores AFD (Actuator Fault Detection)
- Falla en componentes CFD (Component Fault Detection)

Para el caso de CFD se requiere descomponer el sistema en subsistemas y utilizar observadores jerarquizados, la localización no es evidente ni el proceso de diseño general. CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

III-B. Observador de Luenberger para CTF de SLP

Consideremos el sistema LTI por pedazos sin perturbaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathbf{A}_i x + \mathbf{B}_i u \\ y &= \mathbf{C}_i x \end{aligned} \quad (16)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados; $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida y $u \in \mathbb{R}^r$ el vector de entrada conocido, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ son matrices conocidas de dimensiones apropiadas, además se supone que el sistema es observable. Con la estructura y los parámetros del sistema el modelo se conoce, un observador de estado se utiliza para reconstruir las variables de estado no medibles, a partir de las entradas y salidas medidas.

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}_i \hat{x} + L(y - \mathbf{C}_i \hat{x}) + \mathbf{B}_i u \quad (17)$$

Donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ corresponde al vector de estados estimado y $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la ganancia del observador, cuando el observador (17) es aplicado al sistema (16), el error de estimación $e = (x - \hat{x})$ es gobernado por la ecuación.

$$\dot{e} = (\mathbf{A}_i - L\mathbf{C}_i)e \quad (18)$$

Si todos los eigenvalores de $\mathbf{A}_i - L\mathbf{C}_i$ son estables, e se aproximara a cero asintóticamente, si alguna perturbación se añade al sistema (16) como es el caso de un sistema LTI por pedazos con perturbación (4), entonces el observador de Luenberger no será capaz de estimar correctamente los estados a no ser que cierta restricción se aplique a la norma de la señal de perturbación, sin embargo, se puede llegar a obtener buenos resultados mediante un diseño adecuado de la matriz de ganancias del observador L . (Alessandri y Coletta, 2001).

III-C. Controlador PID

Si un proceso de control de segundo orden dado por la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(\tau_1(s) + 1)(\tau_2(s) + 1)} = \frac{k_p}{(\tau(s) + 1)(a\tau(s) + 1)}$$

donde: $\tau_1 > \tau_2$, $\tau = \tau_1$ y $a = \frac{\tau_2}{\tau_1}$, es controlado mediante:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i(s)} + T_d(s) \right)$$

el polinomio característico de control sería en este caso:

$$p(s) = \left(\frac{\tau_1 + \tau_2 + K_c k_p T_d}{\tau_1 \tau_2} \right) s^2 + \left(\frac{1 + K_c k_p}{\tau_1 \tau_2} \right) s + \frac{K_c k_p}{\tau_1 \tau_2 T_i}$$

si se desea que este tenga la forma general:

$$p(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \quad (19)$$

de manera que los polos en lazo cerrado se encuentran ubicados en:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (20)$$

igualando el polinomio característico y el polinomio deseado obtenemos los parámetros requeridos del controlador:

$$K_c = \frac{\tau_1 \tau_2 \omega_n^2 (1 + 2\alpha\zeta) - 1}{k_p} \quad (21)$$

$$T_i = \frac{\tau_1 \tau_2 \omega_n^2 (1 + 2\alpha\zeta) - 1}{\tau_1 \tau_2 \omega_n^3} \quad (22)$$

$$T_d = \frac{\tau_1 \tau_2 \omega_n (1 + 2\alpha\zeta) - \tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2 \omega_n^2 (1 + 2\alpha\zeta) - 1} \quad (23)$$

IV. CASO DE ESTUDIO

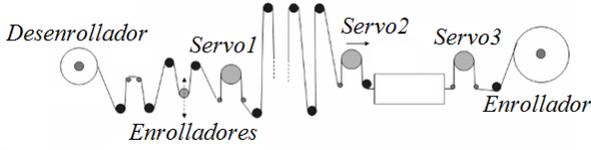


Figura 5. Sistema de bandas y rodillos.

En la Figura 5 se muestra un mecanismo consistente en tres motores acoplados a bandas y rodillos, el proceso es gobernado por tres servomotores, cada servomotor es modelado en un punto de operación específico. El SLP en espacio de estados esta dado por los siguientes modelos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t) + \mathbf{E}_i z(t) & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= \mathbf{C}_i x(t) + \mathbf{D}_i u(t) + \mathbf{G}_i w(t) \\ i(t) &= \gamma(t) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0,60 & 0,10 \\ -0,195 & 0,79 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,16 \\ -0,36 & 0,545 \end{bmatrix}; \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0,59 & 0,10 \\ -0,195 & 0,79 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,20 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0,60 \\ 0,70 \end{bmatrix}; C = I; D = 0 \quad (26)$$

Las velocidades de referencia para cada modelo son: 60, 120 y 90 Rad/s respectivamente. La ley de conmutación es conocida y dependiente del tiempo lo que estabiliza al sistema, diseñada con base a la dinámica deseada del SLP donde: $\sigma = \gamma(t)$. En la Figura 6 se muestra la respuesta nominal del sistema y la estimada por el observador donde el $EMC = 0,0254$.

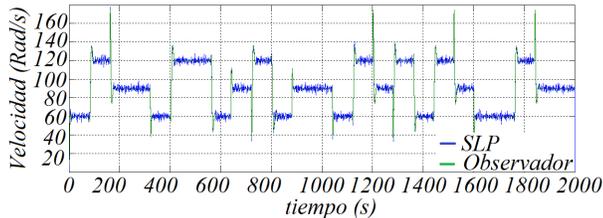


Figura 6. Respuesta del sistema nominal (azul) con observador (verde).

La Figura 7 muestra la respuesta del sensor de velocidad del subsistema 3 ante una falla por pérdida del 50% en la medición del sensor en el minuto 16,67 sin CTF: CNCA 2013, Ensenada B.C. Octubre 16-18

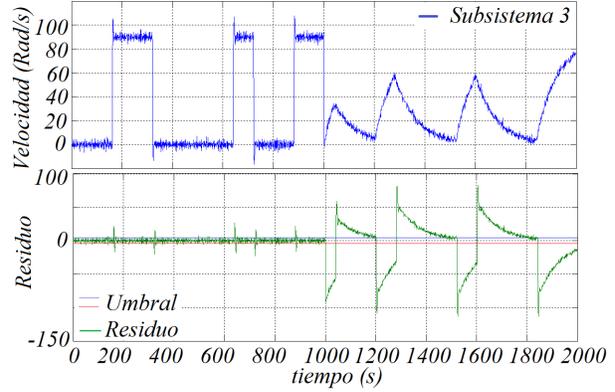


Figura 7. Señal del sensor de velocidad del subsistema 3 con falla (arriba), Umbral del esquema FDI (abajo).

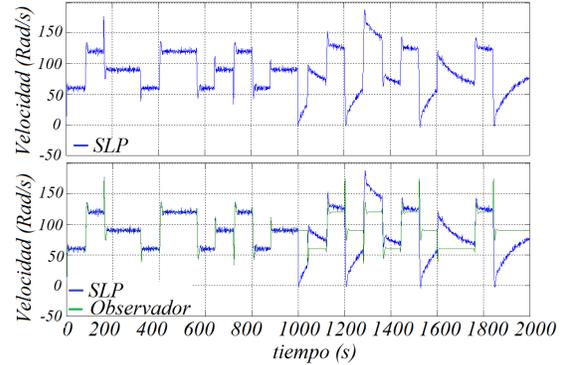


Figura 8. Respuesta del SLP con falla en el sensor de velocidad del subsistema 3.

Como se observa el control sin tolerancia a fallas no es capaz de compensar la falla en el sensor del subsistema 3 y como lo ilustra la figura 8 causó que la planta fallara en los objetivos de control. A continuación en las figuras 9, 10 y 11, se muestran las gráficas correspondientes a los umbrales de los esquemas de FDI de los 3 subsistemas donde se simulan fallas consecutivas en los sensores de velocidad al minuto 23, 6.67 y 26.67 respectivamente empleando un esquema de CTF utilizando controladores PID adaptables de ganancias programadas, puede observarse que el CTF mantiene el residuo dentro del umbral correspondiente aún con la falla del 50% por pérdida de señal en el sensor de velocidad.

Tabla 1. Matriz de fallas del sistema

Modelo	Sen.Vel.	Sen.Corr.
1	1	0
2	1	0
3	1	0

0: sin falla, 1: con falla

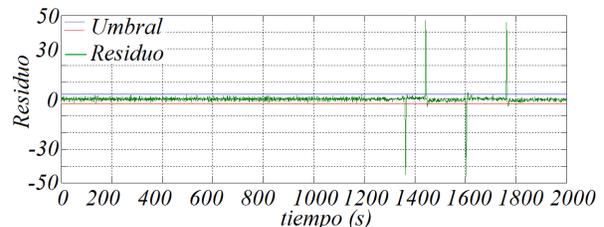


Figura 9. Umbral del esquema de FDI para el control tolerante a fallas del subsistema 1.

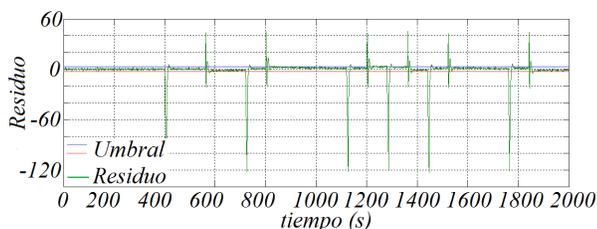


Figura 10. Umbral del esquema de FDI para el control tolerante a fallas del subsistema 2.

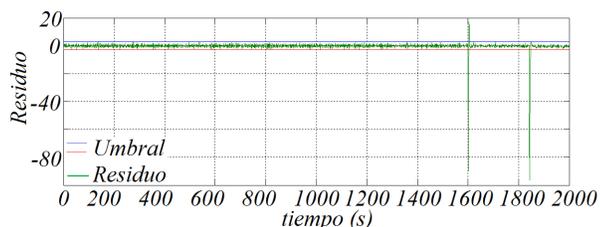


Figura 11. Umbral del esquema de FDI para el control tolerante a fallas del subsistema 3.

En las gráficas anteriores se aprecia el control tolerante a fallas primero al fallar el subsistema 2 y consecutivamente el subsistema 1 y 3, el CTF se dispara al tener el residuo diferente de cero $r \neq 0$. La figura 12 muestra la respuesta del sistema lineal por pedazos con el esquema de control tolerante a fallas, en las Figuras 13 y 14 se puede observar la respuesta del sistema controlado en presencia de perturbaciones de magnitudes considerables.

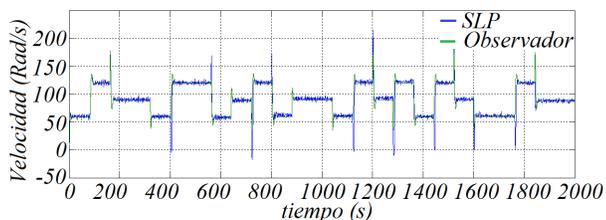


Figura 12. Respuesta del sistema lineal por pedazos con CTF.

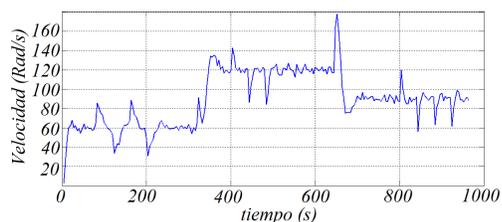


Figura 13. Respuesta del sistema lineal por pedazos con CTF y perturbaciones.

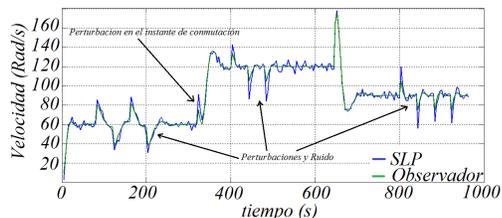


Figura 14. Respuesta del sistema lineal por pedazos con CTF, observador y perturbaciones.

La respuesta global simulada del sistema se conserva con una degradación aceptable en las referencias de los sensores de velocidad $EMC = 0,645$. En las Figuras 12-14 así como en la Tabla 2 se puede observar que el desempeño del controlador tolerante a fallas tiene valores aceptables

se rechazan perturbaciones e incertidumbres paramétricas gracias a las propiedades intrínsecas del controlador.

Tabla 2. Índice de desempeño del controlador PID con fallas en los sensores del 50% en la medición.

Controlador	ISE.	ITAE
1	0.139	0.158
2	0.156	0.145
3	0.145	0.197

Tabla 3. Ganancias de los controladores PID.

Parámetro	C1	C2	C3	C1f	C2f	C3f
P	0.767	0.799	1.198	343.9	79.6	79.6949
I	12.428	11.644	12.644	2565.8	1264.4	568.37
D	0.01	0	0	0	0	0

V. CONCLUSIONES

Con base en los resultados anteriores es posible abarcar la dinámica deseada de un sistema no lineal mediante aproximaciones lineales gobernadas por su propia ley de conmutación conocida y dependiente del tiempo en puntos de operación específicos cumpliendo requerimientos de una dinámica deseada, mostrando las condiciones de estabilidad, controlabilidad y observabilidad que debe cumplir el modelo lineal por pedazos. Se mostró que es posible realizar un esquema de control tolerante a fallas a partir de un diagnóstico de fallas en sensores para sistemas lineales por pedazos. Los índices de desempeño (ISE) que se obtuvieron para el control de cada modelo ($mod1=0.139$, $mod2=0.156$, $mod3=0.145$) fueron satisfactorios, lo cual permitió mantener los objetivos de control.

VI. AGRADECIMIENTOS

A todos los que hicieron posible la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- Alessandri A. y Coletta P. (2001). *Design of Luenberger observers for a class of hybrid linear systems*. Hybrid Systems: Computation and Control. LNCS. Springer. pp. 718.
- Babaali M y George P. (2005). *Observability of switched linear systems in continuous and discrete time*. En: Hybrid Systems: Computation and Control. LNCS. Springer. pp. 103-117.
- Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., y Staroswiecki M. (2003). *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Berlin: Springer Verlag.
- Chen J., y Patton R. (1999). *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamics Systems*, Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Liberzon D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Birkhauser. Boston.
- Hassan N., Didier T., Christopher P., Abbas C., *Fault-tolerant Control Systems, Design and practical applications* Springer-Verlag. London Limited.
- Baglietto M., Battistelli G., y Luca S., *Active mode observability of switching linear systems*, Automatica, 2006.
- Peleties P. y DeCarlo R., *Asymptotic stability of m-switched systems using lyapunov-like functions*, Proceedings of American Control Conference, pp. 3438-3439, 1992.
- Patton R.J. (1997) *Fault-tolerant control: The 1997 situation*. Proceedings of the IFAC Symposium SAFEPROCESS'97, Hull, UK, pages 1033-10S5, 1997.
- Escobar R.F., Astorga-Zaragoza C.M., Téllez-Anguiano A.C., Juárez-Romero D., Hernández J.A. y Guerrero-Ramírez G.V., *Sensor fault detection and isolation via high-gain observers: Application to a double-pipe heat exchanger*, ISA Transactions, Elsevier, July 2011.
- Zhendong S. y Ge S. (2005). *Switched Linear Systems: control and design*. Springer-Verlag. London.