

# Uso de observadores super-twisting para control de biorreactores de tratamiento de agua residual

J. Oviedo y A. Vargas

Laboratorio de Investigación en Procesos Avanzados de Tratamiento de Aguas (LIPATA)  
Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México  
Blvd. Juriquilla 3001, Querétaro 76230 México  
e-mail: {JOviedoS, AVargas}@ii.unam.mx, Teléfono: (52)-442-1926166

**Resumen**—El control del flujo de entrada en biorreactores, permite alcanzar altas tasas de remoción de tóxicos en el tratamiento de aguas residuales. La tasa de respiración es un importante indicador biológico del proceso; conocerla conlleva a un mejor control y rendimiento. Los respirómetros son usados para determinar la tasa de respiración, más no proveen datos en línea. La estrategia de control de tiempo óptimo dirigido por eventos (ED-TOC) utiliza las mediciones disponibles de la tasa de respiración y genera eventos en los que se detectan cambios en ella, modificando así el llenado del biorreactor. Aun así, ED-TOC fue diseñada mediante derivadas numéricas y puede presentar retrasos respecto a concentraciones dentro del reactor. En este trabajo se propone el uso de un observador basado en el algoritmo super-twisting generalizado para compararlo con resultados históricos de la operación del reactor. A través de simulaciones se demostró que el observador propuesto logró anticipar la señal de conmutación de la estrategia de control, aunque no para todo régimen. Existe un compromiso entre la velocidad de convergencia/respuesta del observador con el ruido que afecta la toma de decisiones de ED-TOC.

**Palabras clave:** Observadores super-twisting; oxígeno disuelto; control de bioprocesos; tratamiento de aguas residuales.

## I. INTRODUCCIÓN

Los flujos provenientes de las industrias química, petroquímica y textilera son algunos ejemplos de aguas difíciles de degradar por procesos convencionales. El uso de reactores discontinuos secuenciales (SBR) para el tratamiento de aguas residuales con compuestos altamente tóxicos, ha venido tomando auge en particular en los últimos años. En contraste con los reactores continuos, los SBR otorgan mayor flexibilidad, reducción de costos, y operan con un volumen variable durante la etapa de reacción. Sin embargo, la relación de flujos de entrada a una planta de tratamiento es no lineal y al presentarse picos de concentración, la biomasa en el SBR puede llegar a inhibirse o incluso morir; esto ocasionaría daños irreversibles en el proceso (Betancur et al., 2004).

Los procesos aerobios son aquellos que involucran oxígeno, es decir, los microorganismos que intervienen necesitan del oxígeno para subsistir. En estos procesos, la tasa de respiración representa la cantidad de oxígeno que consumen los microorganismos por unidad de tiempo

por unidad de volumen, y es un importante indicador de la planta; ésta se determina usualmente por métodos respirométricos (Spanjers et al., 1996), (Vanrolleghem y Lee, 2003). Empero, el uso de estos métodos resulta invasivo en sistemas piloto y no provee resultados en línea de la tasa de respiración. Se ha demostrado que el volumen variable del SBR puede ser aprovechado en términos del rendimiento del proceso, mediante el llenado del biorreactor. Estas técnicas de llenado, denominadas lote-alimentadas, conllevan a la minimización de los tiempos de reacción (Moreno-Andrade y Buitrón, 2008), reducción considerable de costos energéticos y a la degradación eficiente del sustrato tóxico. En (Moreno et al., 2006) se presentó la estrategia de *control de tiempo óptimo dirigido por eventos* (ED-TOC) y se validó en un caso de estudio, en el que mediante la conmutación del flujo de entrada, se mantuvo oscilando la concentración de sustrato ( $S$ ) en una zona donde la tasa de degradación está en su máximo, lo cual ocurre cuando  $S = S^*$ .

El inconveniente con la estrategia de control es que está dirigida por eventos, y estos dependen de qué tan bien se estime la tasa másica de consumo de oxígeno (OMUR), que es proporcional a la tasa de respiración/biodegradación. En ED-TOC, la OMUR se calcula usando la información del oxígeno disuelto (DO, que puede ser medida confiablemente en línea) y el conocimiento de algunos parámetros, pero también se usa la derivada del DO, calculada numéricamente. Puesto que el actuador que recibe la señal de control es la bomba de llenado, si se da que la estimación es tardía, la bomba seguirá llenando hasta que llegue la señal, de manera que la concentración de sustrato sobrepasará la óptima ( $S > S^*$ ). Por otro lado, puede darse que la bomba no encienda a tiempo y haya más degradación de sustrato que la deseada ( $S \ll S^*$ ).

Por lo tanto, el objetivo de este trabajo consiste en obtener, mediante un observador de tipo super-twisting (ST) (por modos deslizantes de segundo orden), una señal similar a la de OMUR más rápida, a pesar de ser más ruidosa. De ser así, la detección del máximo se tendría antes, mejorando así el control y rendimiento del proceso. Para lograrlo se tienen en cuenta dos directrices: (i) utilizar un observador ST en lugar de realizar el cálculo directo

de  $\gamma$  (OMUR) mediante diferenciación numérica; y (ii) considerar la dinámica del sensor y tratar de estimar la señal de oxígeno disuelto en el reactor, usando esta señal en el observador ST para el cálculo de  $\gamma$ .

## II. OBSERVADOR SUPER-TWISTING

Se considera un sistema de segundo orden dado en forma de observabilidad, globalmente acotado y con términos de perturbación (Vargas et al., 2011):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(y, t) + x_2 - \delta_1(x, u, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(y, t) - \delta_2(x, u, t), \\ y &= x_1. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

El observador super-twisting (ST) tiene la forma:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= f_1(y, t) + \hat{x}_2 - k_1\phi_1(\hat{x}_1 - x_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_2(y, t) - k_2\phi_2(\hat{x}_1 - x_1), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

y las dinámicas del error de estimación  $e = \hat{x} - x$  son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1\phi_1(e_1) + e_2 + \delta_1(x, u, t), \\ \dot{e}_2 &= -k_2\phi_2(e_1) + \delta_2(x, u, t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Las funciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(e_1) &= |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1), \\ \phi_2(e_1) &= \frac{1}{2} \text{sign}(e_1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

y varios trabajos muestran que es posible escoger  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$  tales que el sistema (error) es asintóticamente estable. Incluso, la convergencia de  $\|e\|$  a cero se da en tiempo finito (Moreno, 2011).

## III. MODELO DEL PROCESO

En un caso típico de reactor fed-batch (lote-alimentado), se tiene un modelo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= -\mu_S X + (S_{in} - S)Q_{in}/V, \\ \dot{X} &= \mu_X X - XQ_{in}/V, \\ \dot{V} &= Q_{in}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

donde  $Q_{in}$  es el flujo de entrada,  $V$  es el volumen actual y  $X$  es la concentración de biomasa (microorganismos);  $S$  es la concentración de sustrato. La función  $\mu_s(S)$  es una función positiva con un único máximo que sucede cuando  $S = S^*$ . De hecho, el objetivo del controlador es modificar el flujo de entrada para mantener  $S(t)$  cercano a  $S^*$ . Se puede añadir la siguiente ecuación diferencial para el oxígeno disuelto, el cual sí puede ser medido en línea:

$$\dot{C} = -k_c\mu_S X + bX - CQ_{in}/V + (C_{sat} - C)k_{La}. \quad (6)$$

donde  $C$  es el oxígeno disuelto,  $b$  es la tasa específica de respiración endógena,  $k_{La}$  es el coeficiente de transferencia de masa de oxígeno,  $C_{sat}$  es la constante de saturación y la tasa específica de biodegradación  $\mu_S$  es proporcional a la tasa de respiración  $rX$ :

$$k_c\mu_S X + bX = rX \quad (7)$$

La tasa específica de respiración  $r(t)$  en estos reactores es altamente variable en el tiempo; además no solo es proporcional a la tasa específica de biodegradación sino también a la concentración de biomasa. Sin embargo, para el caso particular estudiado, en un ciclo SBR la cantidad total de biomasa permanece aproximadamente constante y la concentración  $X$  resulta inversamente proporcional al volumen:  $X(t) = X_f V_f / V(t)$ . Haciendo un cambio de variable, la ecuación (7) puede representarse con el modelo

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + (x_{sat} - x_1)k_{La}, \\ \dot{x}_2 &= -\delta(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

donde  $x_1 = (V/V_f)C$  es proporcional a la masa de oxígeno  $x_{sat} = (V/V_f)C_{sat}$ , y  $x_2 = rX_f$  siendo  $X_f$  la concentración de biomasa a volumen lleno  $V_f$  (considerado conocido). Tiene dinámica desconocida dada por  $\delta(t)$ , pero se puede suponer que  $\delta(t)$  es acotada. Este sistema ya está en la forma de observabilidad necesaria, y entonces el observador ST se implementa de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -L_1|e_1|^{1/2} \text{sign}(e_1) - \hat{x}_2 + (x_{sat} - x_1)k_{La}, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= L_2 \text{sign}(e_1), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

donde  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$  es el error de observación medible. La sintonización de las ganancias  $L_1$  y  $L_2$  es crucial; para hacerlo se utilizó el método de desigualdades matriciales lineales (LMI), dadas las cotas en las dinámicas desconocidas y en los errores de medición.

## IV. ESTRATEGIA DE CONTROL

La estrategia de control ED-TOC conmuta la bomba de llenado entre encendido y apagado, a fin de mantener la concentración de sustrato alrededor del valor de  $S^*$ ; lo cual es equivalente a mantener  $\mu$  cerca de  $\mu^*$ . Sin embargo, ninguna puede ser medida directamente; por lo tanto ED-TOC calcula la tasa másica de consumo de oxígeno (OMUR) con respecto al volumen final  $V_f$ , que se define como:

$$\gamma = + (C_{sat} - C) \left( \frac{V}{V_f} \right) k_{La} - C \left( \frac{Q_{in}}{V_f} \right) - \left( \frac{dO}{dt} \right) \left( \frac{V}{V_f} \right). \quad (10)$$

La relación lineal entre  $\mu(t)$  y  $\gamma(t)$  es la que permite el uso de esta última variable en ED-TOC, y está dada por:

$$\gamma(t) = k_1\mu_S(t) + k_2, \quad k_1 = \frac{X_f}{k_c}, \quad k_2 = X_f b. \quad (11)$$

En ED-TOC, el cálculo de  $\gamma$  estima la derivada  $\dot{O}$  numéricamente, i.e. para cada muestra  $k$  se toma  $O(k) - O(k-1)$  y se divide entre el tiempo de muestreo  $T_S$ . Con ello se va construyendo la señal  $dO(k)$ . Ésta luego debe ser filtrada (filtro de primer orden). Es decir, la  $\dot{O}(t)$  usada va retrasada con respecto a la verdadera. De manera similar, la señal de oxígeno disuelto usada  $O(t)$  se refiere a la medición arrojada por el sensor tras un filtrado simple para suavizarla. Entonces,  $O(t)$  no corresponde al oxígeno disuelto en el

reactor, sino a una señal retrasada en el tiempo de esta señal. Además, la  $\gamma$  calculada se filtra nuevamente para reducir el ruido. Esta señal se denominará  $\hat{\gamma}(t)$ . Al final se observa que aproximadamente, debido al retraso inherente de la medición, se tiene que  $\hat{\gamma}(t) \approx \gamma(t - t_d)$  donde  $t_d$  es un retraso que podría llegar a ser considerable.

ED-TOC considera dos regímenes de operación que van de acuerdo a la conmutación de la bomba:

1. **Bomba ON:** la bomba de llenado está encendida; por tanto,  $Q_{in} > 0$  tal que  $(S_{in} - S)Q_{in}/V > \mu_S X$ , es decir,  $\dot{S} > 0$ . Esto implica que  $S(t)$  aumentará en el reactor.
2. **Bomba OFF:** la bomba de llenado está apagada; por tanto,  $Q_{in} = 0$  y así  $\dot{S} < 0$ . Esto implica que  $S(t)$  disminuirá en el reactor.

En ambos regímenes  $\gamma(t)$  alcanzará un máximo cuando  $S(t)$  pase por  $S^*$ . La conmutación entre regímenes se realiza en el algoritmo mediante la definición de un umbral  $0 < q < 1$  tal que una conmutación ocurre cuando  $\gamma < q\gamma_{max}$ .

Al usar señales filtradas, ni la señal de DO ni la derivada son realmente los valores de estas variables dentro del reactor. Existe un retraso inherente –e inevitable– en la medición y para decidir la conmutación de las bombas, el algoritmo se debe asegurar que  $\gamma$  ha alcanzado un máximo y ha empezado a disminuir, pero esto lo hace a partir de la observación de  $\hat{\gamma}$ . Es relativamente sencillo hacer un análisis para ver que esto implica que aún con  $q = 1$ , el sustrato oscilará alrededor de  $S^*$ . De ello se concluye que si el uso de un observador para obtener un mejor estimado de  $\mu_S$  o equivalente de  $\gamma$  es exitoso, esto redundará en un mejor desempeño del algoritmo de control.

## V. METODOLOGÍA

Se utilizaron datos históricos de la operación de un biorreactor SBR mediante la estrategia de control ED-TOC; se realizaron simulaciones numéricas en MATLAB 7.1 (Mathworks, inc.) para la obtención de los resultados. Con base en estos datos, se recuperó información sobre los parámetros y variables del modelo. Posteriormente se implementó el observador ST para estimar la concentración real de DO dentro del reactor. Al tener la concentración verdadera, se alimenta al algoritmo ED-TOC para estimar la OMUR verdadera. Finalmente se aplica el observador a un simulador que representa el algoritmo de ED-TOC, y se presentan algunas estadísticas que proporcionan información sobre el porcentaje de éxito del observador en anticipar la señal dada por la estrategia de control.

## VI. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### VI-A. Estimación del oxígeno disuelto dentro del reactor

Se tomaron los datos históricos del DO y se ajustó a un modelo de dos sistemas concatenados de primer orden que representara el reactor y el sensor utilizado (el cual

realizó la medición):

$$\left. \begin{aligned} \tau_s \dot{w}(t) + w(t) &= u(t), \\ \tau_s \dot{y}(t) + y(t) &= w(t). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Es posible diseñar dos observadores super-twisting para estimar primero  $w(t)$  a partir de las mediciones de  $y(t)$  con el conocimiento de  $\tau_s$ , y luego usar esta señal en un segundo observador para estimar  $u(t)$ . Si  $y(t)$  es la señal de DO medida por el sensor, entonces  $\hat{u}(t)$  será un estimado del DO en el reactor ( $C(t)$ ). Los parámetros de ambos observadores fueron sintonizados con base en los datos históricos de que se disponía. Se estiman las primeras y segundas derivadas a partir de filtros para obtener señales suavizadas. Posteriormente se realiza la sintonización de parámetros del observador; en esta tarea se implementaron dos observadores, primero uno para estimar la entrada del segundo filtro, seguido de otro observador para el primer filtro. La figura 1 exhibe las estimaciones del oxígeno disuelto en el seno del reactor. Para facilidad de análisis, el flujo  $Q_{in}$  se encuentra escalado de manera que sea posible ver la dilución.

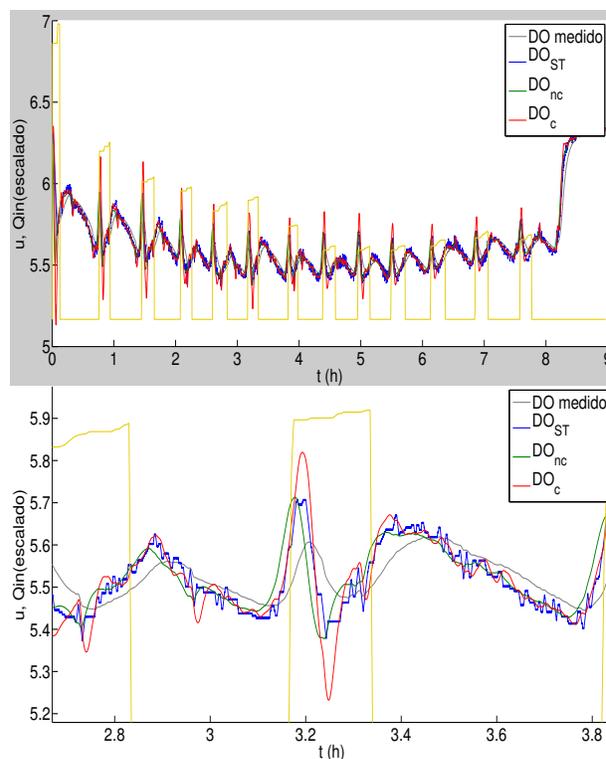


Figura 1. Estimaciones del DO dentro del reactor: ciclo completo (arriba), acercamiento (abajo).

Se generan tres señales y se pretende que la señal  $DO_{ST}$  (el DO estimado por los observadores, azul), se parezca a la señal  $DO_{nc}$  (DO que resulta de reconstruir la supuesta señal original a partir de las mediciones usando filtros no causales, verde) y la señal  $DO_c$  (DO reconstruido con filtros causales, rojo) y por supuesto más rápida que la señal original (DO medido, gris), especialmente en las transiciones

cuando  $Q_{in}(t)$  cambia de cero a algún valor positivo o viceversa.  $DO_{nc}$  representa la verdadera concentración de oxígeno disuelto en el reactor; es apreciable como  $DO_c$  se encuentra inevitablemente retrasada. Es evidente el ruido que introduce  $DO_{ST}$ , ya que es el precio a pagar por la velocidad de convergencia con el observador; empero, también es notable que anticipa a ambas  $DO_c$  y la señal original, especialmente en los descensos y que no sobreestima como lo hace una implementación de derivadores usando filtros como en  $DO_c$ . Al final se obtuvo una señal que pudiera ser usada por ED-TOC; es decir, debe existir suficientemente poco ruido para que esta señal pueda ser usada en el observador que estima la OMUR, y entonces la estrategia de control pueda determinar los máximos y realizar la conmutación entre regímenes de operación. La metodología empleada hace que sea posible la estimación pero el compromiso que se tiene respecto a convergencia y sensibilidad al ruido está en la sintonización.

### VI-B. Estimación de OMUR

Las señales de DO obtenidas en la sección anterior son alimentadas a otro observador super-twisting para estimar  $\gamma$ ; esto hace que la estimación sea más sensible al ruido. El incentivo es hacer que la conmutación entre regímenes de operación en la señal estimada  $\hat{\gamma}$ , se lleve a cabo con mayor rapidez que la  $\gamma$  convencional por ED-TOC. La figura 2 plasma la recuperación anterior del oxígeno disuelto superpuesta con la estimación de OMUR.

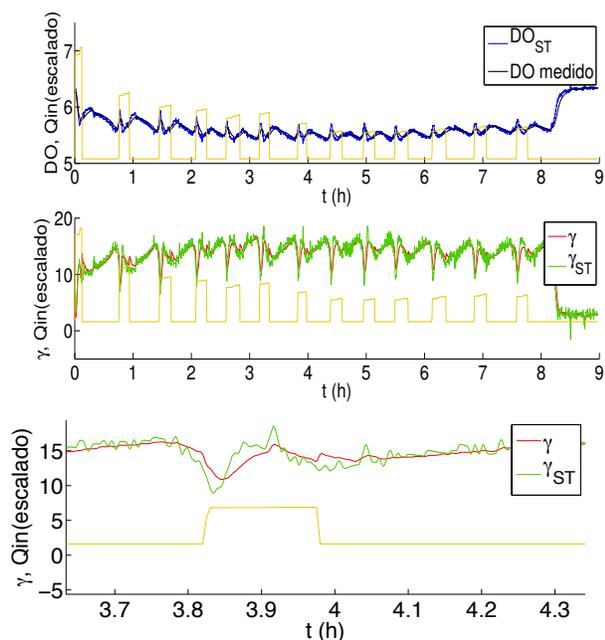


Figura 2. Estimación de OMUR real. Ciclo completo de 13 pulsos (arriba), acercamiento (abajo).

Es evidente una buena aproximación de la estimación; La señal  $\gamma_{ST}$  (verde, abajo) es capaz de anticipar a la señal original de  $\gamma$  obtenida de los datos históricos (rojo, abajo)

considerablemente. De nuevo, la desventaja del observador son las oscilaciones que se tienen; en algunos casos inclusive muy altas (tal y como se puede apreciar al final de la reacción), de manera que se llegan a dar valores negativos. Para la aplicación final se considera a  $\gamma_{ST}$  como la señal a usar.

### VI-C. Aplicación a ED-TOC

Se recuperaron aquellos instantes que determinan el cambio de régimen. Para los cambios de OFF a ON, simplemente se puede notar cuando  $Q_{in}(t)$  pasa de ser cero a un valor positivo. Para los cambios de ON a OFF se considera la dinámica de la bomba de llenado, ya que esta tarda en apagarse tal que  $Q_{in} = 0$  hasta después de enviada la señal. Recuperar dicho instante es posible mediante la detección del momento en que la bomba dejó de tener flujo constante. Se aplicó el algoritmo ED-TOC a los subconjuntos de datos correspondientes a cada régimen de operación (bomba ON u OFF). En cada uno de estos subconjuntos se usó la OMUR estimada ( $\gamma_{ST}$ ) para determinar el cambio de régimen de acuerdo a la aplicación de la estrategia ED-TOC. Lo ideal es que los cambios de régimen se señalen antes que cuando realmente sucedieron en los datos históricos.

El algoritmo considera tres fases de operación relacionadas con los máximos y mínimos locales: En la **fase 0** se espera hasta obtener un valor confiable de la señal  $Q_{in}$ , ya que la conmutación de régimen genera un salto de cero a algo positivo. En el cambio se tiene un incremento en  $\gamma$ , que podría confundirse con un máximo y provocar cambios de régimen indeseados. En la **fase +1** se espera el mínimo. En la figura 3 se muestra la corrida para los cambios de régimen. El cambio (a la fase +1) se realiza cuando  $\gamma(t)$  sobrepasa un valor poco mayor que el mínimo ( $\gamma_k > (1/q)\gamma_k^{min}$ ). Esto indica que ya se pasó por el mínimo dado por el valor de  $1/q$  (violeta, figura 3). En la **fase +1** se espera el máximo. La fase termina y cambia al régimen recíproco (ON  $\rightarrow$  OFF / OFF  $\rightarrow$  ON) al disminuir  $\gamma(t)$  a un valor por debajo del máximo ( $\gamma_k < \gamma_k^{max}$ ). El parámetro  $q$  permite ajustar el umbral para tomar la decisión de cambio de régimen (café, figura 3).

La línea roja indica los cambios de régimen. En la figura de la izquierda se nota que la línea de cambio está a un 70% del eje del tiempo, lo que indica que el cambio habría sucedido –con este controlador/observador y para este subconjunto de datos– antes de cuando realmente sucedió. En el centro se observa un cambio nulo (la línea de cambio está en el extremo derecho); y la derecha muestra un cambio tardío. Se requiere la adecuación del parámetro  $q$  para poder anticipar la señal de ED-TOC; no obstante, se sabe que existe un compromiso con las ganancias del observador i.e., reducen la diferencia temporal entre la OMUR estimada con la verdadera y, sin embargo, amplifican el ruido: el retraso disminuye y es posible detectar oportunamente el máximo pero se obtienen oscilaciones más grandes.

La tolerancia de las oscilaciones se consigue reduciendo  $q$ . La sintonización de parámetros llega al punto donde se

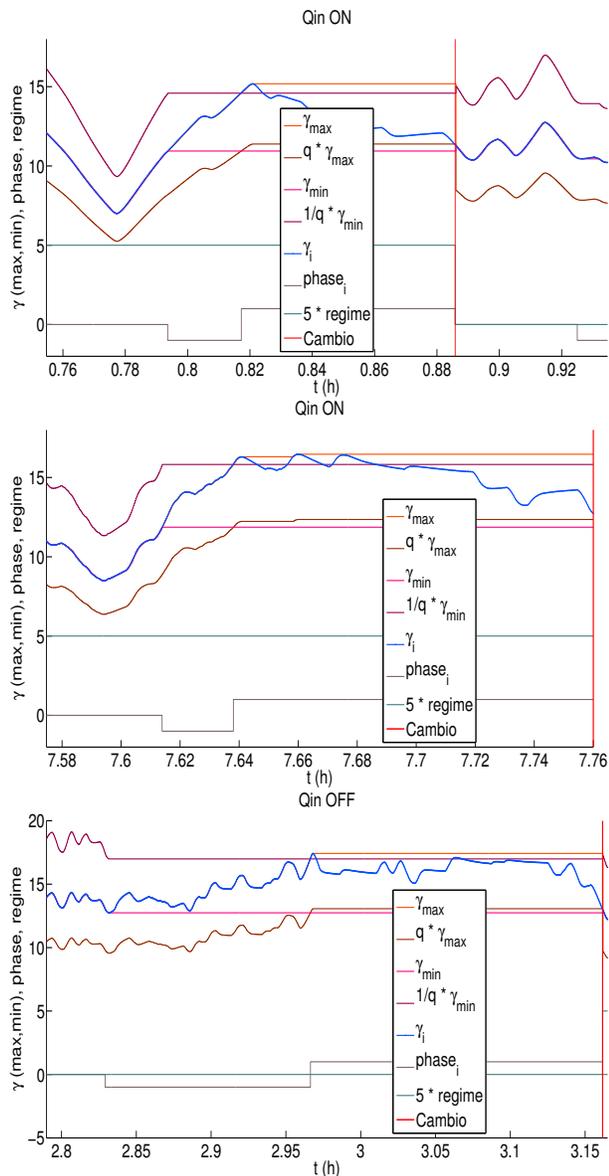


Figura 3. Cambio de regímenes. Cambio adecuado (arriba), sin cambio (en medio), cambio tardío (abajo)

debe adquirir un compromiso con los objetivos planteados. Por un lado se tiene que al reducir  $q$  se reduce el número de cambios en falso pero aumenta el tiempo de detección del máximo; y por el otro, el tiempo de convergencia del observador se hace más rápido al aumentar las ganancias, pero aumentan las oscilaciones. Como se observa en la figura 3 (izquierda), el cambio sucedió antes de que la prueba terminase, por ende la  $\gamma(t)$  usada en el modelo fue capaz de enviar una señal que anticipó el encendido/apagado de la bomba de llenado, antes que ED-TOC; de esta manera se puede avalar el cumplimiento del objetivo. Se encontró que el valor del parámetro  $q$  con el que se obtuvo el mejor desempeño, se encuentra dentro del umbral 0.7—0.95.

Al probar con varios conjuntos de datos, se logró calibrar el observador y el parámetro  $q$  para que el porcentaje de éxito en la detección temprana de cuándo hacer un cambio de régimen fuera de alrededor de 90% de casos exitosos para datos con menos de tres pulsos, por ser más sencillo de sintonizar. Para datos con más de 13 pulsos, como los empleados en este trabajo, se presentaron 25 cambios de régimen de los cuales 17 fueron exitosos (68%), no hubo alguna acción antes de tiempo, hubo 8 cambios fuera de tiempo (32%), y por último 10/13 cambios exitosos de ON a OFF (76.9%) y 7/12 de OFF a ON (58.3%). Aunque parece poco, los resultados son alentadores para un flujo variable de esta manera, tal y como se suele suceder en la realidad.

## VII. CONCLUSIÓN

La reconstrucción de la verdadera señal de oxígeno disuelto dentro del reactor resultó exitosa mediante el observador ST, y más rápida que el sensor. Sin embargo, el costo de esto es un incremento en las oscilaciones de la señal. De esta manera, podría ser posible mejorar la calidad de las mediciones a pesar de las limitaciones de sensores y/o transductores. No obstante, la sintonización de ganancias y parámetros del estimador resulta muy importante en términos de adecuar la señal. Se demostró que la aplicación de los observadores propuestos llevaría a una conmutación anticipada de los dos regímenes de operación en el reactor, pero tan solo se puede especular que esto redundaría en un mejor desempeño del proceso. Para comprobarlo, habría que validarlo experimentalmente. Como propuesta futura, se podría plantear la validación experimental, con algoritmos de control similares a ED-TOC y el uso de los observadores super-twisting, y así corroborar si el apagar o encender la bomba con mayor celeridad, como se indica en el algoritmo, conlleva a resultados superiores en la realidad.

## REFERENCIAS

- M.J. Betancur, J.A. Moreno, I. Moreno-Andrade, G. Buitrón (2004). *Control y mejoras en biorreactores para tratar aguas residuales tóxicas*. Congreso Anual de la AMCA, 2004.
- J.A. Moreno (2011). Sliding Modes after the First Decade of the 21st Century, chapter 4: Lyapunov Approach for Analysis and Design of Second Order Sliding Mode Algorithms. **412**, 113–149. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- J.A. Moreno, M.J. Betancur, G. Buitrón, I. Moreno-Andrade (2006). Event-driven time-optimal control for a class of discontinuous bioreactors. *Biotechnology and Bioengineering* **94**(4).
- I. Moreno-Andrade, G. Buitrón (2008). Performance of an optimally filled discontinuous bioreactor degrading 4-chlorophenol. *Water Science and Technology* **57**(12).
- H. Spanjers, P. Vanrolleghem, y G. Olsson (1996). Respirometry in control of the activated sludge process. *Water Science and Technology* **34**, 117–126.
- P. Vanrolleghem y D.S. Lee (2003). On-line monitoring equipment for wastewater treatment processes: state of the art. *Water Science and Technology* **47**, 1–34.
- A. Vargas, J.A. Moreno, I. Mendoza (2011). Time-optimal output feedback controller for toxic wastewater treatment in a fed-batch bioreactor. *IFAC World Congress*, 2011. **37**, 1239–1245.