

# Control Anidado, Independiente del Modelo, con Modos Deslizantes Integrales aplicado al TORA

R. Raygosa-Barahona, V. Parra-Vega, E. Olgún-Díaz and L. A. Muñoz\*  
Grupo de Robótica y Manufactura Avanzada, CINVESTAV Saltillo,  
\* Instituto de Robótica de Yucatán

**Resumen**—El poderoso método anidado (o *backstepping* por su nombre original en inglés) resuelve subactuación asumiendo conocimiento exacto del modelo, total o parcial para implementar linealización exacta o parcial. En éste artículo se presenta un esquema de control anidado donde se introducen modos deslizantes integrales para la estabilización robusta sin depender del modelo dinámico, lo que resulta en la estabilización para una clase de sistemas mecánicos no lineales subactuados sin depender del conocimiento de los parámetros del modelo dinámico, inclusive ante perturbaciones acotadas suaves afines en la entrada. El análisis de estabilidad muestra las condiciones explícitas para lograr seguimiento de trayectorias de los grados de libertad actuados. Se sintetiza la metodología para sistemas Euler Lagrange subactuados, y se presentan detalles en el TORA (*Translational Oscillator with Rotational Actuator*) como caso de estudio. El estudio numérico confirman la validez del esquema propuesto.

**Palabras clave:** Sistemas Subactuados, Modos Deslizantes Integrales, *Backstepping*, Control Libre de Modelo.

## I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas mecánicos subactuados tienen un menor número de actuadores que la dimensión del estado lo que dificulta enormemente la estabilización de todos los grados de libertad, (Spong y Praly, 1997), (Fantoni y Lozano., 2002), (Oriolo y Nakamura, 1991). Algunos sistemas complejos de este tipo son tales como los vehículos submarinos: AUV y ROV (Autonomous Underwater Vehicles y Remote Operated Vehicle, (Fossen y Fjellstad, 1995; Antoneilli, 2006)) o los UAVs (Unmanned Aerial Vehicles) tales como aviones, cuadrirotos, drones, o helicópteros (Fantoni y Lozano., 2002; Rogelio Lozano *et al.*, 2006). La subacción en estos sistemas mecánicos dificulta su implementación, aun con leyes de control específicas dependientes del modelo debido a que es igualmente difícil estimar o identificar en la práctica los parámetros dinámicos del sistema, inclusive en condiciones controladas de laboratorio, (Fossen y Fjellstad, 1995). Diversos esquemas se han propuesto para evitar la dependencia de parámetros: *backstepping* adaptativo (Krstic *et al.*, 1995), *backstepping* robusto (Isidori, 1995), *backstepping sliding modes* (Khalil, 2000), o modos deslizantes para subactuados (Wang *et al.*, 2004). Todas éstos esquemas requieren al menos el regresor, o sea, la matriz que representa la estructura del sistema. En (Raygosa-Barahona *et al.*, 2011) se presenta el uso de *backstepping* con modos deslizantes integrales libre de modelo para un robot submarino pero sólo se presenta un análisis de estabilidad local. Una característica esencial

de los sistemas subactuados es que sólo pueden seguir un subconjunto de todas las posibles trayectorias desde su condición inicial. Además el seguimiento de trayectorias admisibles es igualmente difícil dado que se debe estabilizar los grados de libertad subactuados sin contar directamente con actuadores, (Tedrake, Marzo 2010). En éste artículo proponemos sintetizar un control anidado por *backstepping* sin dependencia del modelo, utilizando el control por modos deslizantes integrales de (Parra-Vega *et al.*, 2003), que es un control libre del modelo. Esto representará la extensión no trivial de (Parra-Vega *et al.*, 2003) para sistemas lagrangianos subactuados. A diferencia de (Raygosa-Barahona *et al.*, 2011) esta metodología puede ser aplicada a un sistema subactuado cuya dinámica cero sea de fase no mínima. Consideramos la estabilización del subsistema no actuado con la técnica *backstepping*, (Krstic *et al.*, 1995; Fossen, 2011), para generar una función auxiliar virtual como trayectoria del control libre de modelo de (Parra-Vega *et al.*, 2003). Esta metodología logra controlar, sin dependencia del modelo, una clase particular de sistemas mecánicos subactuados, preservando las ventajas de ambos esquemas de control para el seguimiento de trayectorias de mecanismos subactuados. El lazo cerrado presenta las siguientes características: 1) no se presenta castañeo, típico de modo deslizante de primer orden, (Utkin, 1999), 2) mantiene las ventajas típicas de modos deslizantes tales como la invariancia paramétrica, convergencia exponencial y robustez; y 3) se logra seguimiento sin requerir del conocimiento exacto de los parámetros dinámicos ni del regresor del sistema. Se presentan la síntesis general y se desarrolla en las simulaciones para el sistema TORA, como *benchmark* de sistemas subactuados.

### I-A. Sistema Mecánico TORA

El sistema mecánico TORA, mostrado en la Figura 1, consiste en una masa  $M$  unida a una pared fija mediante un resorte de constante  $k$ , la cual oscila al ser liberada desde una posición  $x_c$  diferente a la de equilibrio  $x_{c0}$ , (Coppola *et al.*, 1995). Un péndulo de masa  $m$  y longitud  $e$  es utilizado para amortiguar estas oscilaciones, al ser comandado sobre una trayectoria de su desplazamiento angular  $\theta$ , respecto a la vertical.  $F$  es la fuerza aplicada a la carro y  $N$  el torque aplicado al péndulo. Así, las ecuaciones de movimiento

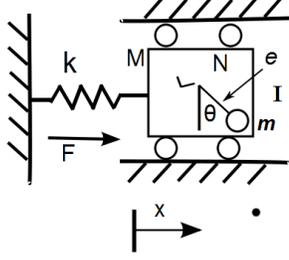


Figura 1: Configuración del mecanismo TORA

están dadas por

$$(M + m)\ddot{x}_c + me(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + kx_c = F \quad (1a)$$

$$(I + me^2)\ddot{\theta} + m\ddot{x}_c e \cos \theta = N \quad (1b)$$

En (Coppola *et al.*, 1995) se sugiere la siguiente transformación para normalizar el sistema

$$x_d \triangleq \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}} x_c, \quad \varepsilon \triangleq \frac{me}{\sqrt{(I+me^2)(M+m)}},$$

$$u \triangleq \frac{M+m}{k(I+me^2)} N, \quad \tau \triangleq \sqrt{\frac{k}{M+m}} t$$

$$F_d \triangleq \frac{1}{k} \sqrt{\frac{M+m}{I+me^2}} F, \quad (2)$$

lo que nos producirá

$$\ddot{x}_d + x_d = \varepsilon(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) + F_d \quad (3a)$$

$$\ddot{\theta} = u - \varepsilon \ddot{x}_d \cos \theta \quad (3b)$$

donde las derivadas temporales se hacen respecto a la tiempo escalado  $\tau$ . Luego, definiendo el estado como  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (x_c, \dot{x}_c, \theta, \dot{\theta})^T$ , el sistema (3) puede escribirse en la siguiente forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(x)F_d, \quad (4)$$

$$f(x) \triangleq \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-x_1 + \varepsilon x_4^2 \sin x_3}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{\varepsilon \cos x_3 (x_1 - \varepsilon x_4^2 \sin x_3)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix};$$

$$g(x) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\varepsilon \cos x_3}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix}; \quad d(x) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{-\varepsilon \cos x_3}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} \end{bmatrix}$$

Se puede notar que cuando  $u = 0$  y  $F_d = 0$  la ecuación tiene un equilibrio en  $(x_1 = x_2 = x_4 = 0,)$  sin importar el valor de  $x_3$ . En este trabajo nos interesa el caso  $F_d = 0$  para cualquier condición inicial de  $x_1$ . Para ese caso el sistema es subactuado pues tiene una entrada y dos grados de libertad.

*I-A.1. Dinámica Cero:* El objetivo de mantener la salida del sistema  $y = (x_1, x_2)$  idénticamente en cero, esto es  $x_1 = \dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}_2 = 0$  en las 2 primeras componentes de (4) nos conduce a considerar una entrada  $u = u_0 = -\varepsilon x_4^2 \sin x_3 + \varepsilon \cos x_3$ . Sustituyendo este valor en la dinámica interna definida por las últimas 2 componentes de (4) nos lleva a la dinámica cero:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{-\varepsilon^2 \cos x_3 \sin x_3 x_4^2 - \varepsilon x_4^2 \sin x_3 + \varepsilon \cos x_3}{1 - \varepsilon^2 \cos x_3} \end{aligned}$$

La linealización en el origen produce dos autovalores imaginarios:  $\lambda = \pm j \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}}$ , lo que muestra que el origen es un punto de operación que puede presentar oscilaciones sostenidas por tanto la dinámica cero linealizada en el origen muestra que es un sistema de fase no mínima. A la luz de lo anterior la ley de control para este sistema debe ser apta para manejar sistemas de fase no mínima (*non-minimum phase system*)

## II. ANTECEDENTES DE BACKSTEPPING Y CONTROL LIBRE DE MODELO

### II-A. Control Backstepping

Varias metodológicas de control se han aplicado al TORA por mencionar algunos (Nazrulla y Khalil, 2008), (Jankovic *et al.*, 1996), (Coppola *et al.*, 1995), en todas ellas es necesario el conocimiento del modelo y de los parámetros dinámicos del sistema. Considere el sistema mecánico TORA (4) sin perturbaciones:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5)$$

El método *backstepping* requiere que el sistema esté en la forma canónica “modo estricto de retroalimentación” o al menos en “modo de retroalimentación pura” (Krstic *et al.*, 1995). Para este fin se utiliza la siguiente transformación de coordenadas (Coppola *et al.*, 1995):

$$z_1 = x_1 + \varepsilon \sin x_3 \quad (6)$$

$$z_2 = x_2 + \varepsilon x_4 \cos x_3$$

$$y_1 = x_3$$

$$y_2 = x_4$$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} (\varepsilon x_1 \cos x_3 - \varepsilon^2 + \dots \\ &\dots + x_4^2 \cos x_3 \sin x_3) + \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3} u \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon$  es la constante, definida en (2), que depende de la masas y excentricidad del sistema.  $x_1$  y  $x_2$  se refieren a la posición y velocidad normalizados de la masa M a lo largo de su eje de movimiento axial en tanto  $x_3$  y  $x_4$  representan respectivamente el desplazamiento  $\theta$  y velocidad angular  $\dot{\theta}$  de la masa excéntrica  $m$ , (Jankovic *et al.*, 1996). Utilizando (6), el modelo del TORA puede expresarse de la siguiente

forma:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (7a)$$

$$\dot{z}_2 = -z_1 + \varepsilon \sin y_1 \quad (7b)$$

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (7c)$$

$$\dot{y}_2 = \nu \quad (7d)$$

El sistema (7) tiene 2 grados de libertad de segundo orden:  $z$  y  $y$ , mientras que el escalar  $\nu$  representa el control escalar del sistema subactuado. Además, este sistema está en “*Pure Feedback Form*” (Krstic *et al.*, 1995) por lo que no es posible usar el procedimiento *backstepping* estándar y se hace necesario una pequeña variación en la estrategia para construir el control. En vez de usar un variable de estado como control virtual usaremos una función de esa misma variable de estado, lo que presentamos en 2 pasos, siguiendo a (Jankovic *et al.*, 1996).

*Paso 1:* Observando el subsistema  $z$  de (7) se propone usar  $y_1$  como control virtual para estabilizarlo. Considere la función de estabilización:

$$\alpha_0(z_2) = -\arctan(c_0 z_2) \quad (8)$$

y la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_0 = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2 + \xi_1^2) \quad (9)$$

dónde  $\xi_1$  es un error definido como

$$\xi_1 \triangleq \varepsilon \sin(y_1) - \sin(\alpha_0(z_2)) \quad (10)$$

La derivada de (9) a lo largo de la trayectoria del sistema (7) resulta en

$$\dot{V}_0 = z_2 \sin \alpha_0 + \xi_1 (\varepsilon \cos(y_1) y_2 - \cos(\alpha_0) \dot{\alpha}_0 + z_2) \quad (11)$$

Note que el primer término en (11) es negativo definido en virtud de la identidad trigonométrica:  $\sin(\arctan(a)) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ . Entonces si el error  $\xi_1 = 0 \equiv y_1 = \alpha_0(z_2)$  tenemos que  $\dot{V}_0 < 0$ . Lo que quiere decir que en tanto  $y_1$  se aproxime al valor  $\alpha_0(z_2)$  se producirá la estabilización del subsistema *no actuado*  $z$ .

Ahora considere el caso  $\xi_1 \neq 0$ . La siguiente función:

$$\alpha_1 \triangleq \frac{1}{\varepsilon \cos(y_1)} (-K_1 \xi_1 + \cos(\alpha_0) \dot{\alpha}_0 - z_2) \quad (12)$$

para  $y_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ , puede usarse como control virtual  $y_2 = \dot{y}_1 = \alpha_1$ . Entonces tenemos que

$$\dot{V}_0 \leq -K_1 \xi_1^2 \quad (13)$$

y por lo tanto la entrada virtual  $y_2 = \alpha_1$  estabiliza el subsistema  $z$ .

El siguiente objetivo es estabilizar el segundo subsistema (subsistema  $y$ ) bajo el requerimiento que la entrada real de control  $\nu$  garantice que  $y_2 \rightarrow \alpha_1$ .

*Paso 2:* Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V_1 = V_0 + \frac{1}{2} \xi_2^2$$

con el error  $\xi_2 = y_2 - \alpha_1$ . Entonces, usando (7d) se tiene

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_0 + \xi_2 (\nu - \dot{\alpha}_1)$$

Es claro que la siguiente ley de control

$$\nu = -K_2 \xi_2 + \dot{\alpha}_1 \quad (14)$$

garantiza la estabilidad de (7), es decir

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_0 - K_2 \xi_2^2 \leq -K_1 \xi_1^2 - K_2 \xi_2^2 \leq 0$$

Finalmente, el control  $u$  para el sistema (3) se obtiene mediante la transformación (6) a las coordenadas originales, (Coppola *et al.*, 1995):

$$u = (1 - \varepsilon^2 \cos^2 x_3) \nu - \varepsilon x_1 \cos x_3 + \varepsilon^2 x_4^2 \cos x_3 \sin x_3 \quad (15)$$

*Comentarios.-* El uso de la ley de control (12)-(14) requiere el cálculo de  $\dot{\alpha}_1$ , lo cual requiere que la función  $\alpha_0 \in \mathcal{C}^2$ . Es precisamente en las derivadas de  $\alpha_0$  en donde se involucra el conocimiento del modelo, lo que hace del *backstepping* un esquema explícitamente dependiente del conocimiento total del modelo y sus parámetros.

## II-B. Control de Modos Deslizantes de 2<sup>do</sup> Orden, Libre de Modelo

Considere un sistema Lagrangiano descrito en la forma estándar (Spong M., 2005) y definido en coordenadas generalizadas de posición  $q \in \mathbb{R}^n$  y sus derivadas:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + G(q) = \tau \quad (16)$$

donde  $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representa la matriz de inercia simétrica y definida positiva del sistema,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  representa las fuerzas de Coriolis y centrífugas,  $D > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representa una matriz diagonal definida positiva compuesta de coeficientes de amortiguamiento,  $G(q) \in \mathbb{R}^n$  modela las fuerzas gravedad y de restauración de cada grado de libertad, y  $\tau \in \mathbb{R}^n$  representa las fuerzas generalizadas de control.

Es conocido que el lado izquierdo de la ecuación (16) es linealmente parametrizable por el producto  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\Theta$  (Canudas-de-Wit *et al.*, 1996). La matriz  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es compuesta de funciones no lineales conocidas y es llamado *regresor*. El vector  $\Theta \in \mathbb{R}^p$  representa el conjunto de los parámetros dinámicos inerciales constantes, pero desconocidos del sistema.

Por otro lado, considere el siguiente control, para sistemas completamente actuados, que estabiliza local exponencialmente a (16) sin depender del modelo, (Parra-Vega *et al.*, 2003):

$$\tau = -K_d S_r \quad (17)$$

tal que la dinámica del error de lazo cerrado es la siguiente:

$$H(q)\dot{S}_r = -\{K_d + D + C(q, \dot{q})\}S_r - Y_r(\cdot)\Theta \quad (18)$$

donde  $Y_r(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)$  es una variación del regresor, dependiente de la referencia nominal  $\dot{q}_r$  y su derivada  $\ddot{q}_r$ , tal que

$$H(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + D(q)\dot{q}_r + G(q) = Y_r(\cdot)\Theta \quad (19)$$

y las variables del control están definidas como sigue:

$$S_r = \dot{q} - \dot{q}_r \quad (20a)$$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \alpha \Delta q + S_d - \gamma \sigma \quad (20b)$$

$$\dot{\sigma} = \text{sgn}(S_q) \quad (20c)$$

$$S = \Delta \dot{q} + \alpha \Delta q \quad (20d)$$

$$S_d = S(t_0) e^{-\kappa t - t_0} \quad (20e)$$

$$S_q = S - S_d \quad (20f)$$

donde  $(K_d, \alpha, \gamma) > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales, definida positivas,  $\Delta q = q - q_d$  representa el error de seguimiento, y  $\kappa > 0$ .

Note que sustituyendo (20) en (20) produce la dinámica de las coordenadas del error

$$S_r = S_q + \gamma \int_{t_0}^t \text{sgn}(S_q(\varsigma)) d\varsigma \quad (21)$$

El integrando (21) define una superficie deslizante en  $S_q = 0$ , (Parra-Vega *et al.*, 2003) de ahí el nombre de control modos deslizantes integrales

La prueba de estabilidad de (18) (Parra-Vega *et al.*, 2003), depende de la existencia -debidas a propiedades estructurales- de cotas superiores en los términos del sistema Lagrangiano (16) y de la referencia nominal (20). Estás son, existen escalares positivos  $\beta_i \forall i = (0, \dots, 5)$  tales que

$$0 < \lambda_m(H) \leq \|H\| \leq \lambda_M(H) < \beta_1 < \infty \quad (22a)$$

$$\|C(q, \dot{q})\| \leq \beta_2 \|\dot{q}\| \quad (22b)$$

$$\|G(q)\| \leq \beta_3 \quad (22c)$$

$$\|\dot{q}_r\| \leq \beta_4 + \alpha \|\Delta q\| + \gamma \|\sigma\| \quad (22d)$$

$$\|\ddot{q}_r\| \leq \beta_5 + \gamma \|\Delta q\| \quad (22e)$$

donde  $\lambda_m(A)$ ,  $\lambda_M(A)$  representan los autovalores mínimos y máximos de la matriz A, respectivamente. Las normas  $\|A\| = \sqrt{\lambda_M(A^T A)}$  y  $\|b\|$  del vector  $b \in \mathbb{R}^n$  representan las normas inducidas de Frobenius y la norma Euclidiana, respectivamente. Con estas propiedades se puede determinar que (19) está acotada por una función dependiente del estado, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|Y_r(\cdot)\Theta\| &\leq \beta_1 \alpha \|\Delta \dot{q}\| + \lambda_M(D(\dot{q})) + \beta_2 \|\dot{q}\| \\ &\quad * (\alpha \|\Delta q\| + \gamma \|\sigma\| + \beta_4) + \bar{\beta}_3 \\ &\leq \eta(\Delta q, \sigma, \beta_i, t) \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\bar{\beta}_3 = \beta_1 \beta_5 + \beta_3$ . Esto establece que para una ganancia  $K_d$  suficientemente grande, el sistema es GUUB. En seguida se muestra que esto indica que las trayectorias  $q(t)$  están restringidas a un dominio pequeño  $\mathcal{D}_0$ ; y que en este dominio si  $K_i$  es mayor que la norma de  $\dot{S}_r$ , se logra inducir un modo deslizante en  $S_q = 0$  para todo tiempo, y con un control que no exhibe castaño. Con ello, finalmente se tiene que (17) induce estabilidad exponencial de sistemas robóticos Lagrangianos completamente actuados.

### III. LA PROPUESTA: *Backstepping*-MODOS DESLIZANTES (BSSM)

Para sistemas subactuados se tiene que el vector de fuerza generalizadas en (16), esta descrito como  $\tau = B(q)u$ , donde el rango de  $B$  es menor al de los grados de libertad  $n$  del sistema, (Olfati-Saber, 2000).

Para el caso particular del TORA, si las coordenadas generalizadas se definen como  $q = (x_c, \theta)^T$ , entonces  $\tau = (0, N)^T$ , donde  $N$  es el par aplicado al péndulo. Debido a la forma de  $\tau$ , es posible desacoplar el sistema (16) en dos subsistemas con estados  $x_x = (x_c, \dot{x}_c)^T$  y  $x_\theta = (\theta, \dot{\theta})^T$  de la siguiente forma:

$$H_x(q)\ddot{x}_c + \chi_x(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0 \quad (24a)$$

$$H_\theta(q)\ddot{\theta} + \chi_\theta(q, \dot{q}, \ddot{q}) = N = Y_\theta(q, \dot{q}, \ddot{q})\Theta \quad (24b)$$

donde  $H_i(q) > 0$  representa los complementos de Schur de la matriz de inercia para cada subsistema y  $\chi_i(q, \dot{q}, \ddot{q})$  representa los componentes no lineales del sistema incluidos los efectos de acoplamiento.

En virtud de (22) y (23), se sabe existe un regresor modificado  $Y_{\theta_r}(\cdot)$  cuyo producto está apropiadamente acotado. Junto con esta cota, se puede expresar la cota de la variación del complemento de Schur de la matrices de inercia como

$$Y_{\theta_r}(\cdot)\Theta \leq \eta_\theta < \infty \quad (25a)$$

$$\left\| \frac{1}{2} \dot{H}_\theta(q) \right\| \leq \beta_{H_\theta} \|\dot{q}\| \quad (25b)$$

Con  $\beta_{H_1} = \text{constante} > 0$ . Entonces el control libre de modelo (17) con la forma

$$N = -K_{d_\theta} S_{r_\theta} \quad (26)$$

y variables correspondientes definidas por (20), puede aplicarse al subsistema completamente actuado (24b) cuya solución  $\theta(t) \rightarrow \theta_d(t)$  seguirá una trayectoria arbitraria.

Considerando (7) se deduce que el subsistema  $z = (z_1, z_2)^T$  corresponde al sistema *no actuado* (24a), mientras que el subsistema  $y = (y_1, y_2)^T$  corresponde al sistema *actuado* (24b). Es posible escoger la trayectoria deseada

$$\theta_d = \alpha_0$$

del subsistema *actuado* y para estabilizar el subsistema *no actuado*  $z$  a través de la trayectoria  $\alpha_0(\cdot)$ , después de cierto tiempo.

#### III-A. Análisis de Estabilidad

Considere el sistema TORA, expresado por las expresiones (7a)-(7b)-(24b) y el control (26). El sistema *actuado* en lazo cerrado (24b)-(26), toma la siguiente forma:

$$H_\theta(q)\dot{S}_{r_\theta} = -K_{d_\theta} S_{r_\theta} - Y_{\theta_r}(\cdot)\Theta \quad (27)$$

Considere entonces la siguiente función de Lyapunov:

$$V = V_0 + \frac{1}{2} S_{r_\theta}^T H_\theta S_{r_\theta} \quad (28)$$

donde  $V_0$  está dada por (9) y el error

$$\xi_1 = \theta - \alpha_0 = \theta - \theta_d$$

representa el error de seguimiento del sistema no actuado, con  $\alpha_0$  definida por (8). Su derivada respecto al tiempo resulta en

$$\dot{V} = \dot{V}_0 - S_{r_\theta}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{H}_\theta(q) - K_{d_\theta} \right] S_{r_\theta} - S_{r_\theta}^T Y_{\theta_r}(\cdot) \Theta \quad (29)$$

Usando (13) y (25) la expresión anterior se convierte en

$$\dot{V} \leq \dot{V}_0 - \|K_i S_{r_\theta}\|^2 + \|S_{r_\theta}\| (\xi_\theta + \beta_{H_\theta}) \quad (30)$$

donde  $K_i = \sqrt{K_{d_\theta}} > 0$ .

Como  $S_{r_\theta}$  es función de  $\Delta\theta, \dot{\Delta}\theta, \sigma$  y de las condiciones iniciales. Entonces para errores iniciales pequeños pertenecientes a una región circundante  $\epsilon$  con radio  $r > 0$  centrada en el equilibrio  $S_{r_\theta} = 0$  definida por  $\mathcal{D}_0$ . Invocando argumentos de Lyapunov, existe una ganancia de retroalimentación lo suficientemente grande  $K_d$  tal que  $K_i > \xi_\theta + \beta_{H_\theta}$ , y por lo tanto,  $S_{r_\theta}$  converge a un conjunto acotado  $\epsilon$ . Entonces el acotamiento del error de seguimiento puede concluirse. Esto es:

$$S_{r_\theta} \rightarrow \epsilon, \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

De esta forma,  $S_{r_\theta}$  es acotada superiormente por una constante  $\epsilon_1$ . Lo que implica el acotamiento del estado del subsistema actuado de lazo cerrado (27), el cual incluye  $\sigma$ . Entonces existe una constante  $\bar{\eta}$  tal que  $\bar{\eta} \geq \|\eta\|$ . En virtud que  $H_\theta(q)$  es definida positiva y acotada, podemos concluir el acotamiento de  $\dot{S}_{r_\theta}$  de la forma siguiente

$$\dot{S}_{r_\theta} = -H_\theta^{-1}(q) (K_{d_\theta} S_{r_\theta} - Y_{\theta_r} \Theta) \quad (31)$$

$$\leq \lambda_M(H)^{-1} \{(\lambda_M(K) + \beta_2 \|\dot{q}\|) \epsilon_1 + \bar{\eta}\} \leq \zeta(t) \quad (32)$$

donde la función acotada  $\zeta(t)$  no depende de mediciones de aceleración. Entonces existe un vector constante  $\bar{\zeta} \geq \zeta(t)$ , que prueba que el error de seguimiento permanece estable con todas las señales de lazo cerrado acotadas.

El modo deslizante en  $S_{q_\theta} = 0$  se genera para todo  $t$  según los argumentos de (Parra-Vega *et al.*, 2003) con una ganancia  $\gamma_\theta$  suficientemente grande.

Entonces la trayectoria del subsistema controlado converge a su función deseada  $\theta \rightarrow \theta_d = \alpha_0$  lo que implica que  $\xi_1 = 0$ . A su vez esto implica que  $\dot{V}_0 < 0$  lo que quiere decir que el subsistema no actuado converge al origen  $z^* = 0$ .

*Comentarios:* La convergencia al origen de  $z$  implica  $\alpha_0(z_2^*) = 0$ . Debido a la transformación (6), el origen de subsistema no actuado  $z = (z_1, z_2)^T$  implica un equilibrio en el subsistema real en  $x_c \rightarrow 0$  y  $\dot{x}_c \rightarrow 0$

#### IV. SIMULACIONES

Las simulaciones se realizaron usando Matlab-simulink, ODE 45 Runge-Kutta fixed step a 1 ms. El parámetro  $\epsilon$  depende de los parámetros originales del sistema (2). Usaremos este parámetro para estudiar el comportamiento

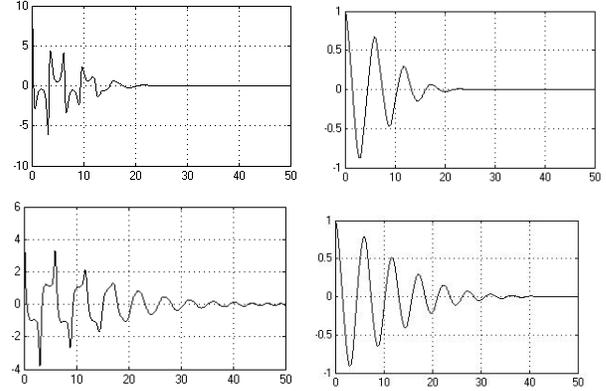


Figura 2: Control  $N$  (izq) y posición  $x$ (der) normalizados contra tiempo normalizado del TORA caso ideal. Arriba control Backstepping, Abajo Control BSSM

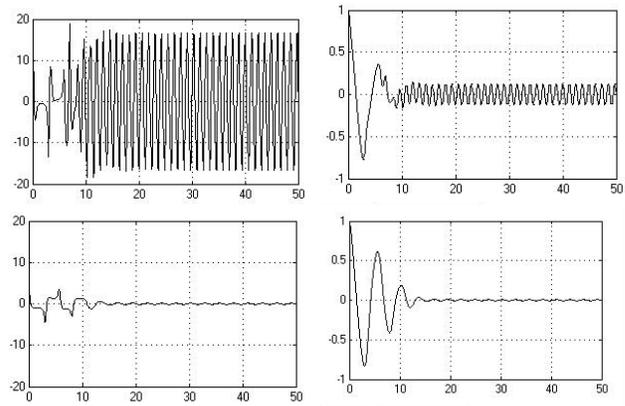


Figura 3: Control  $N$  (izq) y posición  $x$ (der) normalizados contra tiempo normalizado del TORA con incertidumbre de 50%. Arriba control Backstepping, Abajo Control BSSM

del control sujeto a incertidumbre. Partiendo de un valor nominal de  $\epsilon = 0,1$  ver se realizaron variaciones del parámetro de 50% y 100%. Las ganancias del control backstepping (14)-(15) se seleccionaron heurísticamente como  $k_1 = 4, k_2 = 4, c_0 = 2$ , mayores valores provocaron inestabilidad al variar los parámetros del sistema y menores mantuvieron un tiempo de convergencia mayor que el control libre de modelo. Las simulaciones se realizaron con dimensiones normalizadas para ser coherente con (Coppola *et al.*, 1995). Los parámetros del control libre de modelo (20)-(26) se seleccionaron de acuerdo a (Parra-Vega *et al.*, 2003)  $k = 1, Kd = 10, \gamma = 0,1, \alpha = 1$ . Las condiciones iniciales del sistema son  $x(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 0, 0, 0)^T$ .

En las gráficas se muestran el par de control  $N$  aplicado a la masa excéntrica y la posición  $x$  del sistema TORA. En la figura 2 se muestran los resultados asumiendo conocimiento exacto de modelo, mientras que en las figuras 3 y 4 se presentan los resultados con una variación en el parámetro  $\epsilon$  de 50% y 100% respectivamente. Se puede observar que si se conoce perfectamente el modelo (y sus

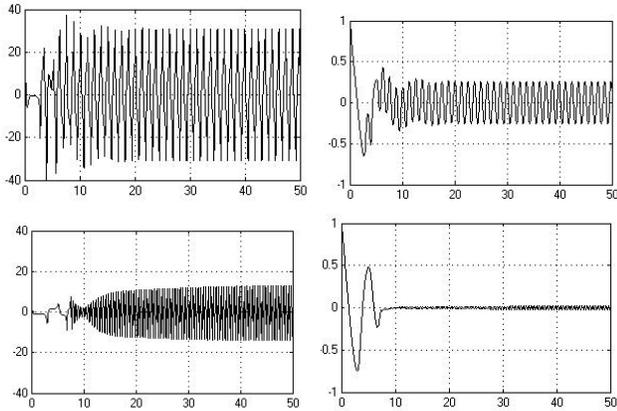


Figura 4: Control  $N$  (izq) y posición  $x$  (der) normalizados contra tiempo normalizado del TORA con incertidumbre de 100%. Arriba control Backstepping, Abajo Control BSSM

parámetros), el esquema de backstepping (14)-(15) presenta un mejor desempeño al que presenta nuestra propuesta BSSM (8)-(26), pero no así cuando hay incertidumbre en el conocimiento de los parámetros dinámicos.

En las figuras 3 y 4 se puede observar que con el control Backstepping no se eliminan las oscilaciones y que éstas pueden incluso aumentar en amplitud a consecuencia del error de estimación de los parámetros. En ambos casos, las señales de control crecen enormemente en comparación, requiriendo una demanda importante de energía.

En la mismas figuras, el control BSSM es superior en dos sentidos. Primero minimiza de mejor manera las oscilaciones de carro, inclusive mejorando los tiempos de establecimiento para el caso ideal y las señales de control se mantienen relativamente bajas. En el caso de la figura 3, se puede apreciar incluso que la señal de control no cambia sustancialmente en magnitud pero sí reduce el error a pesar de la incertidumbre paramétrica. En el caso de la figura 4, si bien la señal de control no se preserva como en los dos casos anteriores, sí se mantiene por debajo de las magnitudes del control backstepping y se mantiene acotado.

## V. CONCLUSIONES

Se ha presentado una estructura simple de control BSSM basada en la combinación de dos técnicas: Backstepping y Modos deslizantes de orden superior libre de modelo. Se presentó el procedimiento para implementarlo en un sistema subactuado donde el subsistema no actuado tiene dinámica cero de fase no mínima. La validación del control se probó analíticamente y se presentaron gráficas de los resultados obtenidos.

La estructura de la propuesta está basada en un control no lineal libre de modelo que controla directamente al subsistema actuado, que goza de propiedades de sistemas mecánicos Lagrangianos, e indirectamente al subsistema no actuado a través de una trayectoria de referencia del subsistema actuado. Esta trayectoria estabilizadora es propuesta a

raíz de una análisis de estabilidad por Lyapunov y ligada en el esquema completo por el método *backstepping*. la trayectoria del subsistema actuado, estabilizadora del no actuado, debe ser acotada y diferenciable. Acotada para evitar que el control crezca indefinidamente por los términos de acoplamiento, que son dependientes del estado completo y diferenciable para garantizar su implementación con el control libre de modelo, lo que representa una extensión no trivial del control presentado en (Parra-Vega *et al.*, 2003) para sistemas subactuados. El control obtenido requiere el conocimiento de la estructura del modelo dinámico del sistema para poder definir una trayectoria estabilizadora saturada capaz de estabilizar la dinámica no actuada.

## REFERENCIAS

- Antoneilli, G. (2006). *Underwater Robots*. Springer.
- Canudas-de-Wit, C., B. Siciliano y G. Bastin (1996). *Theory of Robot control*. Springer.
- Coppola, V., D. Bernstein y W. Chich-Jian (1995). Global stabilization of the oscillating eccentric rotor. *Nonlinear-Dynamics* (10), 49–62.
- Fantoni, I. y R. Lozano. (2002). *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Springer.
- Fossen, T.I. (2011). *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. Jhon Wiley and Sons LTD. Institutt for teknisk kybernetikk NTNU.
- Fossen, T.I. y Ola-Erik. Fjellstad (1995). Robust adaptive control of underwater vehicles: A comparative study. En: *Proc. of the 3rd IFAC Workshop on Control Applications in Marine Systems (CAMS'95)*. pp. 66–74.
- Isidori, A. (1995). Robust regulation for nonlinear systems with gain-bounded uncertainties. *IEEE Transactions on Robotics* **40**(10), 1744–1754.
- Jankovic, M., D. Fontaine y P. V. Kokotovic (1996). Tora example: cascade and passivity-based control designs. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* **4**(3), 292–297.
- Khalil, H. (2000). *Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- Krstic, M., I. Kanellakopoulos y P. Kokotovich (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Design*. Jhon Wiley and Sons.
- Nazrulla, M. y H. Khalil (2008). A novel nonlinear output feedback control applied to tora benchmark system. En: *CDC*. pp. 3565–3570.
- Olfati-Saber, R. (2000). *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Applications to Robotics and Aerospace Vehicales*. Tesis de doctorado. M.I.T. Massachusetts.
- Oriolo, G. y Y. Nakamura (1991). Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: Underactuated manipulators. En: *In Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 2398–2403.
- Parra-Vega, V., S. Arimoto, Yun-Hui. Li, G. Hirzinger y P. Akella (2003). Dynamic sliding pid control for tracking of robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **19**(6), 967–976.
- Raygosa-Barahona, R., V. Parra-Vega, E. Olguín-Díaz y A. Muñoz-Ubando (2011). A model-free backstepping with integral sliding mode control for underactuated rovs. En: *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 8th International Conference on*. pp. 1–7.
- Rogelio Lozano, Sergio Salazar-cruz, Isabelle Fantoni y Jorge Torres (2006). Stabilization of a mini-rotorcraft. En: *Proc. of the 45th IEEE conference on Decision and Control*.
- Spong M., S. Hutchinson, M. Vidyasagar (2005). *Robot Modelling and Control*. Jhon Wiley and sons.
- Spong, M. y L. Praly (1997). Control of underactuated mechanical systems using switching and saturation. En: *In Control Using Logic-Based Switching*. pp. 162–172.
- Tedrake, R. (Marzo 2010). *Underactuated Robotics*. MIT Press. Massachusetts Institute of Technology.
- Utkin, V. (1999). *Sliding mode control in electromechanical systems*. Taylor & Francis.
- Wang, W., J. Yi, D. Zhao y D. Liu (2004). Design of a stable sliding-mode controller for a class of second order underactuated systems. En: *IEEE Proceedings Control Theory Appl.*. Vol. 151.