

# Conjunto de controladores PID para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica

Mario López-Vega César Elizondo-González Cornelio Posadas-Castillo  
Universidad Autónoma de Nuevo León

Av. Pedro de Alba S/N Cd. Universitaria

San Nicolás de los Garza, N.L., C. P. 66451, México.

mario\_lopez\_vega@yahoo.com.mx celizond@yahoo.com cposadas@fime.uanl.mx

Teléfono: (81) 8329 4020

Gerardo Romero-Galván

Departamento de Electrónica, UAT, Unidad Académica Reynosa-Rodhe. gromero@uat.edu.mx

**Resumen**—El presente trabajo, muestra un nuevo enfoque basado en "descomposición de signo" para encontrar las ganancias de un conjunto de controladores PID que permiten que la familia de sistemas que se generan por la incertidumbre en sus parámetros sea robustamente estable. Se considera el caso más complejo, en donde la familia de polinomios característicos con incertidumbre paramétrica de la planta y el controlador son funciones multivariantes polinómicas. Además es usado un reciente criterio de estabilidad con ciertas ventajas sobre otros y un teorema de estabilidad relativa. Se muestra un ejemplo de la aplicación de éstas herramientas en un caso general.

**Palabras clave:** Control PID, Incertidumbre Paramétrica, Estabilidad.

## I. INTRODUCCIÓN

La estabilidad robusta de sistemas dinámicos en presencia de incertidumbres ha sido un importante tema de estudio en la teoría de control. La retroalimentación no sería necesaria para la mayoría de los sistemas de control si no hubiese perturbaciones e incertidumbres (Kemin Zhou, John C. Doyle, 1999).

El problema de estabilidad robusta con incertidumbre paramétrica no es un problema nuevo, existen varios enfoques que buscan mejorar el diseño de controladores robustos y las técnicas de modelado (H.Chapellat, L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, 1993), (B. T.Polyak and J. Kogan., 1995), (M.Zettler and J. Garloff, 1998). En el enfoque polinomial, la estabilidad de los sistemas lineales invariantes en el tiempo se determina a partir del polinomio característico. Es posible probar si un sistema es o no estable mediante la búsqueda de la parte real de las raíces del polinomio característico del sistema. La ubicación de los polos del sistema en el semiplano izquierdo del plano  $s$  da una indicación no sólo de la estabilidad y la estabilidad relativa de ese sistema, además cierto desempeño. El problema de encontrar un conjunto de controladores que satisfagan estabilidad robusta es aun más complejo cuando existe incertidumbre en cada uno de los parámetros de la planta. Dicho problema es mapeado a un problema de positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas y resuelto con la herramienta matemática "descomposición de signo"(Elizondo C., 1999)

o como algunos autores la llaman "descomposición de signo definida", resultados recientes sobre este problema son también basados en esta herramienta (Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2008; Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2009; Knap M. J., Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2009; Knap M. J., Keel L. H. and Bhattacharyya S. P., 2009; López M. A., Elizondo C. y Posadas C., 2010).

En la industria, los controladores PID son los más comunes, mas del 95% de los lazos de control son de este tipo ya que es suficiente utilizarlos para la solución de muchos problemas de control. (Karl J. Astrom , T. Hagglund, 1995)

En este trabajo es desarrollado un nuevo enfoque para calcular el conjunto de controladores estabilizantes de un determinado sistema lineal invariante en el tiempo con incertidumbre en sus parámetros usando tres herramientas, la primera es un reciente criterio de estabilidad con ciertas ventajas sobre otros criterios, la segunda es un criterio de estabilidad relativa y por último la herramienta descomposición de signo.

El presente artículo es desarrollado de la siguiente manera:

En la sección 2 es descrito un reciente criterio de estabilidad que garantiza en condiciones necesarias y suficientes estabilidad aplicable a polinomios fijos con incertidumbre paramétrica. En la sección 3 se explica un importante criterio de estabilidad relativa. En la sección 4, mostramos de manera breve la herramienta "descomposición de signo". En la sección 5 se presenta un ejemplo de como este enfoque puede ser aplicado a un problema dado. Finalmente en la sección 6, son presentadas las conclusiones.

## II. UN RECIENTE CRITERIO DE ESTABILIDAD (C. ELIZONDO)

El reciente criterio tiene dos ventajas: 1) Las operaciones numéricas se reducen en comparación con otros criterios de estabilidad; 2) Los coeficientes son funciones multivariantes polinómicas y en el caso de incertidumbre paramétrica y positividad robusta es más sencillo utilizar este criterio en

lugar del criterio de Routh ya que no se utiliza la división. El criterio es descrito a continuación:

**Teorema 1:** (Elizondo C., 2001) *Dado un polinomio  $p(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots + C_{n-1}s^{n-1} + C_ns^n$  con coeficientes reales, el número de raíces en el lado derecho del plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo en la columna  $\sigma$  en el siguiente arreglo.*

$\sigma_1$	$C_n$	$C_{n-2}$	$C_{n-4}$	$\dots$
$\sigma_2$	$C_{n-1}$	$C_{n-3}$	$C_{n-5}$	$\dots$
$\sigma_3$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$\dots$	
$\sigma_4$	$e_{4,1}$	$e_{(4,2)}$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\sigma_{(n-1)}$	$e_{(n-1),1}$	$e_{(n-1),2}$		
$\sigma_n$	$e_{(n,1)}$			
$\sigma_{n+1}$	$e_{(n+1),1}$			

$$e_{i,j} = (e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1}), \forall 3 \leq i \leq n+1,$$

$$e_{i,j} = C_{n+1-i-2(j-1)} \forall i \leq 2,$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \forall i \leq 2,$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} \text{Sign}(e_{(m+2(j-1)),(1)}) \forall i \geq 3),$$

$$m = 3 \text{ para } i \text{ par}, m = 2 \text{ para } i \text{ non.}$$

La metodología de cálculo del signo  $\sigma_i$  de un renglón es mucho más sencilla que la expresión matemática que lo determina: el signo  $\sigma_i$  de un renglón se determina multiplicando el signo de  $e_{(i,1)}$  por el signo del elemento inmediato superior a éste, es decir el de  $e_{(i-1),1}$  y por los signos de los elementos superiores de la columna  $e$  “brincando” de dos en dos. Por ejemplo:  $\sigma_6 = \text{sign}(e_{(6,1)})\text{sign}(e_{(5,1)})\text{sign}(e_{(3,1)})\text{sign}(e_{(1,1)})$ . No es necesario calcular el último elemento  $e_{(n+1),1}$ , lo único que se necesita es calcular su signo, los elementos  $e_{i,j}$  de cada renglón se obtienen por los elementos  $e_{(i-1,j)}$  previamente calculados. En la siguiente tabla se muestra como el criterio Elizondo González tiene ventajas sobre el criterio de Hurwitz.

Grado n	Hurwitz			C.Elizondo	
	×	+	o -	×	+
3	4	1		2	1
4	9	2		5	2
5	66	18		9	4
6	193	45		14	6
7	780	145		20	9

### III. ESTABILIDAD RELATIVA

En los sistemas con incertidumbre paramétrica, no es suficiente saber que el sistema cumple con estabilidad, es mejor si el sistema cumple con las especificaciones de estabilidad relativa que es una medida cuantitativa de la rapidez con que la respuesta transitoria del sistema tiende a cero.

La estabilidad relativa muestra que tan cerca se encuentra el sistema de perder estabilidad. De aquí, la importancia de incluirlo en este artículo. El siguiente teorema determina si la parte real de la raíces del polinomio característico en lazo cerrado correspondiente a un sistema LTI con incertidumbre paramétrica esté contenida en una región específica de los reales como se muestra enseguida.

**Teorema 2:** (Elizondo C. y Alcorta E., 2005) *Sea  $p(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + s^n$  el polinomio característico con coeficientes reales positivos correspondiente un sistema LTI, sean  $a$  y  $b$  dos números reales positivos. Entonces las raíces de  $p(s)$  están localizadas, en el plano de los complejos, a la izquierda de  $-a$  y a la derecha de  $-b$  si y solo si los polinomios  $p(s - a)$  y  $p(-s - b)$  son asintóticamente estables.*

### IV. BREVE DESCRIPCIÓN DE DESCOMPOSICIÓN DE SIGNO

Descomposición de signo es una herramienta matemática que mediante el análisis de puntos extremos permite determinar en condiciones necesarias y suficientes, la positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas dependientes de parámetros.

**Definición 1:** (Elizondo C., 1999) *Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$  un subconjunto convexo, se dice que  $f(\cdot)$  tiene descomposición de signo en  $Q$  si existen dos funciones acotadas no-decrecientes  $f_n(\cdot) \geq 0, f_p(\cdot) \geq 0$ , tales que  $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$  para toda  $q \in Q$ . Dichas funciones se llaman: la parte positiva de la función  $f_p(\cdot)$  y la parte negativa de la función  $f_n(\cdot)$ .*

$$f(q) = f_p(q) - f_n(q) \quad \forall q \in Q,$$

$$f_p(\cdot) \triangleq \text{Parte Positiva de } f(\cdot),$$

$$f_n(\cdot) \triangleq \text{Parte Negativa de } f(\cdot).$$

#### IV-A. Representación $(f_n, f_p)$

Cuando una función continua  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  se descompone en  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^\ell$  en sus partes positiva y negativa  $f_p(\cdot)$  y  $f_n(\cdot)$ , realmente se está haciendo una transformación de  $\mathbb{R}^\ell$  a  $\mathbb{R}^2$ , la representación gráfica de la función en un plano  $(f_n, f_p)$  es de utilidad para entender más fácilmente las propiedades que poseen las partes positiva y negativa de la función, para lo cual se establece la siguiente proposición.

Si una función con descomposición de signo en  $Q$  es igual a cero para todo  $q$  elemento de  $Q$ , implica que

$f_p(q) = f_n(q) \forall q \in Q$  y su representación gráfica en el plano  $(f_n, f_p)$  es una línea recta a  $45^\circ$  que contiene al origen, a la cual nos referiremos como *la recta a  $45^\circ$* , los puntos arriba de ella corresponden a la representación gráfica de funciones con valor positivo y obviamente los de abajo a negativo.

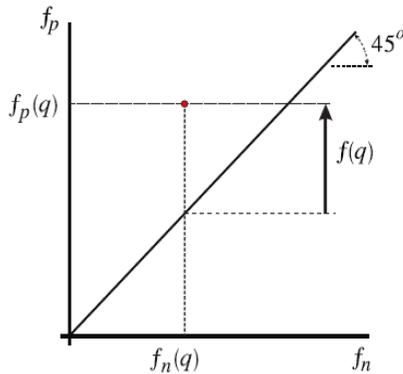


Figura 1: Plano  $(f_n, f_p)$ .

Debe notarse que independientemente del número de parámetros de la función multivariable polinómica, la función siempre será representada en  $\mathbb{R}^2$ , representada en el plano  $(f_n, f_p)$ .

#### IV-B. Teorema de Partición de Cajas

Cuando no es posible conocer si una función es positiva o no es positiva en  $Q = [q_1^-, q_1^+] \times [q_2^-, q_2^+] \times \dots \times [q_l^-, q_l^+]$ . Entonces podemos dividir cada variable  $[q_i^-, q_i^+]$  en  $k$  partes, generando  $k$  nuevos intervalos:  $[q_i^-, q_i^1], [q_i^1, q_i^2], \dots, [q_i^j, q_i^{j+1}], \dots, [q_i^{k-1}, q_i^+]$ , y  $[\Upsilon_i^-, \Upsilon_i^+]$  serán  $k$  nuevos intervalos, que dan motivo a la generación de  $k^l$  nuevas cajas  $\Gamma^i = [\Upsilon_1^-, \Upsilon_1^+] \times [\Upsilon_2^-, \Upsilon_2^+] \times \dots \times [\Upsilon_l^-, \Upsilon_l^+]$  con  $m_{min}, m_{max} \in \Gamma^i$  vértices mínimo y máximo Euclidianos de  $\Gamma^i$  y  $Q \cup_i \Gamma^i$ . Por medio de estos conceptos, se obtiene el siguiente teorema.

**Teorema 3:** (Elizondo C., 2001) Sea  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición de signo en  $Q$  tal que  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^l$  es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos  $v_{min}, v_{max}$ , entonces la función  $f(q)$  es positiva (negativa) en  $Q$  si y sólo si existe un conjunto de cajas  $\Gamma$  tal que  $Q \cup_j \Gamma^i$  y cota mínima  $\geq c > 0$  para cada caja  $\Gamma^j$  (cota máxima  $\leq c < 0$  para cada una)

### V. EJEMPLO

En el siguiente ejemplo se ilustra como estas herramientas pueden aplicarse para encontrar una región de controladores PID que estabilizan a un sistema LTI con incertidumbre paramétrica.

Se considera la forma general de un sistema de segundo orden con incertidumbre paramétrica en cascada con

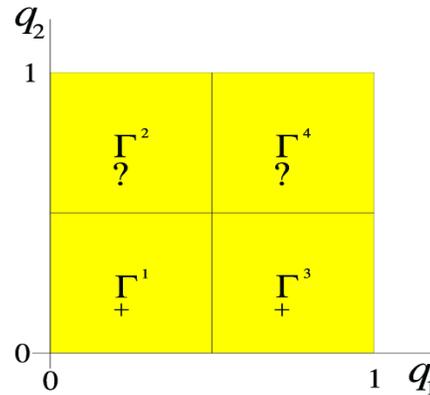


Figura 2: Signo de la función en cajas  $\Gamma$ .

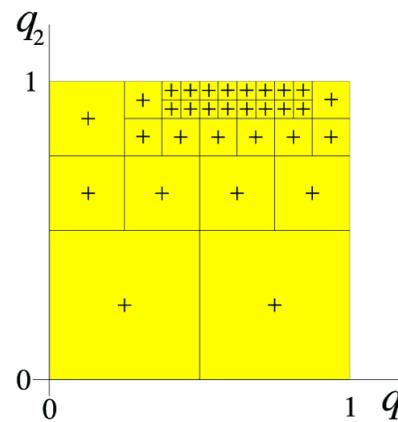


Figura 3: Signo de la función en cajas  $\Gamma$ .

un controlador PID y retroalimentación unitaria como se observa en la figura 4.

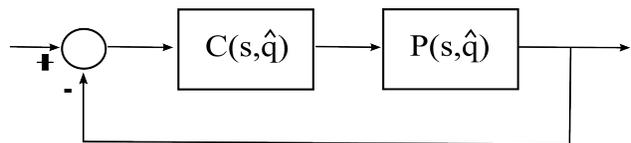


Figura 4: Sistema retroalimentado.

Las siguientes funciones de transferencia corresponden a la planta  $P(s)$  y al controlador  $C(s)$ :

$$P(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{1}{\hat{q}_1 s^2 + \hat{q}_2 s + \hat{q}_3}$$

$$C(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \hat{q}_4 \left( 1 + \frac{1}{\hat{q}_5 s} + \hat{q}_6 s \right)$$

El polinomio característico en lazo cerrado es:

$$p(s, \hat{q}) = \hat{q}_1 \hat{q}_5 s^3 + (\hat{q}_2 \hat{q}_5 + \hat{q}_4 \hat{q}_5 \hat{q}_6) s^2 + (\hat{q}_4 \hat{q}_5 + \hat{q}_3 \hat{q}_5) s + \hat{q}_4$$

Los parámetros del sistema con un 5% de incertidumbre son como sigue:

$$\hat{q}_1 \in [10.45, 11.55], \hat{q}_2 \in [2.85, 3.15], \hat{q}_3 \in [1.9, 2.1].$$

En los sistemas LTI con incertidumbre paramétrica, las funciones multivariadas polinómicas a analizar dependen de parámetros acotados y algunas de éstas cotas pudiesen ser valores negativos. Por lo tanto “descomposición de signo” comienza con una transformación de coordenadas de los parámetros acotados a un conjunto de parámetros matemáticos tal que todos los vectores de los nuevos parámetros estén contenidos en un cono convexo positivo.

La transformación es de la siguiente manera:

$$q_i = q_i^- + \frac{\hat{q}_i - \hat{q}_i^-}{\hat{q}_i^+ - \hat{q}_i^-} (\hat{q}_i^+ - \hat{q}_i^-).$$

En este ejemplo, se determinan las ganancias de un controlador PID de un sistema LTI con incertidumbre paramétrica. Se desea que la parte real del polinomio característico en lazo cerrado este dentro de una región definida por el segmento  $[-0.4, -0.1]$

Usando el teorema de estabilidad relativa, se analizan la estabilidad robusta de los polinomios  $p(s-a)$  y  $p(-s-b)$  donde  $a = 0.1, b = 0.4$ . Entonces, la estabilidad robusta de cada polinomio  $p(s-a)$  y  $p(-s-b)$  serán analizados utilizando el reciente criterio de estabilidad (Elizondo C., 2001), y aplicando “descomposición de signo” se probará la positividad robusta de los elementos  $e_{i,1}$ . Si cada elemento  $e_{i,1}$  es robustamente positivo entonces, la columna entera será positiva y el polinomio del sistema analizado será robustamente estable. Los coeficientes de cada polinomio a analizar son:

$$p(s-a, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$$

$$C_3(q) = 10.45q_5 + 1.1q_1q_5,$$

$$C_2(q) = 0.3q_2q_5 - 0.33q_1q_5 - 0.285q_5 + q_4q_5q_6,$$

$$C_1(q) = 1.6435q_5 + 0.033q_1q_5 - 0.06q_2q_5 + 0.2q_3q_5 + q_4q_5 - 0.2q_4q_5q_6,$$

$$C_0(q) = q_4 - 0.17195q_5 - 0.0011q_1q_5 + 0.003q_2q_5 - 0.02q_3q_5 - 0.1q_4q_5 + 0.01q_4q_5q_6,$$

$$e_{3,1}(q) = 0.4788q_2q_5^2 - 0.35112q_1q_5^2 + 0.152q_3q_5^2 + 0.76q_4q_5^2 + 1.3285q_5^2 - 0.00968q_1q_5^2 - 0.018q_2^2q_5^2 - 10.45q_4q_5 - 0.2q_4^2q_5^2q_6^2 + 0.0264q_1q_2q_5^2 - 0.044q_1q_3q_5^2 - 0.22q_1q_4q_5^2 + 0.06q_2q_3q_5^2 + 0.3q_2q_4q_5^2 + 1.596q_4q_5^2q_6 + q_4^2q_5^2q_6 - 1.1q_1q_4q_5 + 0.088q_1q_4q_5^2q_6 - 0.12q_2q_4q_5^2q_6 + 0.2q_3q_4q_5^2q_6.$$

$$e_{4,1}(q) = 1.0648 \times 10^{-5} q_1^3 q_5^3 - 5.808 \times 10^{-5} q_1^2 q_2 q_5^3 + 2.42 \times 10^{-4} q_1^2 q_3 q_5^3 - 1.936 \times 10^{-4} q_1^2 q_4 q_5^3 q_6 + 0.00121 q_1^2 q_4 q_5^3 - 0.00847 q_1^2 q_4 q_5^2 + 2.0507 \times 10^{-3} q_1^2 q_5^3 + 9.9 \times 10^{-5} q_1 q_2^2 q_5^3 - 7.26 \times 10^{-4} q_1 q_2 q_3 q_5^3 + 0.00066 q_1 q_2 q_4 q_5^3 q_6 - 0.00363 q_1 q_2 q_4 q_5^3 + 0.0231 q_1 q_2 q_4 q_5^2 - 6.1195 \times 10^{-3} q_1 q_2 q_5^3 + 0.00088 q_1 q_2^2 q_5^3 - 0.00242 q_1 q_3 q_4 q_5^3 q_6 + 0.0088 q_1 q_3 q_4 q_5^3 - 0.022 q_1 q_3 q_4 q_5^2 + 1.4421 \times 10^{-2} q_1 q_3 q_5^3 + 0.0011 q_1 q_4^2 q_5^3 q_6^2 - 0.0121 q_1 q_4^2 q_5^3 q_6 + 0.022 q_1 q_4^2 q_5^3 + 0.077 q_1 q_4^2 q_5^2 q_6 - 0.11 q_1 q_4^2 q_5^2 - 1.1 q_1 q_4^2 q_5 - 2.0398 \times 10^{-2} q_1 q_4 q_5^3 q_6 + 7.2105 \times 10^{-2} q_1 q_4 q_5^3 - 0.15048 q_1 q_4 q_5^2 + 5.8914 \times 10^{-2} q_1 q_5^3 - 5.4 \times 10^{-5} q_2^3 q_5^3 + 0.00054 q_2^2 q_3 q_5^3 - 0.00054 q_2^2 q_4 q_5^3 q_6 + 0.0027 q_2^2 q_4 q_5^3 - 0.018 q_2^2 q_4 q_5^2 + 4.5315 \times 10^{-3} q_2^2 q_5^3 - 0.0012 q_2 q_3^2 q_5^3 + 0.0036 q_2 q_3 q_4 q_5^3 q_6 - 0.012 q_2 q_3 q_4 q_5^3 + 0.06 q_2 q_3 q_4 q_5^2 - 1.9437 \times 10^{-2} q_2 q_3 q_5^3 - 0.0018 q_2 q_4^2 q_5^3 q_6^2 + 0.018 q_2 q_4^2 q_5^3 q_6 - 0.03 q_2 q_4^2 q_5^3 - 0.12 q_2 q_4^2 q_5^2 q_6 + 0.3 q_2 q_4^2 q_5^2 + 0.03021 q_2 q_4 q_5^3 q_6 - 9.7185 \times 10^{-2} q_2 q_4 q_5^3 + 0.44745 q_2 q_4 q_5^2 - 7.8344 \times 10^{-2} q_2 q_5^3 - 0.004 q_3^2 q_4 q_5^3 q_6 - 0.00304 q_3^2 q_5^3 + 0.006 q_3 q_4^2 q_5^3 q_6^2 - 0.04 q_3 q_4^2 q_5^3 q_6 + 0.2 q_3 q_4^2 q_5^2 q_6 - 0.06479 q_3 q_4 q_5^3 q_6 - 0.0304 q_3 q_4 q_5^3 + 0.361 q_3 q_4 q_5^2 - 5.2706 \times 10^{-2} q_3 q_5^3 - 0.002 q_4^3 q_5^3 q_6^3 + 0.03 q_4^3 q_5^3 q_6^2 - 0.1 q_4^3 q_5^3 q_6 - 0.2 q_4^3 q_5^2 q_6^2 + q_4^3 q_5^2 q_6 + 0.05035 q_4^2 q_5^3 q_6^2 - 0.32395 q_4^2 q_5^3 q_6 - 0.076 q_4^2 q_5^3 + 1.4915 q_4^2 q_5^2 q_6 + 1.805 q_4^2 q_5^2 - 10.45 q_4^2 q_5 - 0.26115 q_4 q_5^3 q_6 - 0.26353 q_4 q_5^3 + 3.125 q_4 q_5^2 - 0.22844 q_5^3.$$

$$p(-s-b, q) = C_3(q)s^3 + C_2(q)s^2 + C_1(q)s + C_0(q)$$

$$C_3(q) = -10.45q_5 - 1.1q_1q_5,$$

$$C_2(q) = 0.3q_2q_5 - 1.32q_1q_5 - 9.69q_5 + q_4q_5q_6,$$

$$C_1(q) = 0.24q_2q_5 - 0.528q_1q_5 - 4.636q_5 - 0.2q_3q_5 - q_4q_5 + 0.8q_4q_5q_6,$$

$$C_0(q) = q_4 - 0.9728q_5 - 0.0704q_1q_5 + 0.048q_2q_5 - 0.08q_3q_5 - 0.4q_4q_5 + 0.16q_4q_5q_6,$$

$$e_{3,1}(q) = 9.4301q_1q_5^2 - 3.2148q_2q_5^2 + 1.102q_3q_5^2 + 5.51q_4q_5^2 + 34.757q_5^2 + 0.61952q_1^2q_5^2 + 0.072q_2^2q_5^2 + 10.45q_4q_5 + 0.8q_4^2q_5^2q_6^2 - 0.4224q_1q_2q_5^2 + 0.176q_1q_3q_5^2 + 0.88q_1q_4q_5^2 - 0.06q_2q_3q_5^2 - 0.3q_2q_4q_5^2 - 10.716q_4q_5^2q_6 - q_4^2q_5^2q_6 + 1.1q_1q_4q_5 - 1.408q_1q_4q_5^2q_6 + 0.48q_2q_4q_5^2q_6 - 0.2q_3q_4q_5^2q_6.$$

$$\begin{aligned}
e_{4,1}(q) = & -4.3614 \times 10^{-2} q_1^2 q_5^3 + 5.9474 \times 10^{-2} q_1^2 q_2 q_5^3 - \\
& 6.1952 \times 10^{-2} q_1^2 q_3 q_5^3 + 0.19825 q_1^2 q_4 q_5^3 q_6 - \\
& 0.30976 q_1^2 q_4 q_5^3 + 0.54208 q_1^2 q_4 q_5^2 - \\
& 1.2665 q_1^2 q_5^3 - 2.5344 \times 10^{-2} q_1 q_2^2 q_5^3 + \\
& 4.6464 \times 10^{-2} q_1 q_2 q_3 q_5^3 - 0.16896 q_1 q_2 q_4 q_5^3 q_6 + \\
& 0.23232 q_1 q_2 q_4 q_5^3 - 0.3696 q_1 q_2 q_4 q_5^2 + \\
& 1.0899 q_1 q_2 q_5^3 - 0.01408 q_1 q_3^2 q_5^3 + \\
& 0.15488 q_1 q_3 q_4 q_5^3 q_6 - 0.1408 q_1 q_3 q_4 q_5^3 + \\
& 0.088 q_1 q_3 q_4 q_5^2 - 1.0032 q_1 q_3 q_5^3 - \\
& 0.2816 q_1 q_4^2 q_5^3 q_6^2 + 0.7744 q_1 q_4^2 q_5^3 q_6 - \\
& 0.352 q_1 q_4^2 q_5^3 - 1.232 q_1 q_4^2 q_5^2 q_6 + 0.44 q_1 q_4^2 q_5^2 + \\
& 1.1 q_1 q_4^2 q_5 + 3.6329 q_1 q_4 q_5^3 q_6 - 5.016 q_1 q_4 q_5^3 + \\
& 7.6243 q_1 q_4 q_5^2 - 11.62 q_1 q_5^3 + 3.456 \times 10^{-3} q_2^3 q_5^3 - \\
& 0.00864 q_2^2 q_3 q_5^3 + 0.03456 q_2^2 q_4 q_5^3 q_6 - \\
& 0.0432 q_2^2 q_4 q_5^3 + 0.072 q_2^2 q_4 q_5^2 - 0.22435 q_2^2 q_5^3 + \\
& 0.0048 q_2 q_3^2 q_5^3 - 0.0576 q_2 q_3 q_4 q_5^3 q_6 + \\
& 0.048 q_2 q_3 q_4 q_5^3 - 0.06 q_2 q_3 q_4 q_5^2 + 0.36845 q_2 q_3 q_5^3 + \\
& 0.1152 q_2 q_4^2 q_5^3 q_6^2 - 0.288 q_2 q_4^2 q_5^3 q_6 + 0.12 q_2 q_4^2 q_5^3 + \\
& 0.48 q_2 q_4^2 q_5^2 q_6 - 0.3 q_2 q_4^2 q_5^2 - 1.4957 q_2 q_4 q_5^3 q_6 + \\
& 1.8422 q_2 q_4 q_5^3 - 2.7132 q_2 q_4 q_5^2 + 4.7957 q_2 q_5^3 + \\
& 0.016 q_3^2 q_4 q_5^3 q_6 - 0.08816 q_3^2 q_5^3 - 0.096 q_3 q_4^2 q_5^3 q_6^2 + \\
& 0.16 q_3 q_4^2 q_5^3 q_6 - 0.2 q_3 q_4^2 q_5^2 q_6 + 1.2282 q_3 q_4 q_5^3 q_6 - \\
& 0.8816 q_3 q_4 q_5^3 + 0.266 q_3 q_4 q_5^2 - 3.8526 q_3 q_5^3 + \\
& 0.128 q_4^3 q_5^3 q_6^2 - 0.48 q_4^3 q_5^3 q_6^2 + 0.4 q_4^3 q_5^3 q_6 + \\
& 0.8 q_4^3 q_5^2 q_6^2 - q_4^3 q_5^2 q_6 - 2.4928 q_4^2 q_5^3 q_6^2 + \\
& 6.1408 q_4^2 q_5^3 q_6 - 2.204 q_4^2 q_5^3 - 9.044 q_4^2 q_5^2 q_6 + \\
& 1.33 q_4^2 q_5^2 + 10.45 q_4^2 q_5 + 15.986 q_4 q_5^3 q_6 - \\
& 19.263 q_4 q_5^3 + 24.591 q_4 q_5^2 - 33.812 q_5^3.
\end{aligned}$$

Para el cálculo del conjunto de controladores PID que satisfagan la estabilidad robusta dentro de un segmento de los reales preestablecido, se fija un valor para uno de los parámetros del controlador PID (en este caso  $q_4$ ) y es aplicado la metodología mostrada en (López M. A., Elizondo C. y Posadas C., 2012), donde se obtienen la estabilidad robusta de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica para dos parámetros del controlador. En la figura 5 el valor fijo es  $q_4 = 1.4$  y se obtiene una región para los dos parámetros restantes  $q_5, q_6$  donde se satisface estabilidad robusta.

La figura 6 muestra los distintas ganancias que pueden tomar  $q_5, q_6$  para diferentes valores de  $q_4$  fijos y que además satisfacen las especificaciones de este ejemplo.

Después de aplicar sucesivamente el proceso de división de cajas (ver figura 2,3), finalmente se obtiene un conjunto de controladores que estabilizan robustamente el sistema en el intervalo deseado. Entonces para los polinomios  $p(s-a)$

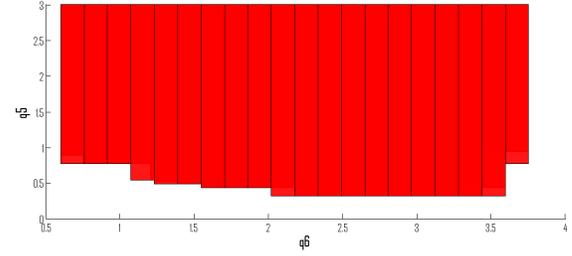


Figura 5: Valores de ganancia  $q_5, q_6$  para  $q_4 = 1,4$ .

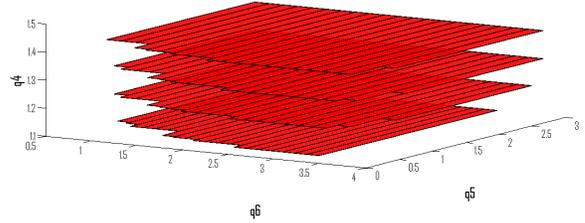


Figura 6: Valores de ganancia  $q_5, q_6$  para distintos  $q_4$ .

y  $p(-s-b)$ , se fija el valor de  $q_4$  y después de un barrido de  $q_4$  se obtiene la región de estabilidad mostrada en la figura 7 y 8 respectivamente.

La región de estabilidad robusta para el sistema LTI con incertidumbre paramétrica de este ejemplo es la intersección de las dos regiones anteriores. Ésta intersección indica los valores de  $q_3, q_4$  y  $q_5$  del controlador PID que hacen que la parte real del polinomio característico esten dentro de la región definida por el segmento  $[-0.4, -0.1]$

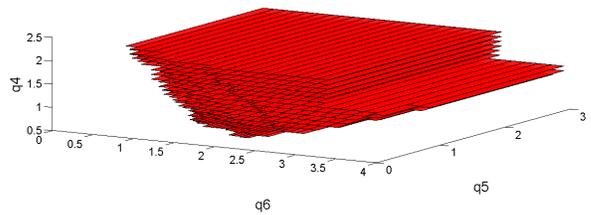


Figura 7: Conjunto de controladores PID para  $p(s-a, q)$ .

## VI. CONCLUSIONES

En el presente trabajo es presentado un nuevo enfoque capaz de encontrar las ganancias de un conjunto de controladores PID que mantiene estabilidad robusta a un sistema LTI con incertidumbre paramétrica. Dicho problema es mapeado a un problema de positividad de funciones multivariantes polinómicas y resuelto haciendo uso de la herramienta matemática “descomposición de signo” o “descomposición de signo definida”.

Si el número de parámetros con incertidumbre del sistema aumenta o bien se requiere mayor exactitud en la región

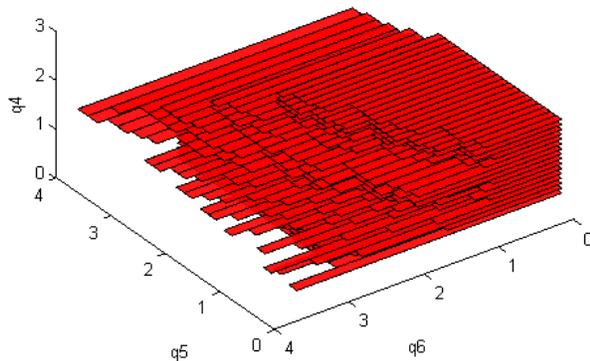


Figura 8: Conjunto de controladores PID para  $p(-s - b, q)$ .

de estabilidad deberá aumentar el número de particiones de las cajas a analizar y por lo tanto aumentará el costo computacional.

#### REFERENCIAS

- Astrom J. Karl , Hagglund T. (1995) *PID Controllers: Theory, Design and Tuning* ISA The Instrumentation Systems and Automation Society
- Bhattacharyya S. P., Datta A., y Keel L. H. (2009) *Linear Control Theory. Structure, Robustness and Optimization*. Taylor and Francis Group. Boca Raton, London, New York.
- H.Chapellat, L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya (1993) *Robust stability manifolds for multilinear interval systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 34, 314-318.
- Elizondo C. (1999) *Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal*. Programa Doctoral de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León.
- Elizondo C. (2000) *Necessary and Sufficient Conditions for Robust Positivity of Polynomic Functions Via Sign Decomposition*, Robust Control Design. IFAC ROCOND, Prague Czech Republic.
- Elizondo C. (2001) *A new stability criterion on space coefficients*. Conferences on Decision and Control IEEE, Orlando Florida USA
- Elizondo C. y Alcorta E. (2005) *Análisis de Cotas de Raíces de Polinomios Característicos y Nuevo Criterio de Estabilidad*. AMCA.
- Elizondo C. (2011) *Parametric Robust Stability, Recent Advances in Robust Control - Theory and Applications in Robotics and Electromechanics, Andreas Mueller (Ed.)*, ISBN: 978-953-307-421-4, InTech, Available from: <http://www.intechopen.com/books/recent-advances-in-robust-control-theory-and-applications-in-robotics-and-electromechanics/parametric-robust-stability>
- Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2008) *Fixed Order Multivariable Controller Synthesis: A New Algorithm*, Proceedings of the 47th Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico.
- Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2009) *Fixed Order Multivariable Discrete-Time Control*, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China.
- Knap M.J., Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2010) *Robust stability of complex systems with applications to performance attainment problems*, American Control Conference (ACC).
- Knap M.J., Keel L. H. and Bhattacharyya S. P. (2011) *Robust Hurwitz stability via sign-definite decomposition*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 56, No. 1.
- López M. A., Elizondo C. y Posadas C. (2010) *Control para Estabilidad Robusta Relativa de Sistemas LTI con Incertidumbre Paramétrica*, AMCA2010, Puerto Vallarta, Jalisco, México.
- López M. A., Elizondo C. y Posadas C. (2012) *Cálculo de cotas de los parámetros de un controlador que satisface estabilidad robusta para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica* AMCA 2012, Cd. del Carmen, México.
- B. T. Polyak and J. Kogan. (1995) *Necessary and sufficient conditions for robust stability of linear systems with multi-affine uncertainty structure*. IEEE Transactions on Automatic Control, 40, 1255-1260.
- M. Zettler and J. Garloff. (1998) *Robustness analysis of polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion*. IEEE Transactions on Automatic Control, 43, 425-431.
- Kemin Zhou, John C. Doyle. (1999) *Essentials of Robust Control*, ISBN: 978-0135258330.