

# Sobre la estabilidad de sistemas integrales con retardos

Alejandro Morales-Sánchez y Daniel Melchor-Aguilar

División de Matemáticas Aplicadas, IPICYT, San Luis Potosí, SLP, 78216, México.

alex\_morales@ymail.com, dmelchor@ipicyt.edu.mx.

**Resumen**—Comparamos varias condiciones existentes para la estabilidad exponencial de sistemas integrales con retardos. Las condiciones de estabilidad consideradas se han obtenido mediante técnicas frecuenciales y en el dominio del tiempo y, por lo tanto, tienen diferentes estructuras matemáticas.

**Palabras clave:** sistemas integrales con retardos, estabilidad exponencial.

## I. INTRODUCCIÓN

Existen varios problemas en el análisis de estabilidad de sistemas diferenciales con retardos que involucran la estabilidad de sistemas integrales con retardos. Problemas tales como la estabilidad de las dinámicas adicionales introducidas por transformaciones de sistema (Gu y Niculescu, 2000; Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2000; Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2002; Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2003) la estabilidad de controladores utilizados para la asignación de espectro finito de sistemas con retardo en la entrada (Manitius y Olbrot, 1979), y la estabilidad de algunos operadores en diferencia de ecuaciones diferenciales funcionales de tipo neutro (Hale y Verduyn-Lunel, 1993) son ejemplos donde la estabilidad de sistemas integrales desempeña un papel importante.

Hace algunos años, en el contexto de dinámicas adicionales, (Gu y Niculescu, 2000; Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2000; Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2002) propusieron varias condiciones de estabilidad para sistemas integrales con núcleos constantes. Las condiciones se obtuvieron mediante técnicas de análisis en el dominio de la frecuencia basadas en la función característica asociada al sistema.

Recientemente en (Melchor-Aguilar et al, 2010), se presentaron teoremas generales del tipo Lyapunov para sistemas integrales con retardos. En (Melchor-Aguilar, 2010), basado en las expresiones generales para las funcionales introducidas en (Melchor-Aguilar et al, 2010), se construyeron varias funcionales particulares para la estabilidad de sistemas integrales con retardos. Para el caso general se obtuvo una condición basada en norma mientras que para el caso de sistemas con núcleos constantes y múltiples retardos se presentaron condiciones expresadas como desigualdades matriciales lineales.

Se mostró en (Melchor-Aguilar, 2010) por medio un ejemplo numérico de un sistema con un sólo retardo que las condiciones basadas en norma son más restrictivas que

aquellas basadas en desigualdades matriciales. Teniendo en mente tal ejemplo numérico uno puede preguntarse si esta situación se mantendrá para cualquier sistema integral con un sólo retardo y, más aún, si será éste también el caso para sistemas con múltiples retardos.

En este artículo, considerando la clase de sistemas integrales con núcleos constantes y múltiples retardos como caso de estudio, realizamos una comparación de varias condiciones de estabilidad. Primeramente, revisaremos el caso de sistemas con un sólo retardo. Demostraremos analíticamente que las desigualdades matriciales lineales son menos restrictivas que las condiciones basadas en norma. Después realizaremos un análisis completo del caso de sistemas con dos retardos. En este caso se mostrará que no es posible concluir acerca de la superioridad de alguna de las condiciones de estabilidad con respecto a las otras.

El resto del artículo está organizado en la forma siguiente: La sección II introduce algunos preliminares. En la sección III presentamos las diferentes condiciones para la estabilidad de la clase de sistemas en consideración. Los resultados principales se proporcionan en la sección IV y las conclusiones en la sección V finalizan el artículo.

*Notación:* Se usa la norma Euclideana para vectores y la norma inducida para matrices ambas denotadas por  $\|\cdot\|$ . Denotamos por  $A^T$  a la transpuesta de  $A$ ,  $I$  y  $0$  se usan para las matrices identidad y cero de dimensión  $n \times n$ , mientras que  $\lambda_{\min}(A)$  y  $\lambda_{\max}(A)$  denotan respectivamente los valores propios más pequeño y más grande de una matriz simétrica  $A$ . Para una matriz simétrica, se usa la notación estándar  $Q > 0$  (respectivamente,  $Q < 0$ ) para indicar que  $Q$  es positiva (respectivamente negativa) definida.

## II. PRELIMINARES

Considere la siguiente clase de sistemas integrales con retardos:

$$x(t) = \int_{-h}^0 G(\theta)x(t+\theta)d\theta, \quad (1)$$

donde  $G(\theta)$  es una función matricial con elementos continuos a trozos y acotados definidos para  $\theta \in [-h, 0]$ , donde  $h > 0$ . Sea  $\mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  el espacio de las funciones continuas a trozos mapeando el intervalo  $[-h, 0]$  a  $\mathbb{R}^n$  equipado con la norma de convergencia uniforme  $\|\varphi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$ .

Dada una función inicial  $\varphi \in \mathcal{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  existe una única solución  $x(t, \varphi)$  de (1) definida para todo  $t \in$

$[-h, \infty)$ , satisfaciendo  $x(t, \varphi) = \varphi(t), t \in [-h, 0)$ , véase (Hale y Verduyn-Lunel, 1993).

A lo largo del artículo usaremos el siguiente concepto de estabilidad exponencial.

*Definición 1:* (Hale y Verduyn-Lunel, 1993) El sistema (1) es exponencialmente estable si existen  $\alpha > 0$  y  $\mu > 0$  tales que la desigualdad

$$\|x(t, \varphi)\| \leq \mu e^{-\alpha t} \|\varphi\|_h, \forall t \geq 0,$$

se satisface para cualquier solución  $x(t, \varphi)$  de (1).

Consideremos el caso particular cuando la matriz  $G(\theta)$  tiene elementos continuamente diferenciables a trozos en el intervalo  $[-h, 0]$ , donde se asume que la derivada del lado derecho en  $-h$  y la derivada del lado izquierdo en 0 existen.

En este caso uno podría tratar de derivar la ecuación integral con retardo (1) para obtener una ecuación diferencial e intentar aplicar los resultados clásicos de estabilidad para sistemas diferenciales con retardos.

Diferenciando ambos lados de (1) obtenemos la ecuación diferencial de tipo funcional

$$\dot{y}(t) = G(0)y(t) - G(-h)y(t-h) - \int_{-h}^0 \dot{G}(\theta)y(t+\theta)d\theta. \quad (2)$$

Por substitución directa es fácil comprobar que la función  $y(t) = c, \forall t \in [-h, \infty)$ , donde  $c \in \mathbb{R}^n$  es cualquier vector constante, es solución de (2). Debido a que el vector  $c \in \mathbb{R}^n$  es arbitrario se sigue que el sistema diferencial con retardo (2) admite cualquier vector constante como una solución y, por tanto, no es exponencialmente estable.

Como consecuencias del hecho anterior, en el caso particular cuando la matriz  $G(\theta)$  es diferenciable a trozos, se tiene que la diferenciación de la ecuación integral (1) no es una opción viable para investigar su estabilidad exponencial y así las dinámicas de (1) necesitan estudiarse en su forma integral original.

Finalmente en esta sección hacemos notar que (1) es una clase bastante general de ecuaciones integrales con retardo. Varias clases particulares de sistemas se pueden obtener de (1) considerando núcleos  $G(\theta)$  de formas especiales. Por ejemplo, la clase particular de sistemas integrales con núcleos constantes y múltiples retardos

$$x(t) = \sum_{j=1}^m G_j \int_{-h_j}^0 x(t+\theta)d\theta, \quad (3)$$

donde  $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_m$  y  $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}, j = 1, 2, \dots, m$  se obtiene de (1) para

$$G(\theta) = \sum_{k=j}^m G_k, \theta \in [-h_j, -h_{j-1}), j = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

con  $h_0 = 0, h_m = h$ . Sistemas de la forma descritos por (3) se pueden encontrar en el problema de estabilidad de dinámicas adicionales introducidas por transformaciones de sistema, véase por ejemplo (Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2000).

### III. CONDICIONES DE ESTABILIDAD

En esta sección revisaremos varias condiciones existentes para la estabilidad exponencial de sistemas integrales con retardos. Para el caso más general, se tiene la siguiente condición de estabilidad obtenida mediante el enfoque de Lyapunov.

*Proposición 1:* (Melchor-Aguilar, 2010) El sistema (1) es exponencialmente estable si

$$h \left( \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|G(\theta)\| \right) < 1. \quad (5)$$

Para sistemas integrales de la forma (3) la siguiente condición se obtuvo en (Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2000) usando herramientas en el dominio de la frecuencia basadas en la función característica asociada a (3).

*Proposición 2:* (Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2000) El sistema (3) es exponencialmente estable si

$$\sum_{j=1}^m h_j \|G_j\| < 1. \quad (6)$$

Para el sistema (3) se tienen también las siguientes condiciones de estabilidad expresadas como desigualdades lineales matriciales.

*Proposición 3:* (Melchor-Aguilar, 2010) El sistema (3) es exponencialmente estable si existen matrices positivas definidas  $P, Q_j, j = 1, 2, \dots, m$  tales que

$$Q_j - mh_j G_j^T M G_j > 0, j = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

donde  $M = P + \sum_{j=1}^m h_j Q_j$ .

*Observación 1:* Es importante mencionar que en el caso de sistemas con un sólo retardo o múltiples retardos conmensurables existen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad, véase (Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2000). Éstas condiciones se mantienen únicamente cuando tanto el núcleo como el retardo son constantes. Por otro lado, las condiciones suficientes de las Proposiciones 1,2 y 3 son válidas para múltiples retardos no conmensurables con núcleos y retardos más generales (dependientes del estado y/o del tiempo), véase (Melchor-Aguilar, 2010).

Consideremos un sistema integral de la forma (3) con un sólo término de retardo

$$x(t) = G \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta. \quad (8)$$

Para el sistema (8) las condiciones de estabilidad basadas en norma (5) y (6) son equivalentes con la siguiente desigualdad:

$$h \|G\| < 1. \quad (9)$$

Por otro lado, las condiciones de estabilidad basadas en las desigualdades matriciales (7) toman la forma

$$Q - hG^T [P + hQ]G > 0. \quad (10)$$

En (Melchor-Aguilar, 2010) se mostró que para

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -13 & 2 \end{pmatrix},$$

la desigualdad basada en norma (9) asegura la estabilidad exponencial del sistema si  $0 \leq h < 0.0726$  mientras que utilizando la desigualdad matricial (10) la estabilidad exponencial se garantiza para  $0 \leq h \leq 0.4473$ .

Así, en este ejemplo particular, tenemos que las condiciones de estabilidad basadas en desigualdades matriciales son menos restrictivas que aquellas obtenidas mediante desigualdades basadas en norma.

Para propósitos de comparación, utilizando las condiciones necesarias y suficientes en (Kharitonov y Melchor-Aguilar, 2000) o la metodología basada en el concepto de matriz de Lyapunov para sistemas diferenciales con retardo reportada recientemente en (Ochoa et al, 2013), se obtiene que el intervalo exacto de retardo es  $0 \leq h < 1.0172$ .

#### IV. RESULTADOS PRINCIPALES

En esta sección, motivados por el ejemplo numérico presentado en (Melchor-Aguilar, 2010) y tomando en cuenta la observación 1, comparamos el grado de restricción de las condiciones de estabilidad revisadas en la sección anterior para la clase de sistemas integrales de la forma en (3). Primeramente consideramos el caso de un sólo término integral con retardo. Después, consideramos el caso de dos términos de retardo como un caso de estudio para establecer conclusiones orientadas hacia el caso general más complicado de múltiples términos de retardo.

##### IV-A. Caso $m = 1$

*Lema 1:* Si dadas una matriz  $G$  y retardo  $h$  se tiene que (9) se satisface entonces existen matrices definidas positivas  $P$  y  $Q$  tales que (10) también se satisface.

*Demostración:* Cuando  $G = 0$  o  $h = 0$  la demostración es trivial. Así, podemos asumir que  $G \neq 0$  y  $h > 0$ . Sea  $\delta = h \|G\|^2$ . Si  $h \|G\| < 1$  entonces  $0 < \delta < \frac{1}{h}$ . Sea  $\varepsilon_0 = \frac{1}{\delta} - h > 0$ . Entonces se tiene que  $\delta = \frac{1}{\varepsilon_0 + h}$ . Observando que

$$\varepsilon_0 + h = (\varepsilon_0 + h) \lambda_{\max}(I) = \lambda_{\max}(\varepsilon_0 I + hI),$$

tenemos que

$$\delta = \frac{\lambda_{\min}(I)}{\lambda_{\max}(\varepsilon_0 I + hI)}.$$

Se sigue que la desigualdad

$$\delta < \frac{\lambda_{\min}(T)}{\lambda_{\max}(S + hT)}$$

se satisface para  $T = I$  y  $S = \varepsilon I$ , con  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Para tales matrices  $T$  y  $S$  la desigualdad anterior implica que

$$T - hG^T(S + hT)G > 0$$

se satisface. Concluimos que si  $h \|G\| < 1$  entonces existen matrices positivas definidas  $T = I$  y  $S = \varepsilon I$ , con  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,

tales que la desigualdad (10) se satisface como deseamos demostrar. ■

Poniendo todas las piezas juntas, el Lema 1 y el ejemplo numérico desarrollado en (Melchor-Aguilar, 2010) (revisado al final de la sección 3), concluimos formalmente que en el caso de sistemas integrales con un sólo término de retardo las condiciones de estabilidad basadas en desigualdades matriciales son menos restrictivas que aquellas basadas en norma de matrices.

Desafortunadamente, como veremos en la siguiente subsección, en el caso general de múltiples retardos ( $m > 1$ ) uno no puede tener la misma clase de conclusión.

##### IV-B. Caso $m = 2$

Consideremos el sistema integral con retardos

$$x(t) = G_1 \int_{-h_1}^0 x(t + \theta) d\theta + G_2 \int_{-h_2}^0 x(t + \theta) d\theta, \quad (11)$$

donde  $0 < h_1 \leq h_2$  y  $G_1, G_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . En este caso, las condiciones de estabilidad basadas en norma (5) y (6) no son equivalentes como ocurre en el caso de un sólo término de retardo.

De la condición (6) podemos establecer el siguiente resultado particular de estabilidad para el sistema (11).

*Observación 2:* Dadas matrices  $G_1$  y  $G_2$  de dimensión  $n \times n$ , sean  $a = \|G_1\|$  y  $b = \|G_2\|$ . El sistema (11) es exponencialmente estable si los retardos  $h_1$  y  $h_2$  pertenecen a la región  $\Phi(a, b)$  en el plano  $(h_1, h_2)$ , determinada por

$$\Phi(a, b) = \{(h_1, h_2) : ah_1 + bh_2 < 1 \text{ y } 0 < h_1 \leq h_2\}.$$

Note que  $\Phi(a, b)$  es un triángulo en el plano  $(h_1, h_2)$  con vértices  $O = (0, 0)$ ,  $B = (0, \frac{1}{b})$  y  $C = (\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b})$ , véase la Fig. 1. Los segmentos  $\overline{OB}$  y  $\overline{BC}$  del triángulo no pertenecen a la región  $\Phi(a, b)$  mientras que el segmento  $\overline{OC}$  si pertenece.

Ahora, de la forma particular de la matriz  $G(\theta)$  en (4) tenemos que

$$\left( \sup_{\theta \in [-h_2, 0]} \|G(\theta)\| \right) = \max\{\|G_1 + G_2\|, \|G_2\|\}.$$

De la igualdad anterior y la condición basada en norma (5) uno puede enunciar directamente el siguiente resultado particular de estabilidad para el sistema (11).

*Observación 3:* Dadas matrices  $G_1$  y  $G_2$  de dimensión  $n \times n$ , sea  $c = \max\{\|G_1 + G_2\|, \|G_2\|\}$ . El sistema (11) es exponencialmente estable si los retardos  $h_1$  y  $h_2$  pertenecen a la región  $\Omega(c)$  en el plano  $(h_1, h_2)$  determinada por

$$\Omega(c) = \{(h_1, h_2) : ch_2 < 1 \text{ y } 0 < h_1 \leq h_2\}.$$

La región  $\Omega(c)$  es un triángulo con vértices  $O = (0, 0)$ ,  $E = (0, \frac{1}{c})$  y  $F = (\frac{1}{c}, \frac{1}{c})$ , véase la Fig. 2. Los segmentos  $\overline{OE}$  y  $\overline{EF}$  del triángulo no pertenecen a la región de estabilidad pero el segmento  $\overline{OF}$  si pertenece.

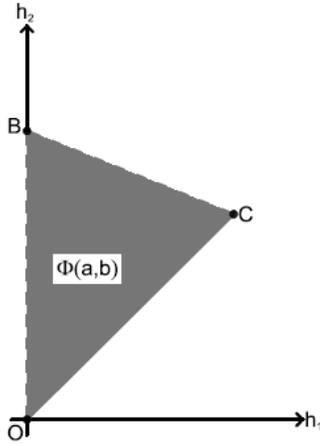


Figura 1. Región de estabilidad  $\Phi(a,b)$

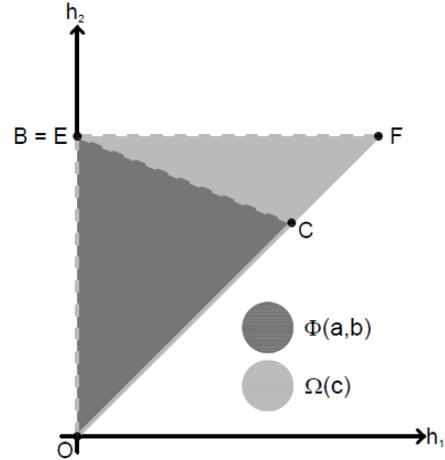


Figura 3. Regiones de estabilidad  $\Phi(a,b)$  y  $\Omega(c)$  en el Caso 1

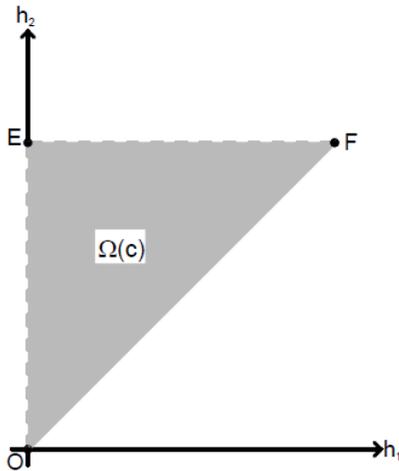


Figura 2. Región de estabilidad  $\Omega(c)$

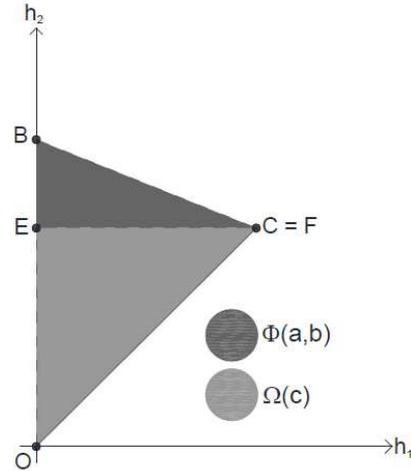


Figura 4. Regiones de estabilidad  $\Phi(a,b)$  y  $\Omega(c)$  en el Caso 2

Obsérvese que el parámetro  $c$  que termina la región  $\Omega(c)$  puede tomar dos valores distintos dependiendo de los valores particulares de  $G_1$  y  $G_2$ . Entonces para realizar una comparación de las regiones  $\Phi(a,b)$  y  $\Omega(c)$  uno necesita considerar los siguientes casos:

*Caso 1:*  $c = \max \{ \|G_1 + G_2\|, \|G_2\| \} = \|G_2\|$ .

En este caso,  $c = b$  y los vértices  $B$  de  $\Phi(a,b)$  y  $E$  de  $\Omega(c)$  coinciden. Más aún, el vértice  $C$  de  $\Phi(a,b)$  se encuentra sobre el segmento  $\overline{OF}$  de la región  $\Omega(c)$ . Por lo tanto, concluimos que  $\Phi(a,b) \subset \Omega(c)$ , véase la Fig. 3.

*Caso 2:*  $c = \max \{ \|G_1 + G_2\|, \|G_2\| \} = \|G_1 + G_2\|$  y  $\|G_1 + G_2\| = \|G_1\| + \|G_2\| = a + b$ .

En este caso, los vértices  $C$  de  $\Phi(a,b)$  y  $F$  de  $\Omega(c)$  coinciden mientras que el vértice  $E$  de  $\Omega(c)$  está sobre el segmento  $\overline{OB}$  de  $\Phi(a,b)$ . Se sigue que  $\Omega(c) \subset \Phi(a,b)$ ,

véase la Fig. 4.

*Caso 3:*  $c = \max \{ \|G_1 + G_2\|, \|G_2\| \} = \|G_1 + G_2\|$  y  $\|G_1 + G_2\| < \|G_1\| + \|G_2\| = a + b$ .

En este caso, el vértice  $C$  de  $\Phi(a,b)$  está sobre el segmento  $\overline{OF}$  de  $\Omega(c)$ , el vértice  $E$  de  $\Omega(c)$  está sobre el segmento  $\overline{OB}$  de  $\Phi(a,b)$  mientras que el segmento  $\overline{BC}$  de  $\Phi(a,b)$  intersecta el segmento  $\overline{EF}$  de  $\Omega(c)$  en el punto  $H = \left( \frac{(c-b)}{ac}, \frac{1}{c} \right)$ . Por lo tanto, tenemos que  $\Omega(c) \not\subset \Phi(a,b)$  y  $\Phi(a,b) \not\subset \Omega(c)$ . Como consecuencia de lo anterior, la región determinada por la unión matemática de  $\Omega(c)$  y  $\Phi(a,b)$  es una nueva región de estabilidad en el espacio de retardos  $(h_1, h_2)$ , véase la Fig. 5.

Ahora consideremos las condiciones de estabilidad determinadas por las desigualdades (7) que en el caso de sistemas de la forma (11) se pueden reescribir como sigue:

*Observación 4:* Sean  $G_1$  y  $G_2$  matrices dadas de dimensión  $n \times n$ . El sistema (11) es exponencialmente estable para

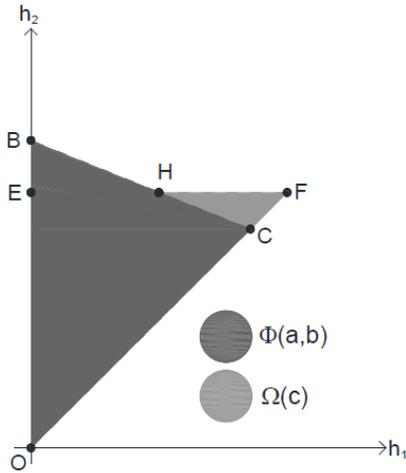


Figura 5. Regiones de estabilidad  $\Phi(a, b)$  y  $\Omega(c)$  en el Caso 3

un par  $(h_1, h_2)$  si existen matrices positivas definidas  $P, Q_1$  y  $Q_2$  tales que las siguientes desigualdades se satisfacen:

$$\begin{cases} Q_1 - 2h_1 G_1^T (P + h_1 Q_1 + h_2 Q_2) G_1 > 0, \\ Q_2 - 2h_2 G_2^T (P + h_1 Q_1 + h_2 Q_2) G_2 > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Notemos que no es posible determinar analíticamente una región de estabilidad en el espacio de retardos  $(h_1, h_2)$  mediante las desigualdades matriciales (12). Sin embargo, podemos proponer un algoritmo numérico para determinar parejas  $(h_1, h_2)$  tales que las desigualdades (12) se satisfacen. Brevemente, el algoritmo se puede describir como sigue: Primeramente escogemos  $h_1 = h_2 = \varepsilon > 0$ , donde  $\varepsilon$  es un valor real cerca de cero y verificamos si para estos valores de retardos las desigualdades (12) se cumplen en cuyo caso fijamos  $h_1 = \varepsilon$  e incrementamos  $h_2$  (en múltiplos de  $\varepsilon$ ) hasta encontrar el máximo  $h_2$  tal que las desigualdades (12) son satisfechas. A continuación incrementamos  $h_1$  (en múltiplos de  $\varepsilon$ ), igualamos  $h_1 = h_2$  y repetimos el procedimiento anterior hasta encontrar nuevamente el valor máximo de  $h_2$  tal que las desigualdades (12) se satisfacen.

Denotemos como  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$  a la región de estabilidad en el espacio de retardos  $(h_1, h_2)$  determinada por el algoritmo numérico mencionado anteriormente. En este contexto, únicamente podemos realizar una comparación de tipo numérico entre las regiones  $\Phi(a, b)$ ,  $\Omega(c)$  y  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$ . Así, consideraremos tres ejemplos numéricos correspondientes a cada uno de los tres casos distintos estudiados anteriormente para comparar analíticamente las regiones  $\Phi(a, b)$  y  $\Omega(c)$ .

*Ejemplo 1:* Considere las siguientes matrices para (11):

$$G_1 = \begin{pmatrix} -11 & 8 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } G_2 = \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Las normas inducidas son  $\|G_1\| = 13.749$ ,  $\|G_2\| = 14.16741$  y  $\|G_1 + G_2\| = 1.41421$ . Por tanto, tenemos que  $c = \max\{\|G_2\|, \|G_1 + G_2\|\} = \|G_2\|$  y en consecuencia nos encontramos en el Caso 1 para el cual sabemos que

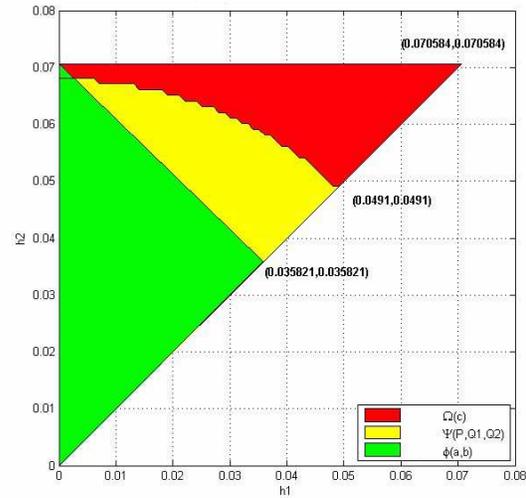


Figura 6. Regiones de estabilidad  $\Phi(a, b)$ ,  $\Omega(c)$  y  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$  para el ejemplo 1

$\Phi(a, b) \subset \Omega(c)$ . Calculamos numéricamente la correspondiente región de estabilidad  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$  y la presentamos junto con las regiones  $\Phi(a, b)$  y  $\Omega(c)$  en la Fig. 6 donde observamos que  $\Psi(P, Q_1, Q_2) \subset \Omega(c)$  y prácticamente  $\Phi(a, b) \subset \Psi(P, Q_1, Q_2)$ .

Así, en este caso particular, tenemos que las desigualdades matriciales (12) son menos restrictivas que la condición basada en norma (6) pero más restrictivas que la condición basada en norma (5).

*Ejemplo 2:* Ahora consideremos el sistema (11) pero con matrices de sistema

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las normas inducidas son  $\|G_1\| = 1$ ,  $\|G_2\| = 1$  y  $\|G_1 + G_2\| = 2$ . Entonces  $c = \max\{\|G_2\|, \|G_1 + G_2\|\} = \|G_1 + G_2\|$  y  $\|G_1 + G_2\| = \|G_1\| + \|G_2\| = a + b$ . Por tanto, nos encontramos en el Caso 2 para el cual se tiene  $\Omega(c) \subset \Phi(a, b)$ . En la Fig. 7 presentamos las regiones correspondientes  $\Phi(a, b)$ ,  $\Omega(c)$  y  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$  obtenidas numéricamente. Se observa que  $\Omega(c) \subset \Psi(P, Q_1, Q_2) \subset \Phi(a, b)$ .

Así, resulta que en este caso particular las desigualdades matriciales (12) son menos restrictivas que la desigualdad (5) pero más restrictivas que la desigualdad basada en norma (6).

*Ejemplo 3:* Finalmente presentaremos un ejemplo numérico correspondiente al Caso 3. Así, consideremos las siguientes matrices de sistema:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las normas inducidas son  $\|G_1\| = 8.084$ ,  $\|G_2\| = 4.4966$  y  $\|G_1 + G_2\| = 12$ . Se sigue que  $c =$

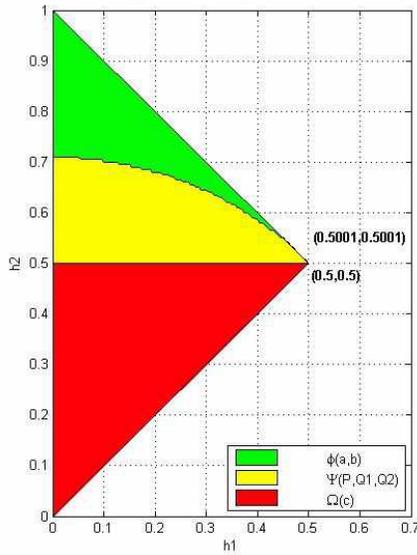


Figura 7. Regiones de estabilidad  $\Phi(a, b)$ ,  $\Omega(c)$  y  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$  para el ejemplo 2.

máx  $\{\|G_2\|, \|G_1 + G_2\|\} = \|G_1 + G_2\| < \|G_1\| + \|G_2\| = a + b$  y, por tanto, nos encontramos en el Caso 3 para el cual sabemos que  $\Phi(a, b) \cup \Omega(c)$  es una nueva región de estabilidad. Para estos valores numéricos, las correspondientes regiones de estabilidad  $\Phi(a, b)$ ,  $\Omega(c)$  y  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$  se muestran en la Fig. 8 donde se observa que  $\Phi(a, b) \cup \Omega(c) \subset \Psi(P, Q_1, Q_2)$ . Así, en este ejemplo particular, tenemos que las desigualdades matriciales proporcionan mejores resultados que las otras dos desigualdades basadas en normas (5) y (6).

## V. CONCLUSIONES

En este artículo realizamos una comparación de varias condiciones existentes para la estabilidad de sistemas integrales con núcleos constantes y múltiples retardos. Para el caso de sistemas con un sólo retardo, se demuestra analíticamente que las condiciones de estabilidad obtenidas mediante el método de funcionales de Lyapunov-Krasovskii, y expresadas en términos de desigualdades lineales matriciales, son menos restrictivas que aquellas basadas en normas de matrices.

Para el caso de sistemas con dos retardos, la comparación se realiza describiendo las regiones de estabilidad en el espacio de los parámetros de retardos para cada una de las condiciones de estabilidad. Se muestra que existen escenarios donde, por ejemplo, una de las condiciones de estabilidad proporciona mejores resultados que las otras, pero, sin embargo, existen también situaciones donde la mejor condición resulta ser ahora la peor de las condiciones de estabilidad.

Con base en estos resultados podemos concluir que en el caso general de sistemas integrales con múltiples retardos

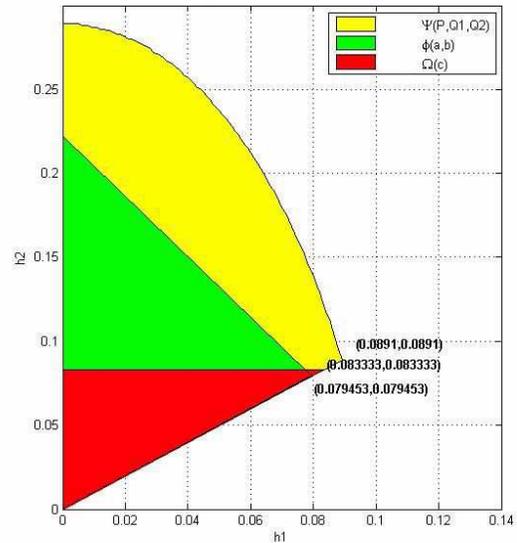


Figura 8. Regiones de estabilidad  $\Phi(a, b)$ ,  $\Omega(c)$  y  $\Psi(P, Q_1, Q_2)$  para el ejemplo 3.

no conmensurables las condiciones existentes de estabilidad son complementarias en el sentido que la unión matemática de las correspondientes regiones de estabilidad en el espacio de los parámetros de retardos forman una nueva región de estabilidad para el sistema. Como una consecuencia, la presente contribución muestra que aún queda bastante espacio para desarrollar nuevas condiciones de estabilidad para sistemas integrales con retardos.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está financiado por el proyecto CONACYT 131587.

## REFERENCIAS

- K. Gu, S.-I. Niculescu, Additional Dynamics in Transformed Time-Delay Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 45, 572- 575, 2000.
- J. Hale, S.M. Verduyn-Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- V. Kharitonov, D. Melchor-Aguilar, On delay-dependent stability conditions, *Syst. Control Lett.*, 40, 71-76, 2000.
- V. Kharitonov, D. Melchor-Aguilar, On delay-dependent stability conditions for time-varying systems, *Syst. Control Lett.*, 46, 173-180, 2002.
- V. Kharitonov, D. Melchor-Aguilar, Additional dynamics for general linear time-delay systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 48, 1060-1064, 2003.
- A.Z. Manitus, A.W. Olbrot, Finite spectrum assignment problem for systems with delays, *IEEE Trans. Automat. Control*, 24, 541-553 1979.
- D. Melchor-Aguilar, V. Kharitonov, R. Lozano, Stability conditions for integral delay systems, *Int. J. Robust. Nonlinear Control*, 20, 1-15, 2010.
- D. Melchor-Aguilar, On stability of integral delay systems, *Appl. Math. and Comput.*, 217, 3578-3584, 2010.
- G. Ochoa, V. Kharitonov, S. Mondié, Critical frequencies and parameters for linear delay systems: a Lyapunov matrix approach, *Syst. Control Lett.*, 62 (9), 781-790, 2013.