

# Estabilización vía Modos Deslizantes con Control Positivo

Horacio Leyva<sup>a</sup>, Francisco A. Carrillo<sup>a</sup>, Griselda Quiroz<sup>b</sup>, Ricardo Femat<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Universidad de Sonora, Rosales and Transversal,  
Hermosillo, Sonora, México.

<sup>b</sup>Universidad Autónoma de Nuevo León, UANL, FIME, Av. Universidad S/N Ciudad Universitaria,  
San Nicolás de los Garza Nuevo León, C.P. 66451 México.

<sup>c</sup>Division de Matemáticas Aplicadas, IPICYT,  
Camino a la Presa San José 2055, Col. Lomas 4a sección C.P. 78216  
San Luis Potosí, S.L.P., México.

**Resumen**—En este trabajo presentamos una metodología que permite mejorar la tasa de estabilización de una familia de sistemas positivos. Damos condiciones suficientes para lograr la estabilización mediante la teoría de modos deslizantes. Ejemplificamos el método con un sistema definido en el plano y presentamos resultados que muestran la viabilidad del método para una familia de sistemas compartimentales.

**Palabras clave:** Sistemas Positivos, Sistemas Compartimentales, Modos Deslizantes.

## I. INTRODUCCIÓN

Muchos modelos económicos, físicos, biológicos, etc., involucran cantidades que se representan mediante variables positivas. Por ejemplo la concentración de sustancias, el nivel de líquidos en tanques, la biomasa de una población, etc. Estos ejemplos pertenecen a la clase de sistemas positivos, donde las variables de estado y las condiciones iniciales son no negativas (Rami y Tadeo, 2007). En tales sistemas también pueden considerarse controles positivos, por ejemplo en reactores y bioprocesos la acción de control está relacionada a caudales cuyo valor es estrictamente positivo. En este trabajo consideramos una familia de sistemas que satisfacen las hipótesis de la teoría de estabilidad para sistemas positivos, tales como los teoremas de Frobenius-Perron para matrices Metzler y el teorema de Gerschgorin aplicado a matrices compartimentales.

Consideremos el sistema lineal positivo con control positivo

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}_+^n$  y  $u \in [r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$ . Bajo tales condiciones de positividad para (1), presentamos un conjunto de resultados, en el ámbito de la teoría de modos deslizantes, que permiten la existencia de una dinámica deslizante sobre un (segmento de) hiperplano de dimensión  $n - 1$ , contenido en el cono  $\mathbb{R}_+^n$ . Mediante esta dinámica deslizante podemos estabilizar rápidamente el sistema positivo (1). En dimensión

$n$ , presentamos los resultados que muestran la viabilidad del método. En el plano, para  $n = 2$ , demostramos la rapidez de estabilización mediante la optimización del valor propio  $\lambda_d$  que representa la dinámica deslizante sobre la recta.

## II. PRELIMINARES

### II-A. Sistemas Positivos

Considere el sistema lineal homogéneo en tiempo continuo

$$\dot{x} = Ax, \quad (2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . A continuación se darán una serie de definiciones de conceptos con los que trabajaremos en esta y las siguientes secciones.

**Definición 1:** El sistema (2) es positivo si para cada  $x(t_0) = x_0 \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $t \geq 0$ , sucede que la solución correspondiente  $x(t; t_0; x_0) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  para toda  $t \geq t_0$ .

**Definición 2:** La matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Metzler si  $a_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$ .

Es conocido que el sistema (2) es positivo si y sólo si  $A$  es Metzler. A este tipo de sistemas se les denomina positivos porque el cono positivo  $\mathbb{R}_+^n$  es un conjunto invariante, ver (Bellman, 1970).

**Definición 3:** La matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.

**II-A.1. El Teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler:**

**Teorema 1:** Sea  $A$  una matriz Metzler. Entonces, existen un número real  $\mu_0$  y un vector  $x_0 \geq 0$  tales que se cumple lo siguiente:

- i)  $Ax_0 = \mu_0 x_0$ , y
- ii) Si  $\mu \neq \mu_0$  es cualquier otro valor propio de la matriz  $A$ , entonces  $\text{Re}(\mu) < \mu_0$ .

Existen resultados para las matrices Metzler que establecen que para cualquier matriz Metzler  $A$ , su inversa  $-A^{-1}$  existe y es positiva, si y sólo si, todos sus valores propios

están dentro del semiplano complejo izquierdo (valores propios con parte real estrictamente negativa), i.e, matrices Metzler que son a su vez Hurwitz. El siguiente teorema asegura que la estabilización de la dinámica controlada ocurra en  $\mathbb{R}_+^n$ .

*Teorema 2:* Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz Metzler. La inversa  $-A^{-1}$  existe y es positiva si, y sólo si,  $A$  es Hurwitz (i.e.,  $\mu_0 < 0$ ).

La prueba de los teoremas 1 y 2 pueden verse en (Bellman, 1970) y (Berman, Neumann y Stern, 1989).

## II-B. Modos Deslizantes

Consideremos el sistema (1), con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriz Metzler y Hurwitz,  $b \in \mathbb{R}_+^n$  y  $r_2 > r_1 \geq 0$ . Tales condiciones representan *condiciones de positividad*: el sistema lineal (1) es positivo si y sólo si la matriz  $A$  es Metzler y  $b \geq 0$ ,  $u \geq 0$ , ver (Farina y Rinaldi, 2000).

*II-B.1. Problema de estabilización:* Si  $A$  es Metzler y Hurwitz en el sistema (1) tenemos que el punto de equilibrio positivo  $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$  (con  $\bar{u} \in [r_1, r_2]$  constante) es global asintóticamente estable. Planteamos la pregunta:

¿Es posible incrementar la tasa de estabilización en  $\bar{x}$  al considerar  $u \in [r_1, r_2]$  en lugar de  $u = \bar{u}$ ?

Para responder la pregunta anterior debemos considerar que el sistema (1) no es controlable; de acuerdo al teorema de controlabilidad de Brammer, ver el trabajo (Brammer, 1972). Si  $A$  tiene al menos un valor propio real, entonces el sistema (1) no es completamente controlable con control positivo. A continuación presentamos un método deslizante para responder al problema de estabilización rápida.

*II-B.2. Resultados sobre sistemas deslizantes:* Consideremos el sistema (1), donde la matriz  $A$  es como en la definición 2, el control  $u \in [r_1, r_2]$ ,  $r_2 > r_1 \geq 0$ , con  $b \in \mathbb{R}_+^n$ .

Como referencia en el espacio de estado, consideremos los puntos de equilibrio positivos

$$\bar{x}_1 = -A^{-1}br_1 \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = -A^{-1}br_2$$

tal que  $\|\bar{x}_1\| < \|\bar{x}_2\|$ .

La hipótesis de que  $A$  es Hurwitz, implica que cada punto de equilibrio  $\bar{x}_i$  es globalmente atractor para las soluciones del sistema retroalimentado  $\dot{x} = Ax + br_i$ ,  $i = 1, 2$ . Con el objetivo de describir el deslizamiento, consideramos un vector constante  $L \in \mathbb{R}_+^n$  y un escalar constante  $k > 0$ , de manera que el segmento de hiperplano contenido en  $\mathbb{R}_+^n$ , representado por la igualdad

$$Lx = k \quad (3)$$

donde  $L$  y  $k$  representan parámetros por determinar, de manera que: 1) el deslizamiento tiene un valor propio  $\lambda_d$  más a la izquierda que los valores propios de  $A$  en el plano; 2) se cumple la condición de deslizamiento, expresada con

el par de desigualdades:

$$\lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^+} L(Ax + br_1) < 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (4)$$

$$\lim_{(Lx-k) \rightarrow 0^-} L(Ax + br_2) > 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Para determinar la magnitud de  $k$ , consideremos el segmento de recta que une a los puntos de equilibrio

$$x = \lambda \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bar{x}_2, \quad \text{para } \lambda \in (0, 1)$$

elegimos  $k$  de forma que el hiperplano, representado por  $Lx - k = 0$ , pase por un punto de equilibrio predeterminado  $\bar{x}$ , una forma de obtener éste es eligiendo  $\lambda = \frac{1}{2}$ ;

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \bar{x}_1 + \frac{1}{2} \bar{x}_2$$

por consiguiente

$$k = L\bar{x} \quad (5)$$

Con las desigualdades (4) y, los valores de los parámetros  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\bar{x}$ ,  $k$  y  $L$ , es conocido que mediante la aplicación del control discontinuo

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \quad (6)$$

tendremos que cualquier solución  $x(t)$  que inicia fuera del hiperplano  $Lx = k$ , alcanza al hiperplano en tiempo finito. Es conocido que la aplicación del control discontinuo (6), que toma valores en los extremos del intervalo de restricción  $[r_1, r_2]$ , minimiza el tiempo de llegada al hiperplano  $Lx = k$ , ver (Leyva y Solis-Daun, 2009), ya que al considerar la función de Lyapunov  $V = \frac{1}{2}(Lx - k)^2$ , tenemos que el control (6) es la solución al siguiente problema de optimización

$$\min_{u \in [r_1, r_2]} \frac{dV}{dt} = \min_{u \in [r_1, r_2]} \{(Lx - k)L(Ax + bu)\}.$$

Una vez cumplidas las desigualdades (4), se origina una dinámica invariante sobre el hiperplano  $Lx = k$ , podemos decir que está dinámica corresponde a la aplicación del llamado control equivalente, denotado por  $u_{eq}$  y definido para  $x$  tales que  $Lx = k$ , de manera que lo podemos calcular de la igualdad  $L\dot{x} = 0$ . Es decir,

$$L(Ax + bu_{eq}) = 0,$$

por consiguiente

$$u_{eq} = -\frac{L Ax}{L b}.$$

Con este resultado tenemos definido el control globalmente estabilizante para toda  $x \in \mathbb{R}_+^n$ :

$$u = \begin{cases} r_1 & \text{si } Lx - k > 0 \\ -\frac{L Ax}{L b} & \text{si } Lx - k = 0 \\ r_2 & \text{si } Lx - k < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Tenemos el sistema realimentado (1)-(7).

### III. EXISTENCIA Y DISEÑO DE UNA FAMILIA DE HIPERPLANOS DESLIZANTES

Consideremos la matriz Metzler  $A$  dada en (1) con entradas  $a_{ij} \geq 0$  para  $i \neq j$  y el vector  $L = (l_1, \dots, l_n)$ . Tal que el término  $LAx$  nos queda

$$LAx = -\langle p, x \rangle < 0 \quad \text{para } p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$$

con  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$  donde  $p_i = \sum_{k=1}^n l_k a_{ki}$  que escribimos matricialmente como

$$A^T L^T = -p$$

por consiguiente

$$L^T = (-A^{-1})^T p \in \mathbb{R}_+^n; \quad \text{ya que } A \text{ es Metzler y Hurwitz.}$$

Es decir, para cada  $p \in \mathbb{R}_+^n$  tenemos un vector  $L = -p^T A^{-1} \in \mathbb{R}_+^n$ , tal que  $u_{\text{eq}} = -\frac{LAx}{Lb} > 0$ , entonces

$$u_{\text{eq}} = \frac{p^T x}{p^T (-A^{-1})b} > 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}_+^n.$$

Observamos que la matriz  $A_{\text{eq}} = A + b \left( \frac{p^T}{p^T (-A^{-1})b} \right)$  es Metzler, ya que es la suma de una matriz Metzler y una matriz con entradas no negativas.

Consideremos el sistema de control positivo y el plano  $S = \{x \in \mathbb{R}_+^n / Lx = k\}$ .

*Proposición 1:* Si  $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ , entonces existe un deslizamiento sobre todo el hiperplano  $S = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Lx - k = 0\}$ .

*Demostración:* La condición  $p \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  implica que  $u_{\text{eq}}(x) > 0$  para  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . De acuerdo al Teorema 1 (pag. 1363) en (Sira-Ramírez, 1988), al considerar  $r_2 > 0$  suficientemente grande ( $0 < u_{\text{eq}} < r_2$ ) tenemos que existe un deslizamiento sobre el hiperplano  $S$ . ■

*Lema 1:*  $\det A_{\text{eq}} = 0$ .

*Demostración:* Basta con probar que  $b \in \ker \left( I - b \frac{L}{Lb} \right)$ , ya que

$$\left( I - b \frac{L}{Lb} \right) b = b - b \frac{L}{Lb} b = 0$$

concluimos que  $\det A_{\text{eq}} = 0$ . ■

La interpretación del lema 1 consiste en que la dinámica  $n$ -dimensional de  $\dot{x} = Ax$  se restringe, mediante el control equivalente, a la dinámica  $(n-1)$ -dimensional definida en el hiperplano  $S$  y representada por  $\dot{x} = A_{\text{eq}}x$ .

En particular, por ser  $A$  matriz Hurwitz tenemos que  $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$  es punto de equilibrio de  $\dot{x} = Ax + bu_{\text{eq}}$ , ya que al sustituir en la última igualdad obtenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{\text{eq}}\bar{x} \\ &= A\bar{x} + b \left( -\frac{LA\bar{x}}{Lb} \right) \\ &= A(-A^{-1}b\bar{u}) + b \left( -\frac{LA(-A^{-1}b\bar{u})}{Lb} \right) \\ &= -b\bar{u} + b \left( -\frac{L(-b\bar{u})}{Lb} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hemos probado que  $\lambda = 0$  es valor propio de la matriz  $A_{\text{eq}} = A + b \left( \frac{p^T}{p^T (-A^{-1})b} \right)$ ; además es Metzler por ser la suma de una matriz Metzler y una matriz con entradas no negativas.

Por otro lado, tenemos que si  $x^* \in \text{Ker} \left( I - b \frac{L}{Lb} \right)$ , entonces  $x^* = \frac{1}{Lb} b L x^*$ . Por lo tanto,  $x^* \in \text{Im}(b)$ , implicando que  $\lambda = 0$  es el valor propio correspondiente al vector propio  $x^*$ . En cada una de las aplicaciones expuestas más adelante, mostramos que  $\lambda = 0$  es el valor propio dominante de  $A_{\text{eq}}$ , y de acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, esto implica que la dinámica del sistema  $\dot{x} = A_{\text{eq}}x$  tiene al estado  $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$  como único punto de equilibrio sobre el hiperplano  $Lx = k$ .

De las desigualdades (4), es fácil ver que para  $x$  tal que  $s(x) = 0$ , se cumple que

$$L(Ax + br_1) < 0 < L(Ax + br_2)$$

como  $Lb > 0$ , tenemos que

$$Lbr_1 < -LAx < Lbr_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 < \frac{-LAx}{Lb} < r_2$$

concluimos que  $u_{\text{eq}} \in [r_1, r_2]$ . En particular, se cumple que

$$\begin{aligned} u_{\text{eq}}(\bar{x}) &= -\frac{1}{Lb} LA\bar{x} = -\frac{1}{Lb} LA(-A^{-1}b\bar{u}) \\ &= -\frac{1}{Lb} L(-b\bar{u}) = \bar{u}. \end{aligned}$$

### IV. APLICACIÓN AL MODELO DE MEZCLAS EN $n$ TANQUES

*Definición 4:* La matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es compartimental si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- $A$  es Metzler,
- $\sum_i a_{ij} \leq 0$  para cada columna  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Tenemos que el sistema lineal (1) es de compartimiento si se cumple que  $A$  es compartimental,  $b \geq 0$  y  $u \geq 0$ .

Consideremos una línea de  $n$  tanques conectados cada uno con su antecesor y su sucesor, es decir para el  $i$ -ésimo tanque, éste recibirá dos flujos  $f_{2i-1}$  y  $f_{2i}$ , y a su vez dará dos flujos  $f_{2i-2}$  y  $f_{2i+1}$  del y para el  $(i-1)$ -ésimo e  $(i+1)$ -ésimo tanque respectivamente, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , ver figura 1. Es claro, que el tanque 1, recibirá un flujo  $f_1$  con cierta concentración  $u$ , mientras que el tanque  $n$

desfogará al exterior un flujo  $f_{2n}$ . Tal configuración, nos lleva a un sistema del tipo (1). Donde

$$A = \begin{pmatrix} -f_3 & f_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & -a_{22} & f_4 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & f_{2i-1} & -a_{ii} & f_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & f_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{2n-1} & -a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

con  $a_{22} = f_2 + f_5$ ,  $a_{ii} = f_{2i-2} + f_{2i+1}$  y  $a_{nn} = f_{2n-2} + f_{2n+1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $b = (1, 0, \dots, 0)^T$ . Como el volumen en cada tanque se considera constante, deberán cumplirse las ecuaciones

$$f_{2i-1} + f_{2i} = f_{2i-2} + f_{2i+1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

*Proposición 2:* Existe una dinámica deslizante para el sistema (1) con matriz  $A$  dada por (8).

*Demostración:* Dado que la matriz  $A$  es compartimental, se sigue del teorema de Gerschgorin (ver (Leenheer y Aeyels, 2001) y (Bellman, 1970)) que  $\sigma(A) \cap \mathbb{C}^+ = \emptyset$ , donde  $\sigma(A)$  es el espectro de  $A$ , y  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$ . Es fácil probar que  $\det(A) = (-1)^n \prod_{i=1}^n f_{2i+1}$ , de (9) tenemos que  $f_{2i+1} \neq 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$ , entonces  $\det(A) \neq 0$ . Por el teorema 1, existe  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ , tal que para todo valor propio  $\lambda_i$  de  $A$  con  $i = 1, \dots, n$  se satisface que  $\text{Re}(\lambda_i) < \mu_0 < 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , esto implica que  $A$  es matriz Hurwitz. Por lo anterior, de acuerdo a la Proposición 1, existe un deslizamiento sobre el plano  $S = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Lx = k\}$  para el sistema positivo definido por  $A$ . ■

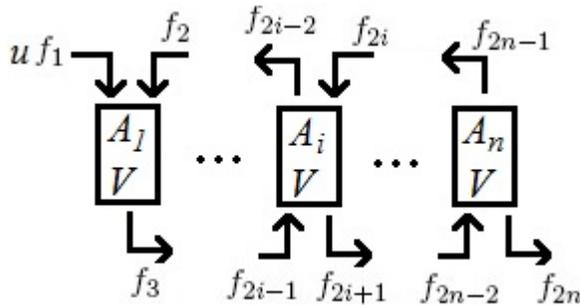


Figura 1. En esta configuración de tanques, se considera el volumen  $V$  constante.

#### IV-A. El caso de mezcla con dos tanques

En esta parte analizamos el caso  $n = 2$  (dos tanques), de la sección anterior. La descripción del problema es el siguiente:

Dos tanques,  $A$  y  $B$ , contienen  $V_1$  y  $V_2$  litros de salmuera y en los cuales se disolvieron inicialmente  $a$  y  $b$  libras de sal respectivamente. Ambos tanques están conectados, habiéndolo un flujo  $f_2$  de salmuera del tanque  $A$  al  $B$  y un

flujo  $f_3$  del tanque  $B$  al  $A$ . Además, del exterior hay un flujo  $f_1$  con  $u$  libras de sal por litro hacia el tanque  $A$ , y del tanque  $B$  hay un flujo  $f_4$  hacia el exterior. Deseamos determinar la cantidad de sal presente en cada tanque en el instante  $t$ .

Denotando por  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  las cantidades de sal presentes al instante  $t$  en los tanques  $A$  y  $B$  respectivamente, el modelo matemático matricial es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2}{V_1} & \frac{f_3}{V_2} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad (10)$$

con condiciones iniciales  $x_1(0) = a$  y  $x_2(0) = b$ , de manera que el objetivo es estabilizar rápidamente las concentraciones  $\frac{x_i}{V_i}$  de cada uno de los tanques. Si queremos que  $V_i$  sea constante para  $i = 1, 2$ , entonces

$$f_2 = f_3 + f_4 \quad \text{y} \quad f_1 = f_4. \quad (11)$$

donde la matriz de coeficientes  $A$  es Metzler, cuyos valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f_2(V_1 + V_2) \pm \sqrt{D}}{2V_1V_2}, \quad (12)$$

donde  $D = f_2^2(V_2 - V_1)^2 + V_1V_2f_3f_2$ . De (11) tenemos que  $f_3 < f_2$ , de modo que la expresión

$$\begin{aligned} D &< f_2^2(V_2 - V_1)^2 + V_1V_2f_2^2 \\ &= f_2^2(V_1 + V_2)^2 \end{aligned}$$

por consiguiente  $-f_2(V_1 + V_2) + \sqrt{D} < 0$ , esto es que  $A$  es matriz Hurwitz. De acuerdo al teorema de Frobenius-Perron para matrices Metzler, tenemos que el punto de equilibrio  $\bar{x}$  es positivo y asintóticamente estable, i.e.,

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u} = \bar{u} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Entonces,  $u$  es quien determina la cantidad de sal en cada tanque. La dinámica es sencilla, al aplicar un control constante  $\bar{u}$ , cualquier solución que inicie en  $\mathbb{R}^2$  tiende asintóticamente al punto de equilibrio  $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$ . Enseguida se probará que se puede estabilizar más rápido al considerar un control de la forma  $u \in [r_1, r_2]$  en lugar de  $u = \bar{u}$ . Con

$$0 \leq r_1 < \bar{u} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) < r_2.$$

Sea  $L = (l_1, l_2)$ , con  $l_i > 0$ , denotemos a  $s(x) = Lx - k$ , entonces  $s(x) = l_1x_1 + l_2x_2 - k = 0$ , tal que para  $Lx = k$  tenemos  $L\dot{x} = 0$  y

$$k = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)(l_1V_1 + l_2V_2),$$

de forma que la recta  $s(x) = 0$  pasa por el punto medio de

$$\bar{x}_1 = r_1 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = r_2 \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Si consideramos el control discontinuo

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } s(x) > 0 \\ r_2 & \text{si } s(x) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Al diseñar una recta deslizante para el sistema (10)-(15), que debe pasar por el punto de equilibrio  $\bar{x}$ , debemos encontrar la pendiente óptima de dicha recta, de tal manera que la estabilización a dicho punto fijo sea la más rápida posible, para lo cual debemos minimizar el valor propio  $\lambda_d$  de  $A_{eq}$ . Así, el incremento en la rapidez de estabilización se puede lograr.

De este modo, posible minimizar  $\lambda_d$  cambiando la pendiente de la recta deslizante. A partir de (4), debemos tener que  $LAx < 0$  para toda  $x \in \mathbb{R}_+^n$ ,

$$LAx = -x_1 \frac{f_2 l_1 - f_2 l_2}{V_1} - x_2 \frac{f_2 l_2 - f_3 l_1}{V_2},$$

lo cual implica que

$$f_2(l_1 - l_2) \geq 0 \quad \text{y} \quad f_2 l_2 - f_3 l_1 > 0,$$

y esto se resume en

$$\frac{f_3}{f_2} < \frac{l_2}{l_1} \leq 1. \quad (16)$$

Sabemos que  $Lb = f_1 l_1$ , entonces,

$$u_{eq} = \frac{-x_1 \frac{f_2 l_1 - f_2 l_2}{V_1} - x_2 \frac{f_2 l_2 - f_3 l_1}{V_2}}{f_1 l_1},$$

así que la dinámica deslizante dada por  $\dot{x} = Ax + bu_{eq}$ , toma la forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V_1 l_1} & \frac{f_2 l_2}{V_2 l_1} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_{eq} x, \quad (17)$$

y  $A_{eq}$  tiene valores propios  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -\frac{f_2}{V_1 V_2 l_1} (V_1 l_1 + V_2 l_2)$ , por lo que el valor propio  $\lambda_d$  del modo deslizante es

$$\lambda_d = -\frac{f_2}{V_1 V_2 l_1} (V_1 l_1 + V_2 l_2),$$

donde  $\lambda_d$  está en función de la pendiente  $\frac{l_2}{l_1}$ . De la desigualdad (16), si suponemos que  $l_1 = l_2$  estaremos maximizando la pendiente  $\lambda_d$  de tal manera que el deslizamiento sea el óptimo, es decir, tenemos que

$$\lambda_d < \lambda_2 = \frac{-f_2(V_1 + V_2) - \sqrt{D}}{2V_1 V_2},$$

ya que  $f_3 < f_2$  y concluimos que  $\lambda_d < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

*Observación 1:* La desigualdad  $\lambda_d < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , implica que existe una vecindad  $S_\varepsilon$  de la superficie deslizante  $S$ , con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, tal que cualquier solución  $x(t, x_0)$  que inicie en  $S_\varepsilon$ , tiende más rápido al punto  $\bar{x}$  mediante la acción de  $u$  dada por (7), que bajo la acción del control constante  $\bar{u}$ .

Además, si  $l_1 = l_2$ , de (4) se tiene que  $r_1 < \frac{x_1}{V_1} < r_2$ , con  $u_{eq} = -\frac{LAx}{Lb} = r_2 - \frac{x_1}{V_1}$  y  $\lambda_d = -\frac{2f_2}{V_1}$ , es decir, en todo el segmento de recta  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid s(x_1, x_2) = 0\}$  existe un deslizamiento. Haciendo  $k = \frac{1}{2}L(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ , entonces

$$k = \frac{1}{2}L(-A^{-1}br_1 - A^{-1}br_2) = V_1 l_1 (r_1 + r_2).$$

Observamos que si  $r_1 = 0$ , entonces todo el segmento de recta  $x_1 + x_2 = V_1 r_2$  en  $\mathbb{R}_+^2$  es deslizante. Tomando  $l_1 = l_2$  y  $V_1 = V_2$  en (17), la dinámica deslizante es representada en términos de  $x_1$  o  $x_2$ , por una de las dos ecuaciones

$$\dot{x}_i = -\frac{f_2}{V_1} (2x_i - V_1(r_1 + r_2)), \quad \text{para } i = 1 \text{ ó } i = 2, \quad (18)$$

el punto de equilibrio  $\bar{x}_i = \frac{1}{2}V_1(r_1 + r_2)$ , es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{1}{2}V_1(r_1 + r_2)$ , este punto de equilibrio es el punto medio del segmento de deslizamiento. Para el sistema (10), si  $l_1 = l_2$  y  $V_1 = V_2$ , tenemos que

$$u(x) = \begin{cases} r_1 & \text{si } x_1 + x_2 > V_1 l_1 (r_1 + r_2) \\ u_{eq} & \text{si } x_1 + x_2 = V_1 l_1 (r_1 + r_2) \\ r_2 & \text{si } x_1 + x_2 < V_1 l_1 (r_1 + r_2). \end{cases} \quad (19)$$

#### IV-B. Ejemplo numérico

Asignando al sistema (10) los valores  $V_1 = V_2 = 10$ ,  $f_1 = f_4 = 1$ ,  $f_2 = 3$ ,  $f_3 = 2$  y  $u \in [0, 4]$ , tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

De (14), tenemos que

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Como  $\bar{u} = 2$ , se tiene que  $\bar{x} = (20, 20)^T$ , con  $l_1 = l_2 = 1$  y  $k = V_1 l_1 (r_1 + r_2) = 40$ , la recta de cambio es  $x_1 + x_2 = 40$ . Ya que  $u_{eq} = r_2 - \frac{x_1}{V_1} = 4 - 0.1x_1$ , de (19) tenemos que

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 + x_2 > 40 \\ 4 - 0.1x_1 & \text{si } x_1 + x_2 = 40 \\ 4 & \text{si } x_1 + x_2 < 40. \end{cases} \quad (21)$$

entonces,  $0 < 4 - 0.1x_1 < 4$  por lo que el intervalo de deslizamiento es  $0 < x < 40$ . Luego, tenemos que

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} -\frac{f_2 l_2}{V_1 l_1} & \frac{f_2 l_2}{V_2 l_1} \\ \frac{f_2}{V_1} & -\frac{f_2}{V_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix},$$

entonces  $\sigma(A_{eq}) = \{0, -0.6\}$ , mientras que  $\sigma(A) = \{-5.5051 \times 10^{-2}, -0.54495\}$ , así  $\lambda_d = -0.6$ , es decir,  $\lambda_d < \min[\sigma(A)]$ . Esta última desigualdad implica que, para condiciones iniciales sobre la recta de deslizamiento, es más rápido estabilizar mediante la aplicación del control (21) que mediante el control constante  $\bar{u} = 2$ .

Consideremos la suma de los tiempos de convergencia desde una condición inicial  $x_0$  a una vecindad del punto de equilibrio  $\bar{x}$  bajo el control  $u$  dado por (21) es menor al tiempo de convergencia correspondiente al aplicar el control constante  $u = \bar{u}$ .

Dada  $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T = (20, 40)^T$  (la cual no pertenece a la recta de deslizamiento), la solución de (20)-(21) es

$$x(t) = \begin{pmatrix} 26.33e^{-5.5051 \times 10^{-2}t} - 6.3299e^{-0.54495t} \\ 7.7526e^{-0.54495t} + 32.247e^{-5.5051 \times 10^{-2}t} \end{pmatrix}.$$

Sea  $t_d$  el tiempo de llegada de esta solución a la recta de deslizamiento  $s(x_1, x_2) = 0$ , lo podemos obtener de  $x_1(t_d, u) + x_2(t_d, u) = 40$ , de manera que  $t_d = 6.944$ .

El punto de llegada sobre la superficie deslizante será nuestra nueva condición inicial, la cual es

$$x(t_d) = e^{\begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} (6.944)} \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.821 \\ 22.179 \end{pmatrix},$$

considerando la solución deslizante, de (18) tenemos que  $\dot{x}_1 = 12 - 0.6x_1$ , luego  $x_1(t) = e^{-0.6t}(C + 20e^{0.6t})$ , entonces  $x_1(0) = 17.821$  y  $C = -2.179$ . Entonces, el tiempo de llegada  $t_f$  de la trayectoria que parte de esta nueva condición inicial a una vecindad  $N_\varepsilon$  de  $\bar{x}$  sobre la superficie de deslizamiento satisface  $|x_1(t_f) - 20| = \delta = 0.001$ , esto es que  $2.179e^{-0.6t_f} = 0.001$ , así  $t_f = 12.811$ . De tal manera que el tiempo de llegada de la trayectoria que inicia en  $x_0$  a  $N_\varepsilon$  es  $t_d + t_f = 19.755$ .

Considerando el sistema (20) con  $u = \bar{u} = 2$ , su solución es dada por  $x(t) = e^{At}(x_0 + A^{-1}b\bar{u}) - A^{-1}b\bar{u}$ , para  $t = t_c > 0$  pedimos que  $\|x(t_c) - \bar{x}\| = \delta = 0.001$  con  $\bar{x} = (20, 20)^T$ , nos queda que  $t_c = 171.945$ ; de manera que  $t_d + t_f < t_c$ . Los resultados de este ejemplo numérico se pueden ver en la figura siguiente:

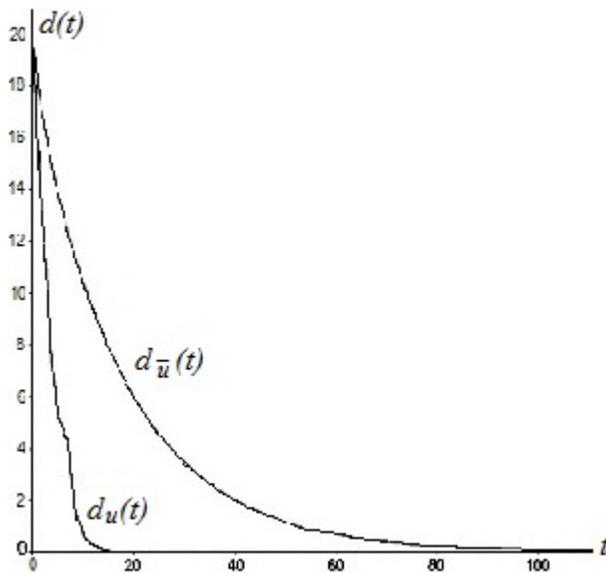


Figura 2. En esta simulación se tomó la condición inicial  $x_0 = (20, 40)^T$ , la curva  $d_{\bar{u}}(t) = \sum |x_i(t, \bar{u}) - \bar{x}_i|$  donde  $x(t, \bar{u})$  es la solución del sistema (20) con  $\bar{u} = 2$ , la curva  $d_u(t) = \sum |x_i(t, u) - \bar{x}_i|$  donde  $x(t, u)$  es la solución con  $u$  de la forma (21).

## V. CONCLUSIONES

Mostramos la viabilidad de mejorar la tasa de estabilización de una familia de sistemas compartimentales mediante el diseño de un hiperplano deslizante. En el caso del plano, para el problema de mezclas de dos tanques a volumen constante, mostramos que el modo deslizante

está en función de la pendiente de la recta de deslizamiento, por lo tanto podemos maximizar la rapidez de convergencia. Presentamos un ejemplo para visualizar numéricamente y también gráficamente estos resultados, ver figura 2.

## REFERENCIAS

- Horacio Leyva C., Julio Solis-Daun. Synthesis of positive controls for the global CLF stabilization of systems, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009.
- H. Sira-Ramírez. Differential Geometric methods in variable-structure control, Int. J. Control, Vol. 48, No. 4, 1988.
- M. Ait Rami and F. Tadeo. Controller Synthesis for Positive Linear Systems With Bounded Controls, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, Vol. 54, No. 2, February 2007.
- P.D. Leenheer and D. Aeyels, Stabilization of positive linear systems, Systems Control Lett., 44 (2001) 259-271.
- R. Bellman, Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill, New York, 1970.
- A. Berman, M. Neumann and I. Stern (1989). Nonnegative matrices in the Dynamics Systems. John-Wiley, New York.
- D.G. Luenberger (1979). Introduction to Dynamic Systems. John Wiley, New York.
- R.F. Brammer. Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. SIAM J. Control, 10.1972.
- Vadim I. Utkin, Sliding Modes in Control Optimization, Springer-Verlag, 1992.
- L. Farina y S. Rinaldi, Positive Linear Systems: Theory and applications. John Wiley & Sons, 2000.