

# Diseño de controladores robustos que aseguran la estabilidad robusta paramétrica y el acotamiento frecuencial

C. Robles-Palomares, C. Elizondo-González, E. Alcorta-García  
Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica, FIME, UANL.  
Av. Pedro de Alba S/N, Cd. Universitaria,  
San Nicolás de los Garza, N.L., C.P. 66451, México  
cesar.palomares@gmail.com; celizond@yahoo.com; ealcorta@ieee.org  
G. Romero-Galván  
Departamento de Electrónica, UAT, Unidad Académica Reynosa-Rodhe, gromero@uat.edu.mx

**Resumen**—En el presente artículo se describe la extensión de un método de diseño útil para obtener una aproximación de la caja de los valores de ajuste de los parámetros de un controlador, satisfaciendo simultáneamente la estabilidad robusta paramétrica y el acotamiento frecuencial como especificación de diseño en el plano- $s$ . La descripción del método se detalla claramente en la sección de resultados y se ilustra su aplicación en un ejemplo en el cual se considera el modelo de un sistema LTI con incertidumbre paramétrica y un controlador PID con sus tres parámetros de ajuste.

**Palabras clave:** Sistemas lineales inciertos, Control robusto, Desempeño robusto.

## I. INTRODUCCIÓN

La necesidad de diseñar controladores robustos con un enfoque paramétrico surge constantemente en muchas aplicaciones prácticas en la realidad industrial, motivo por el cual este tema ha sido investigado exhaustivamente durante varias décadas con el objetivo de desarrollar nuevas metodologías eficientes de diseño que permitan encontrar los valores de ajuste de los parámetros del controlador que preserven la estabilidad robusta del sistema.

Los resultados más recientes sobre este tema se enfocan en el desarrollo de procedimientos o algoritmos que permiten obtener una aproximación de los conjuntos de controladores que estabilizan una familia de plantas inciertas, basándose en los conceptos de la herramienta matemática “descomposición de signo” (Elizondo-González, 2000). Por ejemplo en (Keel y Bhattacharyya, 2008) y (Keel y Bhattacharyya, 2011) en donde se diseñan algoritmos que determinan una aproximación de los conjuntos de controladores estabilizantes proponiendo el uso recursivo y modular de un criterio de estabilidad de 4 polinomios utilizado para analizar la estabilidad robusta Hurwitz de polinomios característicos que contienen coeficientes con incertidumbre paramétrica de tipo polinómica.

Asimismo en (Keel y Bhattacharyya, 2009) se diseña un procedimiento que permite calcular conjuntos de controladores estabilizantes para controladores digitales y plantas discretas multivariables y en (Keel *et al.*, 2013) se calcula

el conjunto completo de controladores estabilizantes tanto para sistemas LTI continuos como discretos resolviendo los problemas de estabilidad robusta Hurwitz y Schur utilizando los criterios de Routh-Hurwitz y de Jury-Raible respectivamente.

De forma similar, resulta conveniente diseñar controladores robustos que además de preservar la estabilidad robusta del sistema satisfagan ciertas especificaciones de desempeño. Por ejemplo, en (Knap *et al.*, 2010) se diseñan controladores robustos estableciendo especificaciones de desempeño en términos de márgenes de ganancia, márgenes de fase y márgenes de  $H_\infty$  y en (Knap *et al.*, 2011) se obtiene una aproximación de los conjuntos de parámetros del controlador utilizando recursivamente un criterio de estabilidad de 8 polinomios para analizar la estabilidad robusta de polinomios con coeficientes complejos.

En el presente artículo se propone la extensión del procedimiento publicado en (Robles-Palomares *et al.*, 2012) para tres parámetros de ajuste del controlador que satisfacen simultáneamente tanto la estabilidad robusta paramétrica como el cumplimiento del acotamiento frecuencial en el plano- $s$ , esto es, el acotamiento de la parte imaginaria  $\omega_{d_i}$  de todas las raíces del polinomio característico en el plano- $s$  tal que  $\omega_{d_i} < \omega_c$ , donde  $\omega_c$  es un valor de cota predeterminado.

La organización del presente artículo se describe a continuación: en la sección II se presentan resultados útiles en el análisis de la positividad robusta, tales como algunas definiciones, los teoremas del rectángulo y del polígono, así como el teorema de partición de cajas, los cuales conforman las bases de la herramienta matemática “descomposición de signo”. En la sección III se describen los preliminares que contiene: un teorema de acotamiento de la parte real de raíces de polinomios, un teorema útil para trasladar el problema del acotamiento frecuencial en el plano- $s$  a un problema clásico de estabilidad y un reciente criterio de estabilidad necesario para el análisis de la estabilidad robusta (ambos teoremas son aplicables tanto a polinomios con coeficientes fijos como a polinomios con

coeficientes con incertidumbre paramétrica). En la sección IV se propone la extensión de un método para el diseño de controladores robustos para sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. En la sección V se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación del método. En la sección VI y VII se presentan las conclusiones del artículo y agradecimientos de los autores. Finalmente se anexa un apéndice que incluye los coeficientes del polinomio característico del ejemplo desarrollado en la sección V.

A continuación se incluye una breve descripción de los resultados más importantes de la herramienta matemática “descomposición de signo”.

## II. BREVE DESCRIPCIÓN DE LA HERRAMIENTA “DESCOMPOSICIÓN DE SIGNO”

En primera instancia, es importante manifestar que todos los resultados que se presentan en esta segunda sección son resultados del segundo autor de este artículo. Se recomienda al lector una revisión de la versión completa de la herramienta en (Elizondo-González, 1999), (Elizondo-González, 2000) y (Elizondo-González, 2011).

El problema de probar la estabilidad robusta de un sistema LTI con incertidumbre paramétrica se reduce a resolver la positividad robusta de funciones multivariantes polinómicas dependientes en un vector de parámetros  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T$ , del cual se conocen únicamente las cotas inferior y superior  $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$  de cada parámetro. El conjunto de todos los vectores  $\mathbf{q}$  forman una caja de incertidumbre paramétrica  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T | q_i \in [q_i^-, q_i^+] \forall i\}$ .

El problema de positividad robusta de funciones multivariable polinómicas dependientes de un vector con incertidumbre paramétrica  $\mathbf{q}$ , fue resuelto en (Elizondo-González, 1999) desarrollando la herramienta matemática “Descomposición de signo” que mediante el análisis de puntos extremos es capaz de determinar en condiciones necesarias y suficientes la positividad robusta de una función multivariable polinómica. Para poder introducir los conceptos de descomposición de signo son necesarias las siguientes definiciones previamente establecidas en matemáticas comunes.

*Definición 1:* Sea  $\mathbf{P}$  un cono convexo positivo en un espacio vectorial  $\mathbb{R}^\ell$ , para  $x, y \in \mathbb{R}^\ell$  se dice que  $x \geq y$  ( $x > y$ ) con respecto a  $\mathbf{P}$  si  $x - y \in \mathbf{P}$  ( $x - y \in \mathbf{P}^\circ$ , el interior de  $\mathbf{P}$ ).

*Definición 2:* Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^\ell$  un subconjunto convexo, se dice que  $f(\cdot)$  es una función no-decreciente en  $\mathbf{Q}$  si  $x \geq y$  implica  $f(x) \geq f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{Q}$ .

*Definición 3:* Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^\ell$  un subconjunto convexo, se dice que  $f(\cdot)$  tiene descomposición de signo en  $\mathbf{Q}$  si existen dos funciones acotadas no-decrecientes  $f_n(\cdot) \geq 0$ ,  $f_p(\cdot) \geq 0$ , tales que  $f(\mathbf{q}) = f_p(\mathbf{q}) - f_n(\mathbf{q})$  para toda  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ . Dichas funciones se llamarán: la parte positiva de la función  $f_p(\cdot)$  y la parte

negativa de la función  $f_n(\cdot)$ .

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= f_p(\mathbf{q}) - f_n(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q} \\ f_p(\cdot) &\triangleq \text{Parte Positiva de } f(\cdot) \\ f_n(\cdot) &\triangleq \text{Parte Negativa de } f(\cdot) \end{aligned}$$

Las partes negativa y positiva ( $f_n(\cdot)$ ,  $f_p(\cdot)$ ), constituyen una representación  $(f_n, f_p)$  de la función en  $\mathbb{R}^2$  con una representación gráfica en el plano  $(f_n(\cdot), f_p(\cdot))$  de acuerdo con la figura 1. Debe de notarse que si se toma un vector  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^\ell$  y se calculan  $f_n(\mathbf{q})$  y  $f_p(\mathbf{q})$ , estas últimas forman las coordenadas de  $f(\mathbf{q})$  en  $\mathbb{R}^2$  quedando representada  $f(\mathbf{q})$  por un punto en el plano  $(f_n, f_p)$  (véase la figura 1).

*Definición 4:* Se le llamará vértice mínimo y máximo Euclidiano  $v^{\min}$ ,  $v^{\max}$  a los vectores elementos de  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^\ell$  con mínima y máxima norma Euclidiana respectivamente.

$$\|v^{\min}\|_2 = \min_{\mathbf{q} \in \mathbf{Q}} \|\mathbf{q}\|_2, \quad \|v^{\max}\|_2 = \max_{\mathbf{q} \in \mathbf{Q}} \|\mathbf{q}\|_2$$

Dado que las partes negativa  $f_n(\mathbf{q})$  y positiva  $f_p(\mathbf{q})$  son funciones no decrecientes en un espacio vectorial, entonces ambas son funciones acotadas dando lugar al siguiente teorema:

*Teorema 1:* (Teorema del Rectángulo)

Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición de signo en  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^\ell$  es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos  $v^{\min}$ ,  $v^{\max}$ , entonces:

- $f(\mathbf{q})$  está acotada inferior y superiormente por  $f_p(v^{\min}) - f_n(v^{\max})$  y  $f_p(v^{\max}) - f_n(v^{\min})$  respectivamente,
- la representación gráfica de la función  $f(\mathbf{q})$ ,  $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}$  en el plano  $(f_n, f_p)$  está contenida en el rectángulo con vértices  $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\min}))$ ,  $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\max}))$ ,  $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$  y  $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$ ,
- si el vértice inferior derecho  $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$  está arriba de la recta de  $45^\circ$  entonces la función  $f(\mathbf{q}) > 0 \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ ,
- si el vértice superior izquierdo  $(f_n(v^{\min}), f_p(v^{\max}))$  está abajo de la recta de  $45^\circ$  entonces la función  $f(\mathbf{q}) < 0 \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ .

Las cotas de la función determinadas por el teorema del rectángulo son mejoradas al tomar en cuenta las partes independiente, lineal y no lineal de la función como se muestra en el siguiente teorema que requiere de la siguiente proposición.

*Proposición 1:* Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^\ell$ , sea  $\Gamma$  una caja contenida en  $\mathbf{Q}$  con un conjunto de vértices  $\{\mu^i\}$  con vértices mínimo y máximo euclidianos  $\mu^{\min}$ ,  $\mu^{\max}$ , sea  $\Delta = \{\delta \mid \delta_i \in [0, \delta_i^{\max}], \delta_i^{\max} = \mu_i^{\max} - \mu_i^{\min}\} \subset \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^\ell$  con un conjunto de vértices  $\{\delta^i\}$  con vértices mínimo y máximo euclidianos  $\mathbf{0}$  y  $\delta^{\max} = \mu^{\max} - \mu^{\min}$ , y sea  $\mathbf{q} \in \Gamma$  tal que  $\mathbf{q} = \mu^{\min} + \delta$  donde  $\delta \in \Delta$ , entonces la función  $f(\mathbf{q})$  se puede expresar mediante sus partes lineal, no lineal e independiente en su

mínima expresión, para toda  $\mathbf{q} \in \Gamma$ .

$$f(\mathbf{q}) = f^{\min} + f_L(\delta) + f_N(\delta) \mid \delta \in \Delta \quad \forall \mathbf{q} \in \Gamma$$

$$f^{\min} \equiv \text{Parte Independiente} = f(\mu^{\min})$$

$$f_L(\delta) \equiv \text{Parte Lineal} = \nabla f(\mathbf{q})|_{\mu^{\min}} \cdot \delta \quad \forall \delta \in \Delta$$

$$f_N(\delta) \equiv \text{Parte No - lineal}$$

$$f_N(\delta) = f(\mu^{\min} + \delta) - f^{\min} - f_L(\delta) \quad \forall \delta \in \Delta.$$

**Teorema 2:** (Teorema del Polígono)

Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función con descomposición de signo en  $\mathbf{Q}$ , sean:  $\mathbf{q}$ ,  $\delta$ ,  $\Gamma$  y  $\Delta$  de acuerdo a la proposición anterior. Entonces: a) la función  $f(\mathbf{q})$  está acotada inferior y superiormente por: Cota  $\text{inf} = f^{\min} + f_{L\text{mín}} - f_{Nn}(\delta^{\text{máx}})$  y Cota  $\text{sup} = f^{\min} + f_{L\text{máx}} + f_{Np}(\delta^{\text{máx}})$   $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ , b) las cotas del inciso "a" están contenidas en el intervalo que definen las cotas del teorema 3  $f_p(\mu^{\min}) - f_n(\mu^{\text{máx}}) \leq \text{Cota inf} \leq \text{Cota sup} \leq f_p(\mu^{\text{máx}}) - f_n(\mu^{\min})$ , c) la representación gráfica de la función  $f(\mathbf{q})$ ,  $\forall \mathbf{q} \in \Gamma$  en el plano  $(f_n, f_p)$ , está dentro del polígono que se define intersectando el rectángulo del teorema 3 con el espacio entre las rectas a  $45^\circ$  separadas del origen la cota mínima  $f^{\min} + f_{L\text{mín}} - f_{Nn}(\delta^{\text{máx}})$ , y la cota máxima  $f^{\min} + f_{L\text{máx}} + f_{Np}(\delta^{\text{máx}})$ .

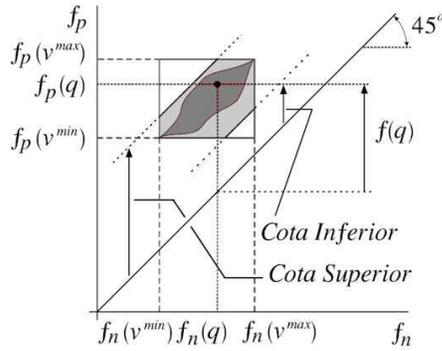


Figura 1: Rectángulo y polígono que acotan la función  $f_{\mathbf{q}}$

La positividad robusta de una función polinómica multivariable, en condiciones necesarias y suficientes, se obtiene utilizando el siguiente teorema.

**Teorema 3:** (Teorema de Determinación de Signo mediante Partición de Cajas).

Sea  $f : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición de signo en  $\mathbf{Q}$  tal que  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P} \subset \mathbb{R}^\ell$  es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos  $v^{\min}$ ,  $v^{\text{máx}}$ . Entonces la función  $f(\mathbf{q})$  es positiva (negativa) en  $\mathbf{Q}$  si y sólo si existe un conjunto de cajas  $\Gamma$  tal que  $\mathbf{Q} = \bigcup_i \Gamma^i$  y Cota  $\text{inf} \geq c > 0$  para cada caja  $\Gamma^i$  (Cota  $\text{sup} \leq c < 0$  para cada caja  $\Gamma^i$ ).

### III. PRELIMINARES

#### III-A. Teorema de acotamiento de la parte real de raíces de polinomios

En (Elizondo-González y Alcorta-García, 2005) se realiza un análisis de cotas de la parte real de las raíces de polinomios característicos con coeficientes reales utilizando el teorema que se enuncia a continuación.

**Teorema 4:** Sea  $p(s) = C_0 + C_1s + \dots + C_ns^n$  el polinomio característico con coeficientes reales positivos correspondiente a un sistema LTI, sean  $a$  y  $b$  dos números reales positivos. Entonces las raíces de  $p(s)$  están localizadas, en el plano de los complejos, a la izquierda de  $-a$  y a la derecha de  $-b$  si y sólo si, los polinomios  $p(s-a)$  y  $p(-s-b)$  son asintóticamente estables.

Este teorema permite analizar si la parte real de las raíces está contenida en una región específica de los reales. Con la ayuda de este resultado fue posible el desarrollo del teorema de acotamiento frecuencial de raíces que se enuncia a continuación.

#### III-B. Teorema de acotamiento frecuencial de raíces de polinomios

Este resultado se encuentra publicado en (Robles-Palomares *et al.*, 2010), en donde se presentó un teorema que permite analizar el acotamiento de la parte imaginaria  $\omega_{d_i}$  de todas las raíces de un polinomio característico en el plano- $s$ , tal que  $\omega_{d_i} < \omega_c$ , donde  $\omega_c$  es un valor de cota predeterminado. Cabe mencionar que este resultado es aplicable tanto a polinomios con coeficientes fijos como a polinomios que poseen coeficientes con incertidumbre paramétrica. Dicho teorema se enuncia a continuación.

**Teorema 5:** Sea  $p(s)$  un polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales,  $p(s) = C_0 + C_1s + \dots + C_ns^n$ . Sea  $p^*(s)$  un polinomio de grado  $2n$ ,  $p^*(s) = \bar{p}(s)\hat{p}(s)$  donde  $\bar{p}(s) = p(js)$  y  $\hat{p}(s) = p(-js)$ . Entonces,  $p^*(s)$  tiene coeficientes reales y  $p(s)$  tiene la parte imaginaria  $\omega_{d_i}$  de sus raíces, tal que  $\omega_{d_i} \leq \omega_c$  ( $\omega_{d_i} < \omega_c$ ), si y sólo si, el polinomio  $p^*(s + \omega_c)$  es estable (asintóticamente estable).

Con este resultado es posible realizar análisis de cotas de la parte imaginaria de las raíces de polinomios característicos con coeficientes reales correspondientes a sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. Lo anterior se logra trasladando el problema original a un problema tradicional de estabilidad, de esta forma es posible aplicar cualquier criterio de estabilidad deseado. Es importante mencionar que para probar la estabilidad robusta paramétrica de polinomios que presentan coeficientes con incertidumbre paramétrica, resulta conveniente utilizar un reciente criterio de estabilidad el cual se describe a continuación.

#### III-C. Criterio de estabilidad (C. Elizondo, 2001)

Este reciente criterio de estabilidad publicado en (Elizondo-González, 2001) y (Elizondo-González, 2011) se fundamenta en el principio del argumento, en índices de Cauchy y en cadenas modificadas de Sturm. Mediante estas bases matemáticas es obtenido el siguiente teorema.

**Teorema 6:** Dado un polinomio  $p(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots + C_{n-1}s^{n-1} + C_ns^n$  con coeficientes reales, el número de raíces a la derecha del plano de los complejos es igual al número de variaciones de signo en la columna  $\sigma$  en el siguiente arreglo.

$\sigma_1$	$C_n$	$C_{n-2}$	$C_{n-4}$	$\dots$
$\sigma_2$	$C_{n-1}$	$C_{n-3}$	$C_{n-5}$	$\dots$
$\sigma_3$	$e_{3,1}$	$e_{3,2}$	$\dots$	
$\sigma_4$	$e_{4,1}$	$e_{(4,2)}$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$\sigma_{(n-1)}$	$e_{(n-1),1}$	$e_{(n-1),2}$		
$\sigma_n$	$e_{(n,1)}$			
$\sigma_{n+1}$	$e_{(n+1),1}$			

$$e_{i,j} = (e_{i-1,1}e_{i-2,j+1} - e_{i-2,1}e_{i-1,j+1}), \forall 3 \leq i \leq n+1,$$

$$e_{i,j} = C_{n+1-i-2(j-1)} \forall i \leq 2,$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \forall i \leq 2,$$

$$\sigma_i = \text{Sign}(e_{i,1}) \prod_{j=1}^{(i+1-m)/2} \text{Sign}(e_{(m+2(j-1)),1}) \forall i \geq 3,$$

$$m = 3 \text{ para } i \text{ par}, m = 2 \text{ para } i \text{ non.}$$

El cálculo de signo en la primera columna  $\sigma_i$  de cada renglón se determina multiplicando el signo del elemento de la segunda columna (por ejemplo,  $e_{(i),1}$ ) por el signo del elemento superior (por ejemplo,  $e_{(i-1),1}$ ) y por los signos de los demás elementos superiores de la segunda columna, tomando elementos de dos en dos. Por ejemplo:  $\sigma_7 = \text{sign}(e_{(7,1)})\text{sign}(e_{(6,1)})\text{sign}(e_{(4,1)})\text{sign}(e_{(2,1)})$ .

En caso de que los coeficientes de la tabla presenten incertidumbre paramétrica, resulta conveniente y necesario utilizar la herramienta matemática “descomposición de signo” para probar la positividad o negatividad robusta de cada uno de los elementos de la tabla.

#### IV. RESULTADOS

Para la presentación de los resultados se establecen primeramente las siguientes definiciones.

**Definición 5:** Sea  $P(s, \mathbf{q}) = \frac{N_p(s, \mathbf{q})}{D_p(s, \mathbf{q})}$  la función de transferencia del proceso, donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T$  es el vector de incertidumbre paramétrica del proceso del cual se conocen únicamente las cotas inferior y superior  $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$  de cada parámetro, el cual a su vez genera una familia  $\mathbf{P}$  de funciones, tal que  $\mathbf{P} = P(s, \mathbf{Q}) : \mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^\ell$ . Sea  $C(s, \mathbf{k}) = \frac{N_c(s, \mathbf{k})}{D_c(s, \mathbf{k})}$  la función de transferencia del controlador, donde  $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\rho]^T$  es el vector de parámetros del controlador cuyos valores  $k_j$  están dentro del segmento de ajuste del controlador  $k_j \in [k_j^-, k_j^+]$ , el cual a su vez genera una familia de funciones  $\mathbf{C}$ , tal que  $\mathbf{C} = C(s, \mathbf{K}) : \mathbf{K} \subset \mathbb{R}^\rho$ .

**Definición 6:** Sea  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k})$  en  $\mathbf{Q} \times \mathbf{K} \subset \mathbb{R}^{\ell+\rho}$  el polinomio característico del sistema en lazo cerrado, donde  $\mathbf{Q}$  es la caja de incertidumbre paramétrica del proceso,  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_\ell]^T | q_i \in [q_i^-, q_i^+] \forall i\}$  y  $\mathbf{K}$  es la caja paramétrica del controlador,  $\mathbf{K} = \{\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\rho]^T | k_j \in [k_j^-, k_j^+] \forall j\}$ . Sea  $p^*(s + \omega_c, \mathbf{q}, \mathbf{k})$  el polinomio que se obtiene al aplicar el teorema del

acotamiento frecuencial de raíces de polinomios (teorema 5) en el polinomio característico  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k})$ .

**Definición 7:** Sea  $\mathbf{E} = \{p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \prod_{i=1}^{i=n} (s + \sigma_i(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \pm j\omega_{d_i}(\mathbf{q}, \mathbf{k})) \mid \sigma_i(\mathbf{q}, \mathbf{k}) < 0, \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \forall \mathbf{k} \in \mathbf{K}\}$  el conjunto de polinomios característicos que satisfacen las condiciones de estabilidad robusta paramétrica. Sea  $\mathbf{F} = \{p^*(s + \omega_c, \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \prod_{i=1}^{i=n} (s + \sigma_i(\mathbf{q}, \mathbf{k}) \pm j\omega_{d_i}(\mathbf{q}, \mathbf{k})) \mid \omega_{d_i}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) < \omega_c, \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \forall \mathbf{k} \in \mathbf{K}\}$  el conjunto de polinomios que satisfacen el acotamiento de las raíces de acuerdo al teorema del acotamiento frecuencial.

Una solución al problema de diseñar controladores con las especificaciones propuestas es encontrar  $\Gamma = \Sigma \cap \Omega$ , tal que:  $\Sigma = \{\mathbf{C}(s, \mathbf{K}) : p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) \in \mathbf{E}, \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \forall \mathbf{k} \in \mathbf{K}\}$  es la familia de controladores que satisfacen la estabilidad robusta paramétrica y  $\Omega = \{\mathbf{C}(s, \mathbf{K}) : p^*(s + \omega_c, \mathbf{q}, \mathbf{k}) \in \mathbf{F}, \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \forall \mathbf{k} \in \mathbf{K}\}$  es la familia de controladores que satisfacen el acotamiento frecuencial de raíces de manera robusta. Entonces, es posible encontrar una aproximación de la caja de valores de ajuste de los parámetros del controlador  $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^3$ , mediante el uso de algún método o algoritmo tal como el que se describe enseguida.

#### IV-A. Método para obtener una aproximación de la caja $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^3$

El método que se propone en este artículo utiliza la “división de retícula” del espacio de parámetros, coincidiendo con la técnica propuesta en (Keel y Bhattacharyya, 2011), (Knap *et al.*, 2010) y (Knap *et al.*, 2011). Sin embargo, el método que se describe enseguida usa una técnica diferente a la de “bisectar/duplicar” utilizada en dichas publicaciones. Cabe mencionar que un estudio comparativo entre ambas herramientas se encuentra fuera del alcance de este artículo.

El método consta de siete pasos, los cuales se describen a continuación:

1. Establecer un valor de  $\varepsilon$  de tolerancia para finalizar el método.
2. Formar el vector de parámetros inicial  $\mathbf{k}^0$ , tal que  $\mathbf{k}^0 = [k_1^0, k_2^0, k_3^0]^T$ , proponiendo los valores iniciales mínimo y máximo de cada parámetro  $k_1^0 \in [k_{1min}^0, k_{1max}^0]$ ,  $k_2^0 \in [k_{2min}^0, k_{2max}^0]$  y  $k_3^0 \in [k_{3min}^0, k_{3max}^0]$ , tal como se muestra en la figura 2a.
3. Evaluar la estabilidad robusta paramétrica del polinomio característico  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}^0)$  y del polinomio  $p^*(s + \omega_c, \mathbf{q}, \mathbf{k}^0)$ ,  $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \forall \mathbf{k}^0 \in \mathbf{K}$ .
4. Si no cumple la estabilidad robusta paramétrica se dividirá por la mitad el vector de parámetros inicial  $\mathbf{k}^0$  formando 8 nuevos vectores de parámetros  $\mathbf{k}^i$  donde  $i = 1, \dots, 8$  tal como se ilustra en la figura 2b. O bien, si la cumple finalizará el método con  $\mathbf{k}^0 \in \mathbf{K}$ .
5. Evaluar la estabilidad robusta paramétrica de los polinomios característicos  $p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}^i)$  y de  $p^*(s + \omega_c, \mathbf{q}, \mathbf{k}^i)$ ,  $\forall \mathbf{q} \in \mathbf{Q}, \forall \mathbf{k}^i \in \mathbf{K}$  para  $i = 1, \dots, 8$ , tal como se ilustra en la figura 2b.
6. Los vectores paramétricos  $\mathbf{k}^i$  que cumplan con la estabilidad robusta paramétrica de ambos polinomios estarán contenidos en  $\mathbf{k}^i \in \mathbf{K}$ , los cuales se ilustran a

color en la figura 2c; mientras que aquellos vectores  $\mathbf{k}^i$  que no la cumplan se volverán a dividir a la mitad, generando 8 nuevos vectores  $\mathbf{k}^{i,j}$  por cada uno de ellos, tal como se muestra en la figura 2d.

- Se repiten nuevamente los pasos 5 y 6, hasta que la diferencia entre los valores mínimo y máximo de los vectores generados sea menor que el valor  $\varepsilon$  predeterminado, tal como se ilustra en las figuras 2e y 2f.

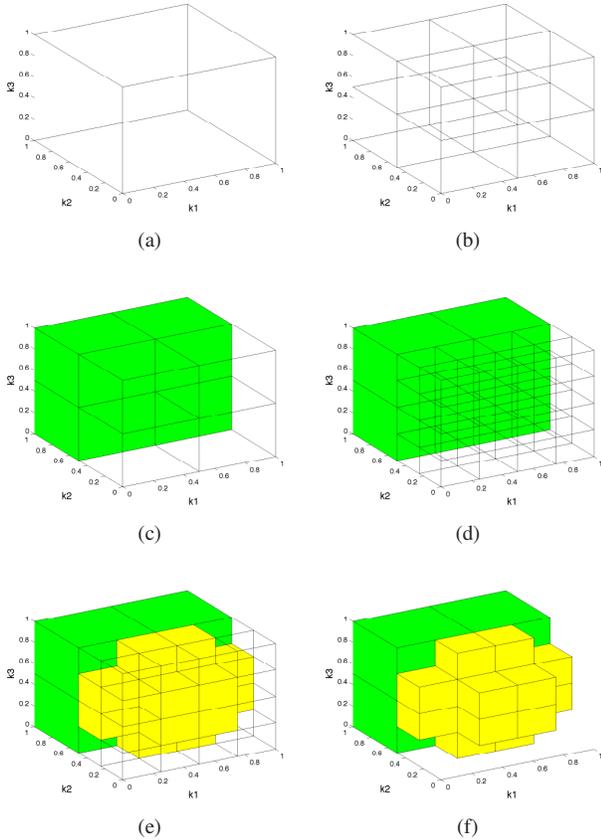


Figura 2: Descripción gráfica del método.

## V. EJEMPLO

Considere un sistema con retroalimentación unitaria con una planta con incertidumbre paramétrica  $G(s, \mathbf{q})$  de quinto orden y un controlador  $C(s, \mathbf{k})$  con estructura tipo PID en cascada, con las siguientes funciones de transferencia:

$$G(s, \mathbf{q}) = \frac{(s+10)(s+5)}{(s+1+a)(s+2+b)(s+3+c)(s+4+d)(s+5+f)}$$

$$C(s, \mathbf{k}) = \frac{k_i + k_p s + k_d s^2}{s(1+0.1s)}$$

Utilizando la nomenclatura común en el control robusto paramétrico, se definen los parámetros inciertos del proceso como:  $\hat{q}_1 = a$ ,  $\hat{q}_2 = b$ ,  $\hat{q}_3 = c$ ,  $\hat{q}_4 = d$  y  $\hat{q}_5 = f$ .

Los valores mínimo y máximo de los parámetros inciertos son:  $0.85 \leq \hat{q}_i \leq 1.15$  para  $i = 1, \dots, 5$ . Resulta conveniente entonces realizar una transformación de coordenadas para dichos parámetros de la siguiente manera:  $\hat{q}_i = 0.85 + (1.15 - 0.85)q_i = 0.85 + 0.3q_i$  para  $i = 1, \dots, 5$  de tal forma

que  $q_i = [0, 1] \forall \mathbf{q} \in \mathbf{P} \subset \mathbf{Q}$ . Los parámetros de diseño del controlador son  $k_1 = k_p$ ,  $k_2 = k_i$  y  $k_3 = k_d$ . Por razones de espacio, el polinomio característico del sistema en lazo cerrado se incluye en un apéndice al final del artículo.

A manera de ejemplo, se proponen los siguientes valores iniciales para  $k_1^0 = [0, 100]$ ,  $k_2^0 = [0, 100]$  y  $k_3^0 = [0, 100]$  y un valor de tolerancia de  $\varepsilon = 2.5$ . Las especificaciones de diseño para todas las raíces del polinomio característico se proponen tal que  $\sigma_i < 0$  y  $\omega_{d_i} < 12.5664 \text{ rad/s}$  ( $2 \text{ Hz}$ ).

Mediante la aplicación del método propuesto en la sección anterior, se obtuvo una aproximación de la región correspondiente en el espacio de parámetros del controlador  $(k_1, k_2, k_3)$  que cumple con las especificaciones de diseño establecidas. En este ejemplo, esta región satisface la estabilidad robusta paramétrica y el acotamiento en la frecuencia  $\omega_d$  de todas las raíces del polinomio característico, tal que  $\omega_{d_i} < 2 \text{ Hz}$ . En la figura 3, se ilustra la aplicación del método para el ejemplo propuesto. Se observa que con una mayor división de la retícula, se logra una aproximación más exacta de la región a determinar.

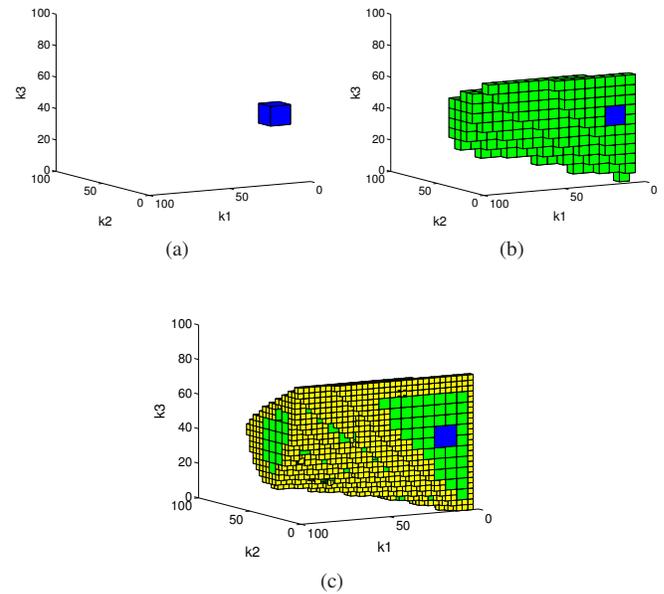


Figura 3: Resultado de la aplicación del método en el ejemplo propuesto.

## VI. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó un método que es capaz de obtener una aproximación de la caja paramétrica del controlador  $\mathbf{K}$  con tres parámetros de ajuste, cuyos valores aseguran la estabilidad robusta paramétrica y el cumplimiento de una especificación o criterio de desempeño, establecido en términos del acotamiento frecuencial en el plano- $s$  para un sistema LTI con incertidumbre paramétrica. Se presentó además un ejemplo que ilustra la aplicación del método descrito en la sección de resultados.

El primer autor del artículo agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado. Se agradece a PROMEP que a través del cuerpo académico “automatización y control” de la UANL hace posible este trabajo.

## REFERENCIAS

- Elizondo-González, C. (1999). Estabilidad y Controlabilidad Robusta de Sistemas Lineales con Incertidumbre Multilineal. Tesis de doctorado. Programa Doctoral de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Disponible en: <http://cdigital.dgb.uanl.mx/te/1080124474.pdf>.
- Elizondo-González, C. (2000). Necessary and sufficient conditions for robust positivity of polynomial functions via sign decomposition. En: *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND'00)*. Prague, Czech Republic, [CD ROM].
- Elizondo-González, C. (2001). A new stability criterion on space coefficients. En: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 3. Orlando, FL, December 4-7. pp. 2663–2664.
- Elizondo-González, C. (2011). *Recent Advances in Robust Control - Theory and Applications in Robotics and Electromechanics*. Cap. 1. Parametric Robust Stability, pp. 3–26. InTech. Available from: <http://www.intechopen.com/books/recent-advances-in-robust-control-theory-and-applications-in-robotics-and-electromechanics/parametric-robust-stability>.
- Elizondo-González, C. y E. Alcorta-García (2005). Análisis de cotas de raíces de polinomios característicos y nuevo criterio de estabilidad. En: *Memorias del Congreso Anual 2005 de la Asociación de México de Control Automático*. Cuernavaca, Morelos, México. Octubre 19-21.
- Keel, L. H., T. F. Stratton y S. P. Bhattacharyya (2013). Robust Hurwitz and Schur stability via interval positivity. *Numerical Linear Algebra with Applications* **20**(2), 281–290.
- Keel, L. H. y S. P. Bhattacharyya (2008). Fixed order multivariable controller synthesis: a new algorithm. En: *Proceedings of 47th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Cancún, México, December 9-11. pp. 977–982.
- Keel, L. H. y S. P. Bhattacharyya (2009). Fixed order multivariable discrete-time control. En: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, held jointly with the 28th Chinese Control Conference (CDC/CCC)*. Shanghai, P.R. China, December 16-18. pp. 6154–6159.
- Keel, L. H. y S. P. Bhattacharyya (2011). Robust stability via sign-definite decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control* **56**(1), 140–145.
- Knap, M. J., L. H. Keel y S. P. Bhattacharyya (2010). Robust stability of complex systems with applications to performance attainment problems. En: *Proceedings of the 2010 American Control Conference (ACC 2010)*. Baltimore, Maryland, June 30-July 02. pp. 3907–3912.
- Knap, M. J., L. H. Keel y S. P. Bhattacharyya (2011). Robust Hurwitz stability via sign-definite decomposition. *Linear Algebra and its Applications* **434**(7), 1663–1676.
- Robles-Palomares, C., C. Elizondo-González, E. Alcorta-García y Romero-Galván G. (2010). Análisis de cotas en la frecuencia de raíces de polinomios característicos con incertidumbre paramétrica. En: *Memorias del Congreso Anual 2010 de la Asociación de México de Control Automático*. Puerto Vallarta, Jalisco, México. Octubre 6-8.
- Robles-Palomares, C., C. Elizondo-González y E. Alcorta-García (2012). Diseño de controladores robustos con aplicación al problema del acotamiento frecuencial. En: *Memorias del Congreso Anual 2012 de la Asociación de México de Control Automático*. Ciudad del Carmen, Campeche, México. Octubre 17-19.

$$\begin{aligned}
 p(s, \mathbf{q}, \mathbf{k}) &= C_6(\mathbf{q}, \mathbf{k})s^6 + C_5(\mathbf{q}, \mathbf{k})s^5 + C_4(\mathbf{q}, \mathbf{k})s^4 \\
 &+ C_3(\mathbf{q}, \mathbf{k})s^3 + C_2(\mathbf{q}, \mathbf{k})s^2 + C_1(\mathbf{q}, \mathbf{k})s^1 + C_0(\mathbf{q}, \mathbf{k})s^0. \\
 C_6(\mathbf{q}, \mathbf{k}) &= 2.0 \times 10^5. \\
 C_5(\mathbf{q}, \mathbf{k}) &= 6.0 \times 10^4 q_1 + 6.0 \times 10^4 q_2 + 6.0 \times 10^4 q_3 \\
 &+ 6.0 \times 10^4 q_4 + 6.0 \times 10^4 q_5 + 3.85 \times 10^6. \\
 C_4(\mathbf{q}, \mathbf{k}) &= 2.0 \times 10^5 k_3 + 1.044 \times 10^6 q_1 + 9.84 \times 10^5 q_2 \\
 &+ 9.24 \times 10^5 q_3 + 8.64 \times 10^5 q_4 + 8.04 \times 10^5 q_5 \\
 &+ 1.8 \times 10^4 (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_1 q_4 + q_2 q_3 + q_1 q_5 + q_2 q_4) \\
 &+ 1.8 \times 10^4 (q_2 q_5 + q_3 q_4 + q_3 q_5 + q_4 q_5) + 2.8646 \times 10^7. \\
 C_3(\mathbf{q}, \mathbf{k}) &= 2.0 \times 10^5 k_1 + 3.0 \times 10^6 k_3 + 6.6622 \times 10^6 q_1 \\
 &+ 5.7892 \times 10^6 q_2 + 5.0362 \times 10^6 q_3 + 4.4032 \times 10^6 q_4 \\
 &+ 3.8902 \times 10^6 q_5 + 2.619 \times 10^5 q_1 q_2 + 2.439 \times 10^5 q_1 q_3 \\
 &+ 2.259 \times 10^5 q_1 q_4 + 2.259 \times 10^5 q_2 q_3 + 2.079 \times 10^5 q_1 q_5 \\
 &+ 2.079 \times 10^5 q_2 q_4 + 1.899 \times 10^5 q_2 q_5 + 1.899 \times 10^5 q_3 q_4 \\
 &+ 1.719 \times 10^5 q_3 q_5 + 1.539 \times 10^5 q_4 q_5 + 5.4 \times 10^3 q_1 q_2 q_3 \\
 &+ 5.4 \times 10^3 (q_1 q_2 q_4 + q_1 q_2 q_5 + q_1 q_3 q_4 + q_1 q_3 q_5 + q_2 q_3 q_4) \\
 &+ 5.4 \times 10^3 (q_1 q_4 q_5 + q_2 q_3 q_5 + q_2 q_4 q_5 + q_3 q_4 q_5) \\
 &+ 1.0258 \times 10^8. \\
 C_2(\mathbf{q}, \mathbf{k}) &= 3.0 \times 10^6 k_1 + 2.0 \times 10^5 k_2 + 1.0 \times 10^7 k_3 \\
 &+ 1.845 \times 10^7 q_1 + 1.4276 \times 10^7 q_2 + 1.1386 \times 10^7 q_3 \\
 &+ 9.42 \times 10^6 q_4 + 8.0178 \times 10^6 q_5 + 1.2522 \times 10^6 q_1 q_2 \\
 &+ 1.059 \times 10^6 q_1 q_3 + 9.030 \times 10^5 q_1 q_4 + 8.670 \times 10^5 q_2 q_3 \\
 &+ 7.824 \times 10^5 q_1 q_5 + 7.284 \times 10^5 q_2 q_4 + 6.258 \times 10^5 q_2 q_5 \\
 &+ 5.898 \times 10^5 q_3 q_4 + 5.052 \times 10^5 q_3 q_5 + 4.206 \times 10^5 q_4 q_5 \\
 &+ 57780 q_1 q_2 q_3 + 52380 q_1 q_2 q_4 + 46980 q_1 q_2 q_5 \\
 &+ 46980 q_1 q_3 q_4 + 41580 q_1 q_3 q_5 + 41580 q_2 q_3 q_4 \\
 &+ 36180 q_1 q_4 q_5 + 36180 q_2 q_3 q_5 + 30780 q_2 q_4 q_5 \\
 &+ 1620 q_1 q_2 q_3 q_4 + 1620 q_1 q_2 q_3 q_5 + 1620 q_1 q_2 q_4 q_5 \\
 &+ 1620 q_1 q_3 q_4 q_5 + 1620 q_2 q_3 q_4 q_5 + 25380 q_3 q_4 q_5 \\
 &+ 1.760 \times 10^8. \\
 C_1(\mathbf{q}, \mathbf{k}) &= 1.0 \times 10^7 k_1 + 3.0 \times 10^6 k_2 + 1.867 \times 10^7 q_1 \\
 &+ 1.212 \times 10^7 q_2 + 8.975 \times 10^6 q_3 + 7.125 \times 10^6 q_4 \\
 &+ 5.907 \times 10^6 q_5 + 1.966 \times 10^6 q_1 q_2 + 1.455 \times 10^6 q_1 q_3 \\
 &+ 1.155 \times 10^6 q_1 q_4 + 9.448 \times 10^5 q_2 q_3 + 9.579 \times 10^5 q_1 q_5 \\
 &+ 7.5 \times 10^5 q_2 q_4 + 6.218 \times 10^5 q_2 q_5 + 5.552 \times 10^5 q_3 q_4 \\
 &+ 4.6 \times 10^5 q_3 q_5 + 3.653 \times 10^5 q_4 q_5 + 1.532 \times 10^5 q_1 q_2 q_3 \\
 &+ 1.21 \times 10^5 q_1 q_2 q_4 + 1.008 \times 10^5 q_1 q_2 q_5 + 90032 q_1 q_3 q_4 \\
 &+ 74642 q_1 q_3 q_5 + 58442 q_2 q_3 q_4 + 59252 q_1 q_4 q_5 \\
 &+ 48452 q_2 q_3 q_5 + 38462 q_2 q_4 q_5 + 28472 q_3 q_4 q_5 \\
 &+ 9477 q_1 q_2 q_3 q_4 + 7857 q_1 q_2 q_3 q_5 + 6237 q_1 q_2 q_4 q_5 \\
 &+ 4617 q_1 q_3 q_4 q_5 + 2997 q_2 q_3 q_4 q_5 + 486 q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 \\
 &+ 1.151 \times 10^8. \\
 C_0(\mathbf{q}, \mathbf{k}) &= 1.0 \times 10^7 k_2.
 \end{aligned}$$