

Comparación de controladores adaptables para motores de corriente directa sin escobillas

Y. Quevedo y J. Moreno-Valenzuela
Instituto Politécnico Nacional-CITEDI
Av.del Parque No. 1310, Mesa de Otay, Tijuana B.C., México,22510
squevedo@citedi.mx, moreno@citedi.mx
Fax: +(52)-664-6231388

Resumen—Este documento presenta dos controladores de seguimiento de trayectoria aplicados a un motor de corriente directa (CD) sin escobillas. Uno de ellos propuesto en la literatura donde se cuenta con una estimación de 9 parámetros. Además, se presenta el diseño de un nuevo controlador con la estimación 7 parámetros. La comparación del funcionamiento de ambos controladores se desarrolla por medio de simulaciones realizadas con las herramientas de *Matlab*[®] y *Simulink*[®].

Palabras clave: Control adaptable, control de motores, simulaciones numéricas, motor de CD sin escobillas.

I. INTRODUCCIÓN

El uso de los motores de corriente directa sin escobillas en sistemas industriales de control de posición y velocidad, tales como sistemas robóticos o máquinas de control numérico han aumentado notablemente desde fines de la década de los ochenta, cuando tuvieron lugar importantes avances en las capacidades de los microprocesadores, los dispositivos electrónicos de potencia y los materiales ferromagnéticos que propiciaron su desarrollo. El continuo ahorro de costos, las mejoras en el rendimiento, la alta eficiencia, la alta densidad de potencia y un bajo costo de mantenimiento debido a la eliminación de las escobillas son alguna de las razones que han llevado a la popularidad de estos motores (Sozer et al., 1997; Salas, 2007).

Para el control de los motores de CD (corriente directa) sin escobillas es necesario conocer la posición del rotor y por medio de las corrientes que circulan por el estator lograr el control de motor (Furuhashi y Okuma, 1992; Furuhashi et al., 1990).

Existen principalmente dos clases de controladores para el motor de CD sin escobillas: con sensores y sin sensores, diferenciados por el uso de un sensor para determinar la posición del rotor en el motor, y de las cuales se desprenden aún más técnicas de control, donde se encuentra el control adaptable de seguimiento de trayectorias que se aborda en este documento (Roslin y George, 2011; Langarica, 2010).

El control adaptable es una técnica de diseño destinada para aplicaciones de alto desempeño en el control de sistemas dinámicos que presentan incertidumbre, la cual se supone caracterizada por un conjunto de parámetros constantes desconocidos (Kim et al., 1997; Melkote y Khorrsmi, 1999). Aun así, el diseño de los controladores

adaptables requiere del conocimiento preciso de la estructura del sistema a controlar. Una de las ventajas del control adaptable es que si los parámetros de la planta cambian durante el funcionamiento, el control se ajusta a dichos cambios permitiendo con ello un mejor desempeño del sistema, al contrario de un sistema no adaptable, donde el controlador se diseña suponiendo los parámetros de la planta constantes y cuando se presenta algún cambio en los parámetros existe un efecto negativo el desempeño de la planta. Otra ventaja de los sistemas de control adaptable es que no se requiere el conocimiento de los parámetros exactos de la planta para el diseño del controlador (Aguilar et al., 2012; Liu y Zhu, 2005).

El presente documento tiene como intención primordial presentar un estudio sobre dos controladores adaptables para el control de movimiento de un motor de CD sin escobillas con carga pendular. En primer lugar se presenta el controlador propuesto en (Dawson et al., 1998), el cual consiste en un controlador con 9 parámetros de adaptación. En segundo lugar, se introduce un nuevo controlador el cual tiene 7 parámetros de adaptación. A fin de evaluar las prestaciones de cada uno de los controladores en similares condiciones de operación, se presentan resultados numéricos.

La organización del documento es de la siguiente manera: La sección II presenta el modelo del sistema. En la sección III se presenta en controlador propuesto por (Dawson et al., 1998). En la sección IV se presenta el controlador adaptable propuesto. En la sección V se presentan los resultados de simulación de ambos controladores, y finalmente en la sección VI se exponen las conclusiones del documento.

II. MODELO DEL MOTOR DE CD SIN ESCOBILLAS

El modelo del motor de CD sin escobillas que se muestra a continuación fue propuesto por (Dawson et al., 1998) en el cual se asume que el circuito magnético es lineal, los devanados del motor se encuentran conectados en estrella y el eje del motor se encuentra ensamblado a un brazo robóticos de un solo enlace. El modelo del motor de CD sin escobillas dado en las siguientes ecuaciones, también es conocido como modelo transformado $d-q$, el cual se encuentra compuesto por una ecuación que representa la parte mecánica del motor, y dos más que representan la

parte eléctrica del motor

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + N \sin(q) = (K_b I_b + 1)I_a, \quad (1)$$

$$L_a \dot{I}_a = -R I_a - n_p L_b I_b \dot{q} - K_{\tau 2} \dot{q} + V_a, \quad (2)$$

$$L_b \dot{I}_b = -R I_b + n_p L_a I_a \dot{q} + V_b, \quad (3)$$

donde $K_{\tau 2}$ y K_b son dos constantes positivas de transmisión de torque, M es una constante positiva relacionada a la inercia mecánica del sistema (incluida la inercia del motor), N es una constante positiva relacionada con la masa de la carga y el coeficiente de gravedad y B es un coeficiente positivo de la fricción viscosa. Los subíndices a y b hacen referencia a los ejes de cuadratura. Los parámetros y variables del motor se definen de la siguiente manera: L_a y L_b representan las inductancias de los devanados ya transformadas, R es una constante positiva de resistencia en los devanados, n_p es el número de pares de polos de imanes permanentes en el rotor, $q(t)$, $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$ representan la posición, velocidad y aceleración respectivamente, $I_a(t)$ e $I_b(t)$ representan las corrientes transformadas en los devanados. Finalmente, V_a y V_b simbolizan los voltajes en los devanados ya transformados.

II-A. Objetivo de control

Por medio de la medición de los estados $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $I_a(t)$ y $I_b(t)$, se plantea el objetivo de control para la dinámica electromecánica definida por las ecuaciones (1), (2) y (3), como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (4)$$

donde se define el error de seguimiento de posición $e(t)$ y el error de seguimiento de velocidad $\dot{e}(t)$ como

$$e(t) = q_d(t) - q(t), \quad (5)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t), \quad (6)$$

donde $q_d(t)$ representa la trayectoria de posición deseada, y $\dot{q}_d(t)$ es la trayectoria de la velocidad deseada. Se asume que $q_d(t)$ y su primera, segunda y tercera derivada son funciones que dependen del tiempo y que son acotadas.

III. CONTROLADOR ADAPTABLE DE DAWSON ET AL. (1998)

Comenzando con el desarrollo del controlador adaptable presentado en la literatura por (Dawson et al., 1998), el cual toma la dinámica del motor dado por las ecuaciones (1), (2) y (3), donde se observa que existen 8 parámetros desconocidos para el controlador, tomando en cuenta que el número de pares polos n_p es conocido. Para simplificar la formulación del control y el análisis de estabilidad, definiremos un error de seguimiento filtrado $r(t)$ como

$$r = \dot{e} + \alpha e, \quad (7)$$

donde α es una ganancia de control positiva. Otra definición de gran utilidad para el desarrollo de los controladores es

el error de seguimiento de las corrientes representado por η_a y η_b , dado por

$$\eta_a = I_{da} - I_a, \quad (8)$$

$$\eta_b = I_{db} - I_b, \quad (9)$$

donde I_{da} y I_{db} , representan las trayectorias deseadas para el seguimiento de corrientes de cada una de las fases del motor. Primeramente se diseñan las trayectorias de corrientes deseadas I_{da} y I_{db}

$$I_{da} = W_\tau \hat{\theta}_\tau + k_s r, \quad (10)$$

$$I_{db} = 0, \quad (11)$$

donde $W_\tau \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ es conocida como la matriz de regresión y esta dada por

$$W_\tau = [\ddot{q}_d + \alpha \dot{e} \quad \dot{q} \quad \sin(q)], \quad (12)$$

$\theta_\tau \in \mathbb{R}^3$ es el vector de parámetros dado por

$$\theta_\tau = [M \quad B \quad N]^T, \quad (13)$$

y k_s es una ganancia de control positiva. Un factor que será de suma utilidad para la presentación de este controlador son las matrices de regresión $W_a \in \mathbb{R}^{1 \times 8}$ y $W_b \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ que se definen a continuación como

$$W_a = [W_{a1} \quad W_{a2} \quad W_{a3} \quad W_{a4} \quad W_{a5} \quad W_{a6} \quad W_{a7} \quad W_{a8}], \quad (14)$$

con

$$W_{a1} = (\hat{B} - \alpha \hat{M} - k_s) I_a,$$

$$W_{a2} = -(\hat{B} - \alpha \hat{M} - k_s) \dot{q},$$

$$W_{a3} = -(\hat{B} - \alpha \hat{M} - k_s) \sin(q),$$

$$W_{a4} = -(\hat{B} - \alpha \hat{M} - k_s) I_a I_b,$$

$$W_{a5} = I_a,$$

$$W_{a6} = \dot{q},$$

$$W_{a7} = n_p I_b \dot{q},$$

$$W_{a8} = \hat{M}(\ddot{q}_d + \alpha \dot{q}_d) + \hat{N} \cos q + k_s(\dot{q}_d + \alpha \dot{e}) + W_\tau \Gamma_\tau (W_\tau^T r + Y_a^T \eta_a + Y_b^T \eta_b),$$

y

$$W_b = [W_{b1} \quad W_{b2} \quad W_{b3}], \quad (15)$$

en donde

$$W_{b1} = I_b,$$

$$W_{b2} = -n_p I_a \dot{q},$$

$$W_{b3} = I_a r.$$

La ley de adaptación para θ_τ ahora es definida como

$$\dot{\hat{\theta}}_\tau = \Gamma_\tau [W_\tau^T r + Y_a^T \eta_a + Y_b^T \eta_b] = -\dot{\hat{\theta}}_\tau, \quad (16)$$

donde η_a y η_b son los errores de corriente definido en (8) y (9), y los vectores auxiliares Y_a y Y_b son

$$Y_a = [0 \quad W_{a2} \quad W_{a3}] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad (17)$$

$$Y_b = [W_{b2} \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad (18)$$

donde W_{a2} y W_{a3} se encuentra previamente descritas en (14) y W_{b2} en (15).

Para lograr el seguimiento de la parte eléctrica del motor, se procede a parametrizar la dinámica de los errores de seguimiento de corriente η_a y η_b

$$L_a \dot{\eta}_a = W_{a1} b + Y_{e1} \theta_e + b W_{a4} \theta_k + b Y_a \theta_\tau - V_a, \quad (19)$$

donde

$$b = \frac{L_a}{M}, \quad (20)$$

$$\theta_e = [L_a \quad L_b \quad R \quad K_{\tau 2}]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, \quad (21)$$

$$\theta_k = K_b, \quad (22)$$

$$Y_{e1} = [W_{a8} \quad W_{a7} \quad W_{a5} \quad W_{a6}] \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, \quad (23)$$

en donde W_{a8} , W_{a7} , W_{a6} y W_{a5} se encuentran definidas en (14). Para la corriente de la fase b , en referencia al seguimiento de error η_b se describe la siguiente dinámica

$$L_b \dot{\eta}_b = Y_{e2} \theta_e + b Y_b \theta_\tau + b W_{b3} \theta_k - V_b - b K_b I_a r, \quad (24)$$

donde r esta definida en (7), Y_b esta definida en (18), W_{b3} es definida en (15), b , θ_e , y θ_k son definidos en (20), (21) y (22) respectivamente, y finalmente Y_{e2} es

$$Y_{e2} = [0 \quad 0 \quad W_{b1} \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 4}.$$

Las entradas de voltajes de control para el motor de corriente directa sin escobillas están dadas por

$$V_a = \hat{b} [Y_a \theta_\tau + W_{a1} + r] Y_{e1} \hat{\theta}_e + k_1 \eta_a + \hat{b} W_{a4} \hat{\theta}_k, \quad (25)$$

$$V_b = \hat{b} Y_b \hat{\theta}_\tau + Y_{e2} \hat{\theta}_e + k_2 \eta_b + \hat{b} W_{b3} \hat{\theta}_k, \quad (26)$$

donde k_1 y k_2 son ganancias de control positivas y \hat{b} , $\hat{\theta}_\tau$, $\hat{\theta}_k$ y $\hat{\theta}_e$ son las estimaciones de los parámetros de la dinámica del motor, que se obtienen con las siguientes leyes de adaptación

$$\begin{aligned} \dot{\hat{b}} &= \Gamma_b ((W_{a1} + r) \eta_a + Y_a \hat{\theta}_\tau \eta_a + Y_b \hat{\theta}_\tau \eta_b \\ &\quad + W_{a4} \hat{\theta}_k \eta_a + W_{b3} \hat{\theta}_k \eta_b) = -\dot{\hat{b}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_e = \Gamma_e (Y_{e1}^T \eta_a + Y_{e2}^T \eta_b) = -\dot{\hat{\theta}}_e, \quad (28)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_k = \Gamma_k (W_{a4} \eta_a + W_{b3} \eta_b) = -\dot{\hat{\theta}}_k, \quad (29)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_\tau = \Gamma_\tau [W_{\tau 1}^T r + Y_a^T \eta_a + Y_b^T \eta_b] = -\dot{\hat{\theta}}_\tau, \quad (30)$$

donde $\Gamma_b \in \mathbb{R}^+$ y $\Gamma_k \in \mathbb{R}^+$ son ganancias de control positivas, y $\Gamma_e \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $\Gamma_\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices diagonales de ganancias positivas.

Con las leyes de adaptación definidas en (27), (28), (29) y (30) se obtienen las estimaciones de parámetros, definidos

a continuación

$$\dot{\hat{\theta}}_{\tau 1} = \frac{d}{dt} \hat{M} = \Gamma_{\tau 1} [W_{\tau 1}^T r + Y_{a1}^T \eta_a + Y_{b1}^T \eta_b],$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{\tau 2} = \frac{d}{dt} \hat{B} = \Gamma_{\tau 2} [W_{\tau 2}^T r + Y_{a2}^T \eta_a + Y_{b2}^T \eta_b],$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{\tau 3} = \frac{d}{dt} \hat{N} = \Gamma_{\tau 3} [W_{\tau 3}^T r + Y_{a3}^T \eta_a + Y_{b3}^T \eta_b],$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{e1} = \frac{d}{dt} \hat{L}_a = \Gamma_{e1} [Y_{e11}^T \eta_a + Y_{e21}^T \eta_b],$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{e2} = \frac{d}{dt} \hat{L}_b = \Gamma_{e2} [Y_{e12}^T \eta_a + Y_{e22}^T \eta_b],$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{e3} = \frac{d}{dt} \hat{R} = \Gamma_{e3} [Y_{e13}^T \eta_a + Y_{e23}^T \eta_b],$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{e4} = \frac{d}{dt} \hat{K}_{\tau 2} = \Gamma_{e4} [Y_{e14}^T \eta_a + Y_{e24}^T \eta_b],$$

$$\dot{\hat{\theta}}_k = \frac{d}{dt} \hat{K}_b = \Gamma_k [W_{a4} \eta_a + W_{b3} \eta_b].$$

IV. CONTROLADOR ADAPTABLE PROPUESTO

El control adaptable propuesto estima 7 parámetros del motor de CD sin escobillas y su diseño esencialmente se divide en 2 partes

- control adaptable de la parte eléctrica,
- control adaptable de la parte mecánica,

los cuales se abordarán a continuación.

IV-A. Controlador adaptable de la parte eléctrica

Comenzando con el desarrollo del controlador adaptable propuesto, esta sección se enfoca a la parte eléctrica de los devanados de la dinámica del motor, designados por los subíndices a y b .

La parte eléctrica a , se encuentra descrita por la matriz de regresión $W_{ea} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ y el vector de parámetros desconocidos $\theta_{ea} \in \mathbb{R}^4$, dados por

$$W_{ea} = [\dot{I}_a \quad I_a \quad n_p I_b \dot{q} \quad \dot{q}], \quad (31)$$

$$\theta_{ea} = [L_a \quad R \quad L_b \quad K_{\tau 2}]^T. \quad (32)$$

De forma similar la parte eléctrica b , se encuentra descrita por la matriz de regresión $W_{eb} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ y el vector de parámetros desconocidos $\theta_{eb} \in \mathbb{R}^3$ que explícitamente se encuentran dados por

$$W_{eb} = [\dot{I}_b \quad I_b \quad n_p I_a \dot{q}], \quad (33)$$

$$\theta_{eb} = [L_b \quad R \quad L_a]^T. \quad (34)$$

Los voltajes propuestos para el control de motor de CD sin escobillas con carga gravitacional descrito en (1)-(3), es definido por

$$V_a = W_{ea}^d \hat{\theta}_{ea} + K_{pa} \eta_a + K_{ia} \xi_a, \quad (35)$$

$$V_b = W_{eb}^d \hat{\theta}_{eb} + K_{pb} \eta_b + K_{ib} \xi_b, \quad (36)$$

donde V_a es el voltaje del devanado a , V_b es el voltaje del devanado b , W_{ea}^d es dada por

$$W_{ea}^d = [\dot{I}_{da} \quad I_{da} \quad n_p I_b \dot{q} \quad I_{da}] \in \mathbb{R}^{1 \times 4}, \quad (37)$$

$\hat{\theta}_{ea} \in \mathbb{R}^4$ es el vector de parámetros estimados de la fase a , K_{pa} y K_{pb} son ganancias proporcionales positivas, K_{ia} y K_{ib} son ganancias integrales positivas, W_{eb}^d dada por

$$W_{eb}^d = \begin{bmatrix} \dot{I}_{db} & I_{db} & -n_p I_b \dot{q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}, \quad (38)$$

$\hat{\theta}_{eb} \in \mathbb{R}^3$ es el vector de parámetros estimados de la fase b y ξ_a y ξ_b son obtenidas de

$$\dot{\xi}_a = \eta_a, \quad (39)$$

$$\dot{\xi}_b = \eta_b. \quad (40)$$

Es posible reducir el número de parámetros de adaptación de la fase b si se define la corriente deseada de la fase b igual a cero, esto es

$$I_{db} = 0, \quad (41)$$

por lo tanto el voltaje V_b en la ecuación (36) queda explícitamente dado por

$$\begin{aligned} V_b &= -n_p \hat{L}_a I_a \dot{q} + K_{pb} \eta_b + K_{ib} \xi_b \\ &= [-n_p I_a \dot{q}] \hat{L}_a + K_{pb} \eta_b + K_{ib} \xi_b \\ &= W_{eb}^* \hat{\theta}_{eb}^* + K_{pb} \eta_b + K_{ib} \xi_b, \end{aligned} \quad (42)$$

donde n_p , I_a y \dot{q} son definidas en (1), $W_{eb}^* = -n_p I_a \dot{q}$, $\theta_{eb}^* = \hat{L}_a$, la cual se refiere a la estimación de la inductancia de la fase a .

De momento se asumirá que la corriente deseada de la fase a dada por I_{da} y su derivada \dot{I}_{da} son funciones suaves y son calculables usando las mediciones de posición $q(t)$, velocidad $\dot{q}(t)$ y corrientes I_a e I_b .

Los errores de los parámetros de adaptación de la parte eléctrica se definen como

$$\tilde{\theta}_{ea} = \theta_{ea} - \hat{\theta}_{ea}, \quad (43)$$

$$\tilde{\theta}_{eb}^* = \theta_{eb}^* - \hat{\theta}_{eb}^*. \quad (44)$$

Nótese que

$$\tilde{\theta}_{ea}^* = \tilde{\theta}_{ea1} = \tilde{L}_a.$$

Sustituyendo el voltaje de la fase a dado en (35), en la ecuación eléctrica de la fase a del modelo del motor (2), se tiene

$$\begin{aligned} L_a \dot{I}_a + R I_a + n_p L_b I_b \dot{q} + K_{\tau 2} \dot{q} &= W_{ea}^d \theta_{ea} + K_{pa} \eta_a \\ &\quad + K_{ia} \xi_a - W_{ea} \tilde{\theta}_{ea} \\ &= \dot{I}_{da} L_a + I_{da} R \\ &\quad + n_p L_b I_b \dot{q} + K_{\tau 2} \dot{q} \\ &\quad + K_{pa} \eta_a + K_{ia} \xi_a \\ &\quad - W_{ea}^d \tilde{\theta}_{ea}. \end{aligned} \quad (45)$$

Simplificando la ecuación (45) con el error de corriente η_a y su derivada ξ_a , se tiene

$$L_a \dot{\eta}_a + R \eta_a + K_{pa} \eta_a + K_{ia} \xi_a - W_{ea}^d \tilde{\theta}_{ea} = 0. \quad (46)$$

De forma similar, para la fase b , se usa el error de corriente η_b y su derivada ξ_b y se tiene

$$\begin{aligned} L_b \dot{I}_b + R I_b - n_p L_a I_a \dot{q} &= W_{eb}^* \theta_{eb}^* + K_{pb} \eta_b \\ &\quad + K_{ib} \xi_b - W_{eb}^* \tilde{\theta}_{eb}^* \\ &= -n_p I_a \dot{q} L_a + K_{pb} \eta_b \\ &\quad + K_{ib} \xi_b - W_{eb}^* \tilde{\theta}_{eb}^*, \end{aligned}$$

observándose que $\eta_b = -I_b$, por lo tanto

$$L_b \dot{\eta}_b + R \eta_b + K_{pb} \eta_b + K_{ib} \xi_b - W_{eb}^* \tilde{\theta}_{eb}^*. \quad (47)$$

Se propone la ley de adaptación de modo que se pueda probar que los errores de corriente $\eta_a(t)$ y $\eta_b(t)$ tienden a cero asintóticamente, por lo que plantea la siguientes funciones de energía

$$U_a(t) = \frac{1}{2} L_a n_a^2 + \frac{1}{2} K_{ia} \xi_a^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{ea}^T \Gamma_{ea}^{-1} \tilde{\theta}_{ea}, \quad (48)$$

donde $\Gamma_{ea} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es una matriz diagonal definida positiva, cuya derivada temporal está dada por

$$\dot{U}_a(t) = L_a n_a \dot{n}_a + K_{ia} \xi_a \dot{\xi}_a + \tilde{\theta}_{ea}^T \Gamma_{ea}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ea}. \quad (49)$$

Sustituyendo la ecuación de lazo cerrado (46), y usando (39), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{U}_a(t) &= \eta_a [-(R + K_{pa}) \eta_a - K_{ia} \xi_a + W_{ea}^d \tilde{\theta}_{ea}] \\ &\quad + K_{ia} \xi_a \eta_a + \tilde{\theta}_{ea}^T \Gamma_{ea}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ea} \\ &= -(R + K_{pa}) \eta_a^2 + \eta_a W_{ea}^d \tilde{\theta}_{ea} + \tilde{\theta}_{ea}^T \Gamma_{ea}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ea} \\ &= -(R + K_{pa}) \eta_a^2 + \tilde{\theta}_{ea}^T W_{ea}^{dT} \eta_a + \tilde{\theta}_{ea}^T \Gamma_{ea}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ea} \\ &= -(R + K_{pa}) \eta_a^2 + \underbrace{\tilde{\theta}_{ea}^T [W_{ea}^{dT} \eta_a + \Gamma_{ea}^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_{ea}]}_{\leq 0}, \end{aligned}$$

por lo que se propone la ley de adaptación

$$\dot{\tilde{\theta}}_{ea} = -\dot{\hat{\theta}}_{ea} = -\Gamma_{ea} W_{ea}^T \eta_a. \quad (50)$$

Finalmente, se obtiene

$$\dot{U}_a(t) = -[R + K_{pa}] \eta_a^2, \quad (51)$$

la cual es semidefinida negativa.

Para la fase b se propone la siguiente función de energía

$$U_b = \frac{1}{2} L_b \eta_b^2 + \frac{1}{2} K_{ib} \xi_b^2 + \frac{1}{2} \Gamma_{eb}^{-1} \tilde{\theta}_{eb}^{*2}, \quad (52)$$

donde, $\Gamma_{eb} \in \mathbb{R}^3$ es una matriz diagonal definida positiva, cuya derivada temporal es dada por

$$\dot{U}_b(t) = L_b \eta_b \dot{\eta}_b + K_{ib} \xi_b \dot{\xi}_b + \Gamma_b^{-1} \tilde{\theta}_{eb}^* \dot{\tilde{\theta}}_{eb}^*. \quad (53)$$

Sustituyendo la ecuación (47) y la ecuación (40), en la derivada temporal de función energía \dot{U}_b , se tiene

$$\dot{U}_b(t) = \eta_b [-(R + K_{pb}) \eta_b] + \eta_b W_{eb}^* \tilde{\theta}_{eb}^* + \Gamma_b^{-1} \tilde{\theta}_{eb}^* \dot{\tilde{\theta}}_{eb}^*,$$

donde $\tilde{\theta}_{eb}^*$ es un escalar. Por lo tanto,

$$\dot{U}_b(t) = -(R + K_{pb}) \eta_b^2 + \underbrace{\tilde{\theta}_{eb}^* [\eta_b W_{eb}^* + \eta_b W_{eb}^* \tilde{\theta}_{eb}^*]}_{\leq 0}.$$

Se propone la ley de adaptación

$$\dot{\theta}_{eb}^* = -\dot{\theta}_{eb}^* = -\Gamma_{eb} W_{eb}^* \eta_b. \quad (54)$$

y finalmente, \dot{U}_b queda dada por

$$\dot{U}_b = -[R + K_{pb}] \eta_b^2, \quad (55)$$

la cual es semidefinida negativa. Dado que $\tilde{\theta}_{eb}^* = \tilde{\theta}_{ea1}$, es posible integrar la adaptación de $\hat{\theta}_{eb} = \hat{L}_a$ y $\hat{\theta}_{ea1} = \hat{L}_a$ de la siguiente manera

$$\dot{\hat{\theta}}_{ea1} = \frac{d}{dt} \hat{L}_a = \Gamma_{a1} [\dot{I}_{da} \eta_a - n_p I_a \dot{q}], \quad (56)$$

mientras que los otros parámetros son adaptados por

$$\dot{\hat{\theta}}_{ea2} = \frac{d}{dt} \hat{R} = \Gamma_{a2} I_{da} \eta_a, \quad (57)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{ea3} = \frac{d}{dt} \hat{L}_b = \Gamma_{a3} n_p I_b \dot{q} \eta_a, \quad (58)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{ea4} = \frac{d}{dt} \hat{K}_b = \Gamma_{a4} \dot{q} \eta_a. \quad (59)$$

Como anteriormente se estableció, las derivadas de las funciones de energía $\dot{U}_a(t)$ y $\dot{U}_b(t)$ dadas por las ecuaciones (51) y (55) respectivamente, son semidefinidas negativas, por lo que es posible invocar el lema de Barbalat (Khalil, H., 1996) para probar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \eta_a(t) \\ \eta_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Por lo tanto, los errores de corrientes tienden a cero cuando el tiempo incrementa.

Para tener un adecuado funcionamiento del controlador, se recomienda que las ganancias Γ_{a1} , Γ_{a2} , Γ_{a3} y Γ_{a4} sean iguales.

IV-B. Controlador adaptable de la parte mecánica

De las ecuaciones (8) y (9), se tiene $I_b = -\eta_b$ e $I_a = I_{da} - \eta_a$, sustituyendo estas expresiones en la ecuación mecánica del modelo del motor dada por (1), se obtiene

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + B\dot{q} + N \sin(q) &= [-K_b \eta_b + 1][I_{da} - \eta_a] \\ &= I_{da} + K_b \eta_b \eta_a - K_b I_{da} \eta_b - \eta_a. \end{aligned}$$

Es posible asumir que $\eta_a(t)$ y $\eta_b(t)$ tienden a cero muy rápido, dado que la dinámica eléctrica puede hacerse más rápida que la dinámica mecánica utilizando valores de ganancias proporcional integral suficientemente grandes, así que la ecuación de la parte mecánica se simplifica

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + N \sin(q) = I_{da}. \quad (61)$$

Se propone la corriente deseada para la fase a de la siguiente forma

$$\begin{aligned} I_{da} &= \hat{M}\ddot{q}_d + \hat{B}\dot{q}_d + \hat{N} \sin q_d + K_p e + K_d \tilde{\vartheta} \quad (62) \\ &= W_\tau \hat{\theta}_\tau + K_p e + K_d \tilde{\vartheta}, \end{aligned}$$

donde $W_\tau(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ es la matriz de regresión dada por

$$W_\tau = \begin{bmatrix} \ddot{q}_d & \dot{q}_d & \sin(q_d) \end{bmatrix}, \quad (63)$$

el vector de parámetros $\hat{\theta}_\tau \in \mathbb{R}^3$ es dado por

$$\hat{\theta}_\tau = \begin{bmatrix} \hat{M} & \hat{B} & \hat{N} \end{bmatrix}^T, \quad (64)$$

y $\tilde{\vartheta}$ se obtiene de

$$\dot{\tilde{\vartheta}} = -K_f [\tilde{\vartheta} - \dot{e}], \quad (65)$$

donde $K_f > 0$.

De la ecuación mostrada en (61), se sustituye el error de adaptación de la parte mecánica $\tilde{\theta}_\tau = \theta_\tau - \hat{\theta}_\tau$ y la corriente I_{da} ,

$$\begin{aligned} M\ddot{q} + B\dot{q} + N \sin(q) &= W_\tau [\theta_\tau - \tilde{\theta}_\tau] + K_p e + K_d \tilde{\vartheta} \\ &= W_\tau \theta_\tau - W_\tau \tilde{\theta}_\tau + K_p e + K_d \tilde{\vartheta} \\ &= M\ddot{q}_d + B\dot{q}_d + N \sin(q_d) \\ &\quad + K_p e + K_d \tilde{\vartheta} - W_\tau \tilde{\theta}_\tau. \end{aligned} \quad (66)$$

Simplificando la ecuación (66) y agrupando términos, se tiene

$$M\ddot{e} + B\dot{e} + N[\sin(q_d) - \sin(q)] + K_p e + K_d \tilde{\vartheta} - W_\tau \tilde{\theta}_\tau = 0. \quad (67)$$

Se propone la siguiente función de energía $U_\tau(t)$

$$U_\tau(t) = \frac{1}{2} M \dot{e}^2 + \frac{1}{2} K_p e^2 + \frac{1}{2} K_d K_f^{-1} \tilde{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_\tau^T \Gamma_\tau^{-1} \tilde{\theta}_\tau, \quad (68)$$

donde $\Gamma_\tau \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz diagonal de ganancias positivas. Que puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} U_\tau(t) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_p & M\alpha \\ M\alpha & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} K_d K_f^{-1} \tilde{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_\tau^T \Gamma_\tau^{-1} \tilde{\theta}_\tau, \end{aligned} \quad (69)$$

la cual es positiva definida para $K_p M - \alpha^2 M > 0$ y $\alpha^2 < \frac{K_p}{M}$, con $\alpha > 0$. La derivada temporal de $U_\tau(t)$, es dada por

$$\begin{aligned} \dot{U}_\tau(t) &= M\dot{e}\dot{e} + K_p e \dot{e} + K_d K_f^{-1} \tilde{\vartheta} \dot{\tilde{\vartheta}} + \tilde{\theta}_\tau^T \Gamma_\tau^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_\tau \\ &\quad + \alpha M \dot{e}^2 + M \alpha \dot{e} \ddot{e} \\ &= \dot{e} [-B\dot{e} - N(\sin(q_d) - \sin(q)) - K_p e - K_d \tilde{\vartheta} \\ &\quad + W_\tau \tilde{\theta}_\tau] + K_p e \dot{e} + K_d K_f^{-1} \tilde{\vartheta} [-K_f \tilde{\vartheta} + K_f \dot{e}] \\ &\quad + \tilde{\theta}_\tau^T \Gamma_\tau^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_\tau + \alpha M \dot{e}^2 + \alpha \dot{e} [-B\dot{e} - N(\sin(q_d) \\ &\quad - \sin(q)) - K_p e - K_d \tilde{\vartheta} + W_\tau \tilde{\theta}_\tau]. \end{aligned} \quad (70)$$

Agrupando términos comunes, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{U}_\tau(t) &= -[B - \alpha M] \dot{e}^2 - N[\sin(q_d) - \sin(q)] \dot{e} \\ &\quad + W_\tau \tilde{\theta}_\tau \dot{e} - K_d \tilde{\vartheta}^2 + \tilde{\theta}_\tau^T \Gamma_\tau^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_\tau - \alpha N \\ &\quad [\sin(q_d) - \sin(q)] \dot{e} - \alpha K_p e^2 - \alpha K_d e \tilde{\vartheta} \\ &\quad - \alpha B e \dot{e} + \alpha W_\tau \tilde{\theta}_\tau \dot{e}. \end{aligned} \quad (71)$$

Se debe satisfacer

$$\tilde{\theta}_\tau^T \Gamma_\tau^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_\tau + W_\tau \tilde{\theta}_\tau \dot{e} + W_\tau \tilde{\theta}_\tau \alpha e \leq 0, \quad (72)$$

por lo que se propone la ley de adaptación

$$\dot{\tilde{\theta}}_\tau = -\dot{\hat{\theta}}_\tau = -\Gamma_\tau W_\tau^T [\dot{e} + \alpha e]. \quad (73)$$

TABLA I
VALORES DE PARÁMETROS DEL MOTOR

Parámetro	Valor
L_a	0.0031
L_b	0.004565
R	0.9322
$K_{\tau 2}$	0.506
n_p	4.0
M	0.0292
B	0.0298
N	2.2387
K_b	0.0246

Usando el hecho de que $|\sin(q_d) - \sin(q)| \leq e$ se tiene que

$$\dot{U}_\tau \leq - \begin{bmatrix} |e| \\ |\dot{e}| \\ |\tilde{\vartheta}| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |e| \\ |\dot{e}| \\ |\tilde{\vartheta}| \end{bmatrix}, \quad (74)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \alpha K_p - \alpha N, \\ Q_{12} &= -\frac{1}{2}N, \\ Q_{13} &= -\frac{1}{2}\alpha K_d, \\ Q_{21} &= -\frac{1}{2}N, \\ Q_{22} &= B - \alpha M, \\ Q_{23} &= 0, \\ Q_{31} &= -\frac{1}{2}\alpha K_d, \\ Q_{32} &= 0, \\ Q_{34} &= K_d. \end{aligned}$$

Usando el criterio de Sylvester (Kelly et al., 2005) es posible demostrar que el lado derecho de (74) es una función semidefinida negativa. Así invocando el lema de Barbalat (Khalil, H., 1996), se demuestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} |e| \\ |\dot{e}| \\ |\tilde{\vartheta}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Por lo tanto, las estimaciones para la parte mecánica son

$$\dot{\hat{\theta}}_{\tau 1} = \frac{d}{dt} \hat{M} = \Gamma_{\tau 1} \ddot{q}_d [\dot{e} + \alpha e], \quad (76)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{\tau 2} = \frac{d}{dt} \hat{B} = \Gamma_{\tau 2} \dot{q}_d [\dot{e} + \alpha e], \quad (77)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{\tau 3} = \frac{d}{dt} \hat{N} = \Gamma_{\tau 3} \sin(q_d) [\dot{e} + \alpha e]. \quad (78)$$

V. RESULTADOS

Para probar el funcionamiento oportuno de los controladores adaptables se realizaron las simulaciones pertinentes con el modelo de un motor de corriente directa sin escobillas, que cuenta con los parámetros reales de un motor. La tabla I muestra los valores de los parámetros del motor.

La trayectoria deseada en ambos controladores es

$$q_d(t) = 2 \sin(4t) + 1.5 [\text{rad}]. \quad (79)$$

TABLA II
GANANCIAS DE CONTROL Y DE ADAPTACIÓN PARA EL CONTROLADOR DE DAWSON ET AL.(1998)

α	0.2	K_1	2.3	K_s	5.0	K_2	2.0
$\Gamma_{\tau 1}$	0.01	$\Gamma_{\tau 2}$	0.01	$\Gamma_{\tau 3}$	0.01	Γ_b	0.01
Γ_{e1}	0.01	Γ_{e2}	0.05	Γ_{e3}	0.02	Γ_{e4}	0.01
Γ_k	0.05	-	-	-	-	-	-

V-A. Simulaciones del controlador adaptable de Dawson et al (1988).

Las ganancias de control y las ganancias de adaptación del controlador se muestran en la tabla II.

A continuación se muestran los resultados de simulaciones. La figura 1 ilustra la comparación de la posición $q(t)$ del modelo real y la posición deseada $q_d(t)$, la figura 2 muestra los parámetros estimados de la parte mecánica $\hat{M}(t)$, $\hat{B}(t)$ y $\hat{N}(t)$ y en las figuras 3 y 4 se muestran los parámetros estimados de la parte eléctrica.

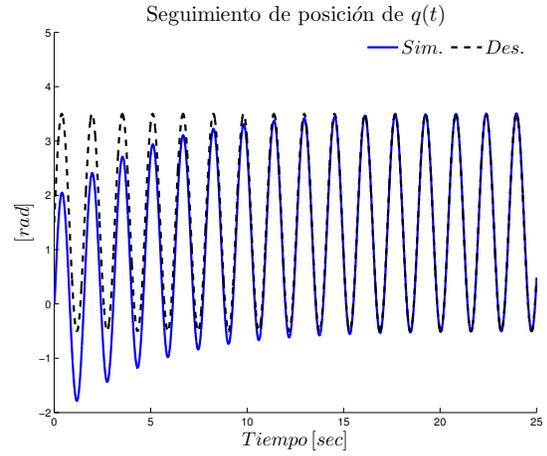


Figura 1. C. Dawson et al. (1998): Seguimiento de posición

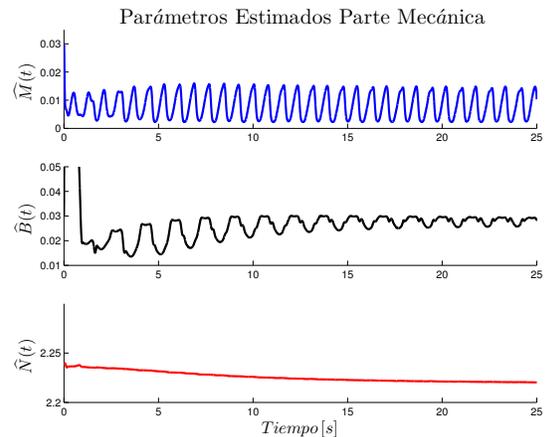


Figura 2. C. Dawson et al. (1998): Parámetros mecánicos del motor

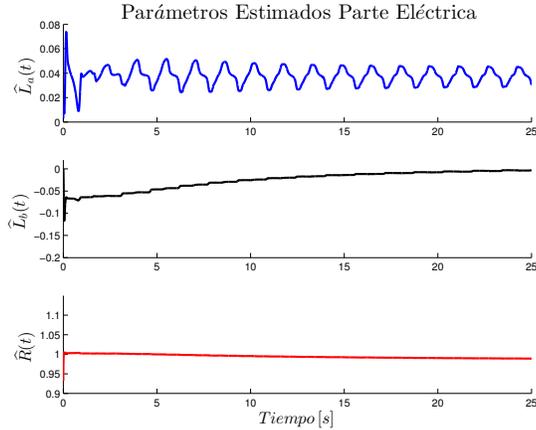


Figura 3. C. Dawson et al. (1998): Parámetros eléctricos de motor

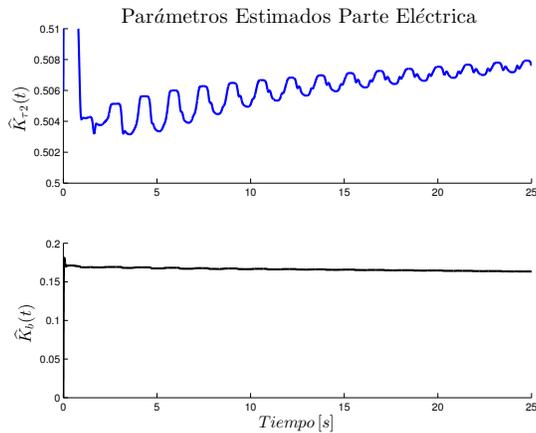


Figura 4. C. Dawson et al. (1998): Parámetros eléctricos de motor

Finalmente en la figura 5 se muestra la evolución del seguimiento de corrientes en las fases a y b .

Para complementar el resultado se muestra en la tabla III una comparación de los máximos errores obtenidos durante $20 \leq t \leq 25[s]$ para $e(t)$, $\dot{e}(t)$, $\eta_a(t)$ y $\eta_b(t)$.

V-B. Simulaciones del controlador adaptable propuesto

El controlador propuesto tiene una adaptación de 7 parámetros. Las ganancias de control y las ganancias de adaptación, se muestran en las tablas IV.

Los resultados de las simulaciones se muestran a continuación. La figura 6 ilustra la comparación de la posición $q(t)$ del modelo real y la posición deseada $q_d(t)$. La figura

TABLA III

ÍNDICES DE DESEMPEÑO PARA EL CONTROLADOR DE DAWSON ET AL. (1998)

Índice	Valor	Unidad
$\max\{ e(t) \} \forall 20 \leq t \leq 25$	0.04	[rad]
$\max\{ \dot{e}(t) \} \forall 20 \leq t \leq 25$	0.01	[rad/s]
$\max\{ \eta_a(t) \} \forall 20 \leq t \leq 25$	0.04	[Amp]
$\max\{ \eta_b(t) \} \forall 20 \leq t \leq 25$	0.02	[Amp]

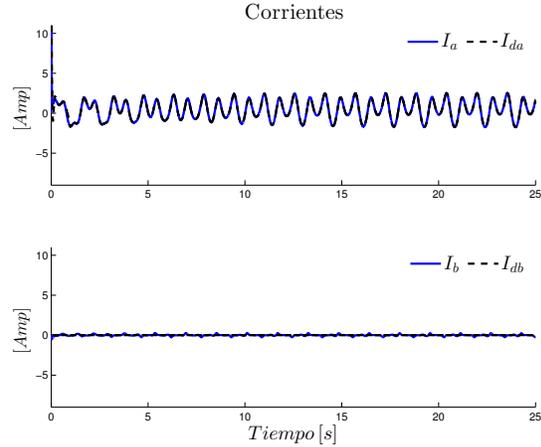


Figura 5. C. Dawson et al. (1998): Corrientes de la fase a y b

TABLA IV

GANANCIAS DE CONTROL Y ADAPTACIÓN PARA EL CONTROLADOR ADAPTABLE PROPUESTO

α	0.2	K_f	1000.0
K_d	1.0	K_p	3.0
K_{pa}	1.0	K_{pb}	1.0
K_{ia}	1.0	K_{ib}	1.0
$\Gamma_{\tau 1}$	0.01	$\Gamma_{\tau 2}$	0.01
$\Gamma_{\tau 3}$	0.01	Γ_{e1}	0.02
Γ_{e2}	0.03	Γ_{e3}	0.01
Γ_{e4}	0.01	—	—

7 muestra los parámetros estimados de la parte mecánica $\hat{M}(t)$, $\hat{B}(t)$ y $\hat{N}(t)$. En las figuras 8 se muestran los parámetros estimados de la parte eléctrica.

Finalmente en la figura 9 se muestra la evolución del seguimiento de corrientes en las fases a y b .

Para complementar los resultados la tabla V muestra una comparación de los errores máximos obtenidos durante $20 \leq t \leq 25[s]$ para $e(t)$, $\dot{e}(t)$, $\eta_a(t)$ y $\eta_b(t)$.

VI. CONCLUSIONES

En el presente artículo se ha propuesto un nuevo controlador adaptable de seguimiento de trayectorias para un motor de CD, que cuenta con un menor número de parámetros de adaptación comparado con el controlador reportado por (Dawson et al., 1998). Así mismo, se ha comprobado el seguimiento adecuado de las trayectorias deseadas en ambos controladores, la disminución del error en el controlador propuesto y además un menor tiempo en la adaptación del seguimiento de trayectoria. Para asegurar que

TABLA V

ÍNDICES DE DESEMPEÑO PARA EL CONTROLADOR PROPUESTO

Índice	Valor	Unidad
$\max e(t) \forall 20 \leq t \leq 25$	0.03	[rad]
$\max \dot{e}(t) \forall 20 \leq t \leq 25$	0.1	[rad/s]
$\max \eta_a(t) \forall 20 \leq t \leq 25$	0.01	[Amp]
$\max \eta_b(t) \forall 20 \leq t \leq 25$	0.01	[Amp]

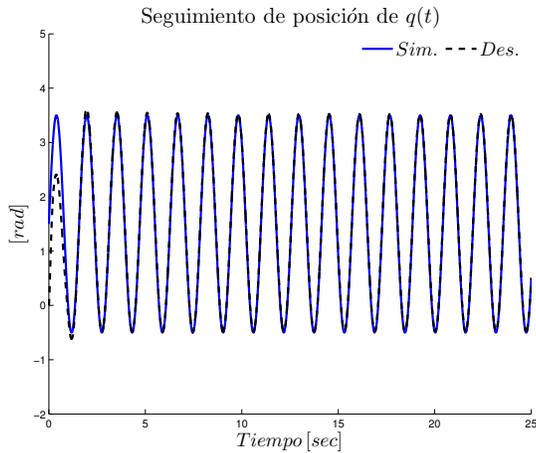


Figura 6. Controlador propuesto: Seguimiento de posición

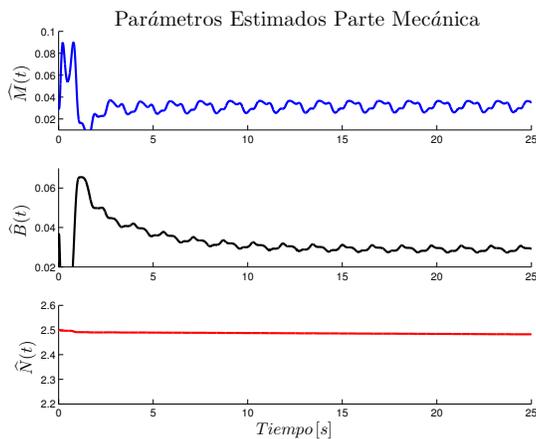


Figura 7. Controlador propuesto: Parámetros mecánicos del motor

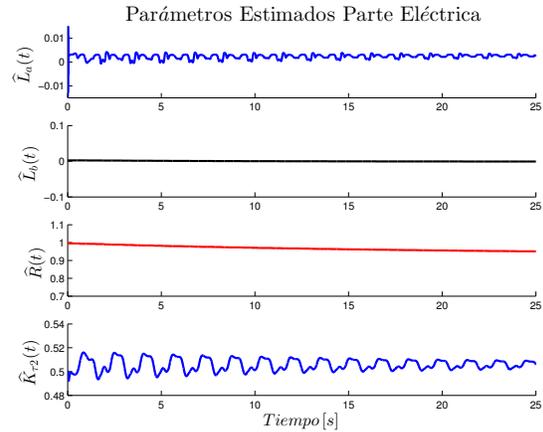


Figura 8. Controlador propuesto: Parámetros eléctricos de motor

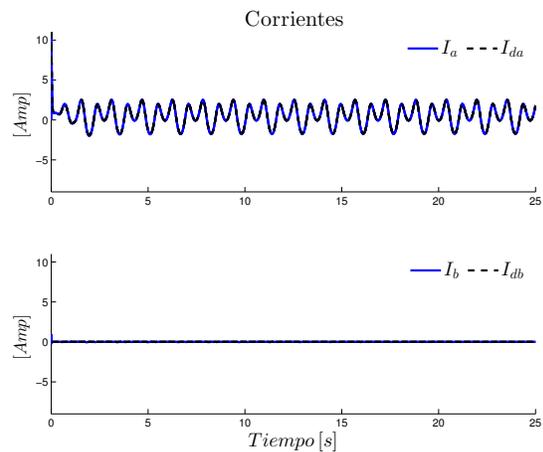


Figura 9. Controlador propuesto: Corrientes fase a y b

los parámetros estimados del motor lleguen a converger más rápido al valor real, se pueden implementar proyectores. No se presentan detalles acerca de los criterios de elección de ganancias ya que este criterio se piensa abordar con la implementación de los controladores en una plataforma experimental.

Cabe mencionar que para las condiciones en que se simularon ambos controladores, el mejor resultado en el seguimiento de la trayectoria deseada fue obtenido por el controlador propuesto en las ecuaciones (35)-(36) y (63).

REFERENCIAS

Aguilar, C. , Quevedo, Y. , Guzman, J. y Moreno, J. (2012). Control por modelo de referencia adaptable para un motor de CD con carga pendular. *Memorias del XIV Congreso Mexicano de Robótica*.
 Dawson, D. , Hu, J. y Burg, T. (1998). *Nonlinear control of electronic machinery*. Marcel Dekker. New York.
 Furuhashi, T. y Okuma, S. (1992). A position-and-velocity sensorless control for brushless DC motors using and adaptive sliding mode observer. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 39, No. 2, pp.89-95.
 Furuhashi, T. , Sangwonwanich, S. y Okuma, S. (1990). A position and velocity sensorless control for brushless DC motors using and adaptive sliding observer. *Memorias del 16th Annual Conference of*

IEEE Industrial Electronics Society, 1990. IECON'90., Vol. 2, pp. 1188-1192.
 Kelly, R. , Santibáñez, V. y Loría, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer. Londres.
 Khalil, H. (1996). *Nonlinear systems*. Prentice Hall. New Jersey.
 Kim, K. , Baik, I. , Chung, S. y Youn, M. (1997). Robust speed control of brushless DC motor using adaptive input-output linearisation technique. *IEE Proc.-Electr. Power Appl.*, Vol. 144, No. 6, pp. 469-475.
 Langarica, D. (2010). *Control de un motor brushless para aplicación a vehículos eléctricos*. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. Morelos, México.
 Lui, Y. y Zhu, Z. (2005). Direct torque control of brushless DC drives with reduced torque ripple. *IEEE Transactions on Industry Applications* , Vol. 41 No.2, pp. 599-608.
 Melkote, H. y Khorrami, F. (1999). Nonlinear adaptive control of direct-drive brushless DC motor and applications to robotic manipulators. *IEEE/ASME Transaction on Mechatronics*, Vol. 4, No. 1, pp. 71-81.
 Roslin, A. y George, M. (2011). Brushless DC motor control using digital PWM techniques. *Memorial del 2011 International Conference on Signal Processing, Communication, Computing and Networking Technologies (ICSCCN 2011)*, pp. 733-738.
 Salas, F. (2007). *Modelado y control de motores de CD sin escobillas*. Instituto Tecnológico de la Laguna. Torreón, México.
 Sozer, Y. , Kaufman, H. y Torrey D. (1997). Direct model reference adaptive control of permanent magnet brushless DC motor. *Memorias del 1997 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 633-638.