

Controlador de ganancias programadas aplicado a la estabilización de una bicicleta sin conductor

J. A. Brizuela-Mendoza, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico-cenidet
Cuernavaca, Morelos, México. ja_briz@cenidet.edu.mx
A. Zavala-Río, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica-IPICYT
San Luis Potosí, San Luis Potosí, México. azavala@ipicyt.edu.mx
C. M. Astorga-Zaragoza, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico-cenidet
Cuernavaca, Morelos, México. astorga@cenidet.edu.mx

Resumen—Se presentan resultados obtenidos del diseño de control mediante la metodología de ganancias programadas (*gain scheduling*) aplicado a una bicicleta. Esto permite a través de un torque aplicado al manubrio, mantener la posición vertical de la bicicleta con variación decreciente en la velocidad traslacional, parámetro considerado como variable de programación. Se aborda el desarrollo de las ganancias de control generalizadas para la instrumentación de cualquier prototipo bajo las mismas consideraciones de modelado además del análisis de controlabilidad y observabilidad.

Palabras clave: Ganancias programadas, variable de programación, control de una bicicleta.

I. INTRODUCCIÓN

La metodología de ganancias programadas es una técnica de diseño para el control de sistemas no lineales. Este método permite la aplicación de herramientas lineales basado en un conjunto de modelos lineales que aproximan la dinámica del sistema no lineal original, bajo la consideración de un parámetro (o un conjunto de parámetros) denominado variable de programación. Una descripción del método de ganancias programadas puede ser consultada en (Rugh, Shamma, 2000). El comportamiento dinámico de la bicicleta, por su parte, representa un desafío en el diseño de controladores debido a que la estabilidad del sistema depende de la velocidad traslacional, cuyo valor varía a lo largo del movimiento realizado. A este respecto, la literatura existente presenta controladores que permiten, mediante la manipulación del manubrio y la llanta trasera, el seguimiento de trayectorias definidas (Marsden, Getz, 1995) o el balanceo de la bicicleta a lo largo de velocidades deseadas. Trabajos que incorporan elementos adicionales con el objetivo de mantener la verticalidad de la bicicleta (balancines) son abordadas en (Yamakita, Utano, 2005) y (Keo, Yamakita, 2009) bajo el uso de controladores no lineales. En (Lei, Liao, Wei, Yonghua, 2010) se presenta el modelado a través del método de Lagrangiano, tomando como entradas un torque aplicado al manubrio y a la

llanta trasera; se diseñan además controladores no lineales para mantener la estabilidad del vehículo. La metodología de modos deslizantes también ha sido utilizada con el mismo propósito. En (Yu, Yeh, 2011) se propone el uso de este método incorporando acciones integrales y redes neuronales, mientras que en (Defoort, Murakami, 2009) se trata la estabilización robusta hacia trayectorias deseadas predefinidas. Haciendo uso de las metodologías de diseño de control inteligente, en (Dao, Chen, 2006) se presentan algoritmos basados en lógica difusa para recobrar la verticalidad mediante la manipulación del manubrio, mientras que (Wei, Zhuang, Guo, Liao, 2009) adopta reguladores Lineales Cuadráticos (LQ) para la estabilización a velocidades altas. Si bien los trabajos mencionados con anterioridad aplican al caso de estudio, las investigaciones reportadas en (Andreo, Larsson, Cerone, Legruto, 2010) y (Dzung, Legruto, Andreo, Cerone, 2009) tratan modelos que incorporan en su ecuación dinámica la velocidad traslacional. Bajo esta consideración los prototipos utilizados no presentan sistemas de tracción en la llanta trasera; manteniendo como objetivo de control la estabilización de la bicicleta a pesar de una velocidad decreciente, cuestión natural en la evolución del sistema dinámico.

II. MODELO DE LA BICICLETA

El modelo de la bicicleta considerado se fundamenta en (Papadopoulos, Schwab, Meijaard, 2005) y (Meijaard, Papadopoulos, Ruina, Schwab, 2007). El procedimiento generador las ecuaciones de movimiento se basa en la descomposición de la bicicleta en cuatro subsistemas: un marco general que incorpora un cuerpo rígido (conductor), el marco delantero (compuesto por el manubrio) y cada una de las llantas. Bajo este esquema se adoptan grados de libertad referidos al ángulo de balanceo del marco general con respecto a la horizontal ϕ y el ángulo del manubrio δ . Se involucra el efecto que tiene la velocidad traslacional v en los diversos términos de la dinámica, tomando como fuerzas de entrada los torques aplicados al manubrio T_δ

y al ángulo de balanceo T_ϕ . Considerando variaciones pequeñas en las variables mencionadas, el modelo puede aproximarse linealmente a través de la siguiente expresión general.

$$G\ddot{q} + vC_a\dot{q} + (gK_0 + v^2K_1)q = f \quad (1)$$

donde G , C_a , K_0 y K_1 corresponden a matrices constantes de masas, amortiguaciones y rigidez, cuyos valores numéricos dependen de la geometría física del prototipo instrumentado con $q = [\phi \ \delta]'$ y $f = [T_\phi \ T_\delta]'$. Haciendo $x = [\phi \ \delta \ \dot{\phi} \ \dot{\delta}]'$ y tomando como única fuerza de entrada T_δ se forma la representación en variables de estado del modelo en cuestión.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(v)x + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A(v) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} + a_{32}^*v^2 & a_{33}^*v & a_{34}^*v \\ a_{41} & a_{42} + a_{42}^*v^2 & a_{43}^*v & a_{44}^*v \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

La Ec. (2) determina un conjunto de sistemas lineales parametrizados en la variable de programación v , involucrada polinomialmente.

III. ANÁLISIS DEL MODELO DINÁMICO

III-A. Estabilidad interna

Partiendo de las Ecs. (2-3), se adopta, para efectos ilustrativos de la metodología propuesta, coeficientes matriciales de acuerdo a (Andreo,Larsson,Cerone,Legruto, 2010) bajo la suposición de que las únicas salidas medibles corresponden a δ y $\dot{\phi}$.

$$A(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13.67 & 0.225 - 1.319v^2 & -0.164v & -0.552v \\ 4.857 & 10.81 - 1.125v^2 & 3.621v & -2.388v \end{bmatrix} \quad (4)$$

La Fig. 1 presenta la parte real de los eigenvalores del sistema en lazo abierto para una variación de $v \in [0 \ 5] \frac{m}{seg}$, manifestándose la inestabilidad del sistema a lo largo de casi todo el rango de velocidad aplicado.

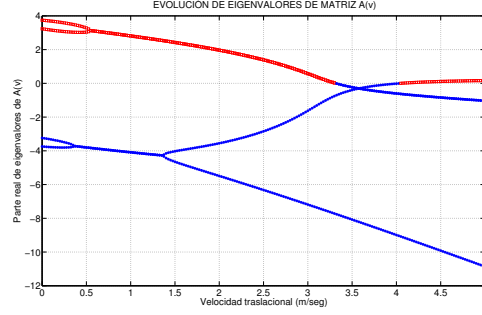


Figura 1. Parte real de los eigenvalores de $A(v)$

III-B. Controlabilidad

Debido a la dependencia en el sistema de la variable de programación, pueden existir valores que generen la condición de pérdida de controlabilidad. En este sentido se presenta el análisis inicialmente en su expresión generalizada y después para los valores numéricos en referencia a la Ec. (4). Formando la matriz de controlabilidad:

$$\Delta_c = [B \ A(v)B \ A^2(v)B \ A^3(v)B] \quad (5)$$

se sabe que la condición para la controlabilidad requiere que $Rank(\Delta_c) = n$ o $|\Delta_c| \neq 0$. Por lo tanto, obteniendo $|\Delta_c|$ (donde $|\ast|$ representa la operación determinante):

$$\begin{aligned} |\Delta_c| &= (\Delta_{C,23}\Delta_{C,31}\Delta_{C,44} - \Delta_{C,23}\Delta_{C,34}\Delta_{C,41} - \\ &\Delta_{C,24}\Delta_{C,31}\Delta_{C,43} + \Delta_{C,24}\Delta_{C,33}\Delta_{C,41})\Delta_{C,12} + \\ &(\Delta_{C,22}\Delta_{C,34}\Delta_{C,41} - \Delta_{C,22}\Delta_{C,31}\Delta_{C,44} + \\ &\Delta_{C,24}\Delta_{C,31}\Delta_{C,42} - \Delta_{C,24}\Delta_{C,32}\Delta_{C,41})\Delta_{C,13} + \\ &(\Delta_{C,22}\Delta_{C,31}\Delta_{C,43} - \Delta_{C,22}\Delta_{C,33}\Delta_{C,41} - \\ &\Delta_{C,23}\Delta_{C,31}\Delta_{C,42} + \Delta_{C,23}\Delta_{C,32}\Delta_{C,41})\Delta_{C,14} \end{aligned} \quad (6)$$

y haciendo uso de valores numéricos para la matriz de entradas $B = [0 \ 0 \ -0.339 \ 7.457]'$ de (Andreo,Larsson,Cerone,Legruto, 2010), se tienen los siguientes resultados.

$$\Delta_c = \begin{bmatrix} 0 & -0.339 & -4.0607v \\ 0 & 7.457 & -19.0348v \\ -0.339 & -4.0607v & 1.3374v^2 - 2.9563 \\ 7.457 & -19.0348v & 22.3624v^2 + 78.964 \\ & & 1.3374v^2 - 2.9563 \\ & & 22.3624v^2 + 78.964 \\ & & 12.5436v^3 - 102.8953v \\ & & -27.1445v^3 - 424.7592v \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$|\Delta_c| = -5806.5321v^4 + 19463.1274v^2 - 22.3115 \quad (8)$$

Considerando $|\Delta_c| = 0$ es generado el siguiente conjunto de valores de v que producen la pérdida de controlabilidad. Dentro de estos valores críticos se toman únicamente las raíces reales positivas, situación aplicada de igual forma al análisis de observabilidad.

$$v \in \{1.83051628, 0.033863576\} \quad (9)$$

III-C. Observabilidad

Tomando δ y $\dot{\phi}$ como salidas medibles se presenta el análisis de observabilidad para cada una de ellas, con el objetivo de determinar valores de v que generan la pérdida de dicha condición en el modelo.

Haciendo $C_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$, construyendo la matriz de observabilidad:

$$\Delta_{o1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A(v) \\ C_1 A^2(v) \\ C_1 A^3(v) \end{bmatrix} \quad (10)$$

y procediendo de forma similar que en el caso de controlabilidad, se tiene:

$$\begin{aligned} |\Delta_{o1}| &= \Delta_{o1,33}\Delta_{o1,41} - \Delta_{o1,31}\Delta_{o1,43} \\ &= 182.1204v^2 - 23.5904 \end{aligned} \quad (11)$$

con raíz:

$$v = 0.35991 \quad (12)$$

Finalmente tomando $C_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$:

$$\Delta_{o2} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A(v) \\ C_2 A^2(v) \\ C_2 A^3(v) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\Delta_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta_{o2,21} & \Delta_{o2,22} & \Delta_{o2,23} & \Delta_{o2,24} \\ \Delta_{o2,31} & \Delta_{o2,32} & \Delta_{o2,33} & \Delta_{o2,34} \\ \Delta_{o2,41} & \Delta_{o2,42} & \Delta_{o2,43} & \Delta_{o2,44} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{o2}| &= (\Delta_{o2,32}\Delta_{o2,44} - \Delta_{o2,34}\Delta_{o2,42})\Delta_{o2,21} \\ &+ (\Delta_{o2,34}\Delta_{o2,41} - \Delta_{o2,31}\Delta_{o2,44})\Delta_{o2,22} \\ &+ (\Delta_{o2,31}\Delta_{o2,42} - \Delta_{o2,32}\Delta_{o2,41})\Delta_{o2,24} \\ &= 3.0854v^6 - 82.6582v^4 + 527.1539v^2 \\ &- 7.4256 \end{aligned} \quad (15)$$

$$v \in \{4.04326, 3.22923, 0.11882\} \quad (16)$$

Por lo tanto se tiene la condición de pérdida de observabilidad en los valores de v :

$$v \in \{0.35991, 4.04326, 3.22923, 0.11882\} \quad (17)$$

IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El diseño del controlador involucra el método de reubicación de polos. El objetivo de control consiste en, partiendo de cualesquiera condiciones iniciales para los ángulos de balanceo ϕ y manubrio δ , además de la velocidad v , mantener la posición vertical de la bicicleta. Se propone una ley de control por retroalimentación de estados:

$$u = -k(v)x \quad (18)$$

tal que sean posicionados los eigenvalores del lazo cerrado del sistema:

$$\dot{x} = (A(v) - Bk(v))x \quad (19)$$

con:

$$k(v) = [k_1(v) \ k_2(v) \ k_3(v) \ k_4(v)] \quad (20)$$

en un polinomio Hurwitz:

$$P = \lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 \quad (21)$$

donde los subíndices p_i $i = 3, \dots, 0$ determinan los eigenvalores característicos de un comportamiento dinámico definido. El procedimiento de diseño parte de la forma generalizada que adopta el sistema presentado en la Ec. (3) y lleva a cabo los siguientes pasos:

- Obtener la matriz de estado de sistema en lazo cerrado (Ec. (19)).

$$\bar{A}(v) = (A(v) - Bk(v)) \quad (22)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{31} - b_3k_1(v) & a_{32}^*v^2 + a_{32} - b_3k_2(v) \\ a_{41} - b_4k_1(v) & a_{42}^*v^2 + a_{42} - b_4k_2(v) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_{33}^*v - b_3k_3(v) & a_{34}^*v - b_3k_4(v) \\ a_{43}^*v - b_4k_3(v) & a_{44}^*v - b_4k_4(v) \end{bmatrix} \quad (23)$$

- Calcular $\lambda I - \bar{A}(v)$, donde I corresponde a la matriz identidad de dimensiones compatibles.

$$\lambda I - \bar{A}(v) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \\ -\bar{A}_{31}(v) & -\bar{A}_{32}(v) \\ -\bar{A}_{41}(v) & -\bar{A}_{42}(v) \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \lambda - \bar{A}_{33}(v) & -\bar{A}_{34}(v) \\ -\bar{A}_{43}(v) & \lambda - \bar{A}_{44}(v) \end{bmatrix} \quad (24)$$

- Obtener $|\lambda I - \bar{A}(v)|$ y factorizar en términos de λ .

$$|\lambda I - \bar{A}(v)| = \lambda^4 + (-\bar{A}_{33} - \bar{A}_{44})\lambda^3 + (\bar{A}_{33}\bar{A}_{44} - \bar{A}_{34}\bar{A}_{43} - \bar{A}_{42} - \bar{A}_{31})\lambda^2 + (\bar{A}_{31}\bar{A}_{44} - \bar{A}_{32}\bar{A}_{43} - \bar{A}_{41}\bar{A}_{34} + \bar{A}_{33}\bar{A}_{42})\lambda + \bar{A}_{31}\bar{A}_{42} - \bar{A}_{32}\bar{A}_{41} \quad (25)$$

- Generar la Ec. (25) en términos de la matriz en lazo cerrado del sistema.

$$= \lambda^4 + ((-a_{33}^* - a_{44}^*)v + b_3k_3 + b_4k_4)\lambda^3 + ((a_{33}^*a_{44}^* - a_{42}^* - a_{34}^*a_{43}^*)v^2 + ((a_{34}^*b_4 - a_{44}^*b_3)k_3 - (a_{33}^*b_4 - a_{43}^*b_3)k_4)v + b_3k_1 - a_{42} - a_{31} + b_4k_2)\lambda^2 + ((a_{33}^*a_{42}^* - a_{32}^*a_{43}^*)v^3 + (a_{32}^*b_4 - a_{42}^*b_3)k_3v^2 + (a_{31}a_{44}^* - a_{32}a_{43}^* - (a_{33}^*b_4 - a_{43}^*b_3)k_2 + (a_{34}^*b_4 - a_{44}^*b_3)k_1 + a_{33}^*a_{42} - a_{34}^*a_{41})v + (a_{32}b_4 - a_{42}b_3)k_3 + (a_{41}b_3 - a_{31}b_4)k_4)\lambda + (a_{31}a_{42}^* - a_{32}^*a_{41} + (a_{32}^*b_4 - a_{42}^*b_3)k_1)v^2 + a_{31}a_{42} + (a_{32}b_4 - a_{42}b_3)k_1 + (a_{41}b_3 - a_{31}b_4)k_2 - a_{32}a_{41} \quad (26)$$

- Acomodar en forma matricial lo obtenido en la Ec. (26) igualando a P y despejando en k_i $i = 1, \dots, 4$, de acuerdo a:

$$m \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = y \quad (27)$$

donde:

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & b_4 \\ (a_{34}^*b_4 - a_{44}^*b_3)v & -(a_{33}^*b_4 - a_{43}^*b_3)v \\ \{(a_{32}^*b_4 - a_{42}^*b_3)v^2 + a_{32}b_4 - a_{42}b_3\} & a_{41}b_3 - a_{31}b_4 \\ b_3 & b_4 \\ (a_{34}^*b_4 - a_{44}^*b_3)v & -(a_{33}^*b_4 - a_{43}^*b_3)v \\ \{(a_{32}^*b_4 - a_{42}^*b_3)v^2 + a_{32}b_4 - a_{42}b_3\} & a_{41}b_3 - a_{31}b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$y = \begin{bmatrix} p_3 + (a_{33}^* + a_{44}^*)v \\ p_2 + (a_{42}^* - a_{33}^*a_{44}^* + a_{34}^*a_{43}^*)v^2 + a_{31} + a_{42} \\ \{p_1 + (a_{32}^*a_{43}^* - a_{33}^*a_{42}^*)v^3 + (a_{32}a_{43}^* - a_{31}a_{44}^* - a_{33}^*a_{42} + a_{34}^*a_{41})v\} \\ p_0 + (a_{32}^*a_{41} - a_{31}a_{42}^*)v^2 - a_{31}a_{42} + a_{32}a_{41} \end{bmatrix} \quad (29)$$

- Despejar el vector de incógnitas k , denotando los términos en las Ecs. (28-29) de forma tal que:

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = m^{-1}y \quad (31)$$

- Obtener m^{-1} en términos de (30), considerando $m^{-1}(i)$ $i = 1, \dots, 4$ como los vectores columna de m^{-1} :

$$m^{-1} = \frac{1}{|m|} [m^{-1}(1) \quad m^{-1}(2) \quad m^{-1}(3) \quad m^{-1}(4)] \quad (32)$$

donde:

$$m^{-1}(1) = \begin{bmatrix} m_{42}(m_{23}m_{34} - m_{24}m_{33}) \\ -m_{41}(m_{23}m_{34} - m_{24}m_{33}) \\ \{(m_{24}m_{31} - m_{21}m_{34})m_{42} + (m_{22}m_{34} - m_{24}m_{32})m_{41}\} \\ \{(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31})m_{42} + (m_{23}m_{32} - m_{22}m_{33})m_{41}\} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$m^{-1}(2) = \begin{bmatrix} -m_{42}(m_{13}m_{34} - m_{14}m_{33}) \\ m_{41}(m_{13}m_{34} - m_{14}m_{33}) \\ -m_{14}(m_{31}m_{42} - m_{32}m_{41}) \\ m_{13}(m_{31}m_{42} - m_{32}m_{41}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$m^{-1}(3) = \begin{bmatrix} m_{42}(m_{13}m_{24} - m_{14}m_{23}) \\ -m_{41}(m_{13}m_{24} - m_{14}m_{23}) \\ m_{14}(m_{21}m_{42} - m_{22}m_{41}) \\ -m_{13}(m_{21}m_{42} - m_{22}m_{41}) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$m^{-1}(4) = \begin{bmatrix} \{(m_{23}m_{32} - m_{22}m_{33})m_{14} + (m_{22}m_{34} - m_{24}m_{32})m_{13}\} \\ \{(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31})m_{14} + (m_{24}m_{31} - m_{21}m_{34})m_{13}\} \\ (m_{22}m_{31} - m_{21}m_{32})m_{14} \\ (m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})m_{13} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$|m| = (m_{13}m_{24}m_{31} - m_{13}m_{21}m_{34} + m_{14}m_{21}m_{33} - m_{14}m_{23}m_{31})m_{42} + (m_{13}m_{22}m_{34} - m_{13}m_{24}m_{32} - m_{14}m_{22}m_{33} + m_{14}m_{23}m_{32})m_{41} \quad (37)$$

- Determinar las expresiones finales para k_i $i = 1, \dots, 4$.

$$k_1 = (m_{42}(m_{23}m_{34} - m_{24}m_{33})y_1 - m_{42}(m_{13}m_{34} - m_{14}m_{33})y_2 + m_{42}(m_{13}m_{24} - m_{14}m_{23})y_3 + ((m_{23}m_{32} - m_{22}m_{33})m_{14} + (m_{22}m_{34} - m_{24}m_{32})m_{13})y_4) \left(\frac{1}{|m|} \right) \quad (38)$$

$$k_2 = (-m_{41}(m_{23}m_{34} - m_{24}m_{33})y_1 + m_{41}(m_{13}m_{34} - m_{14}m_{33})y_2 - m_{41}(m_{13}m_{24} - m_{14}m_{23})y_3 + ((m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31})m_{14} + (m_{24}m_{31} - m_{21}m_{34})m_{13})y_4) \left(\frac{1}{|m|} \right) \quad (39)$$

$$k_3 = ((m_{24}m_{31} - m_{21}m_{34})m_{42} + (m_{22}m_{34} - m_{24}m_{32})m_{41})y_1 - m_{14}(m_{31}m_{42} - m_{32}m_{41})y_2 + m_{14}(m_{21}m_{42} - m_{22}m_{41})y_3 - ((m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})m_{14})y_4) \left(\frac{1}{|m|} \right) \quad (40)$$

$$k_4 = ((m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31})m_{42} + (m_{23}m_{32} - m_{22}m_{33})m_{41})y_1 + m_{13}(m_{31}m_{42} - m_{32}m_{41})y_2 - m_{13}(m_{21}m_{42} - m_{22}m_{41})y_3 + ((m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31})m_{13})y_4) \left(\frac{1}{|m|} \right) \quad (41)$$

V. RESULTADOS

La Fig. 2 presenta los eigenvalores en lazo cerrado haciendo uso de un polinomio Hurwitz con raíces en $\lambda_i = -1, -3, -5, -7$ $i = 1, \dots, 4$ bajo el rango de velocidad $v \in [1 \text{ } 1.8] \frac{m}{seg}$.

$$P = \lambda^4 + 16\lambda^3 + 86\lambda^2 + 176\lambda + 105 \quad (42)$$

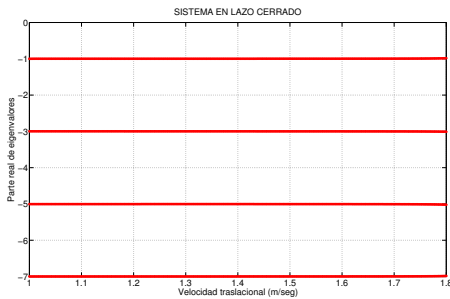


Figura 2. Parte real de eigenvalores en lazo cerrado en función de v

La Fig. 3 presenta, por su parte, las ganancias de controlador en función de v además de la variación de

la variable de programación. La evolución del sistema controlado bajo una condición inicial en el ángulo de balanceo $\phi = -2.25$ se observa en la Fig. 4. Se utiliza filtración e integración numérica para el resto del vector de estados.

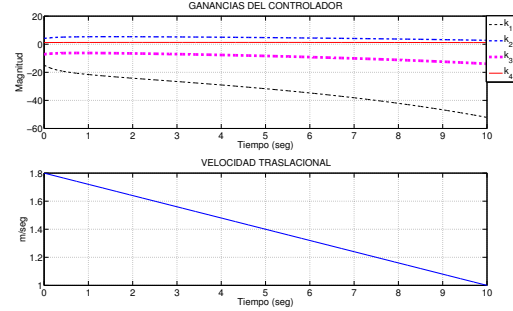


Figura 3. Ganancias de control y variación de v

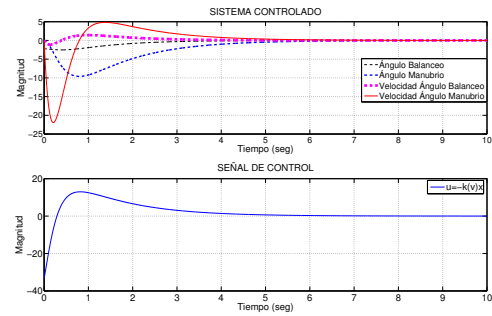


Figura 4. Evolución del sistema controlado y señal de control

Las Figs. 5-7, por su parte, presentan los resultados obtenidos utilizando $\lambda_i = -4, -4, -6, -7$ $i = 1, \dots, 4$, un rango de velocidad $v \in [0.6 \text{ } 1.4] \frac{m}{seg}$ y condición inicial para $\phi = 1.5$.

$$P = \lambda^4 + 21\lambda^3 + 162\lambda^2 + 544\lambda + 672 \quad (43)$$

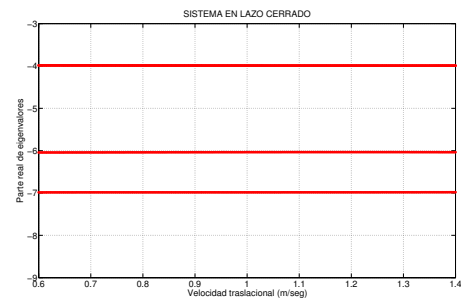


Figura 5. Parte real de eigenvalores en lazo cerrado en función de v

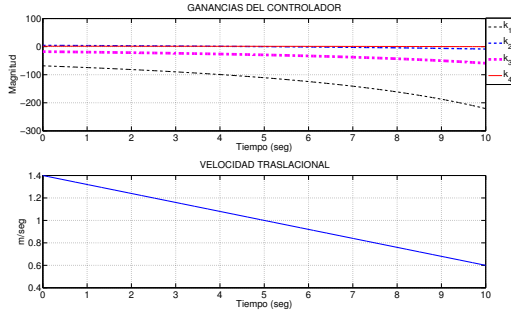


Figura 6. Ganancias de control y variación de v

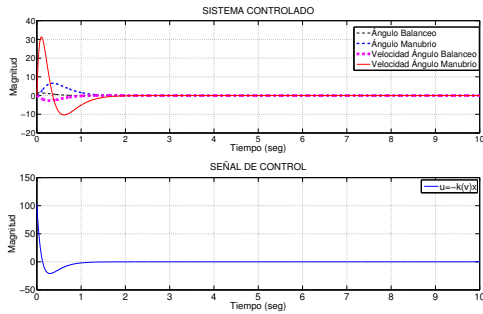


Figura 7. Evolución del sistema controlado y señal de control

Finalmente con el objetivo de verificar el análisis realizado en la sección III-B se presenta, en la Fig. 8, las ganancias de control y variación de v para $v \in [1.4 \ 2.2] \frac{m}{seg}$ utilizando la Ec. (44). Es posible visualizar la pérdida de controlabilidad en el sistema en $v \approx 1.83$, manifestándose en el transitorio de las ganancias de control.

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -1, -7, -9, -17 \quad i = 1, \dots, 4 \\ P &= \lambda^4 + 34\lambda^3 + 368\lambda^2 + 1406\lambda + 1071 \end{aligned} \quad (44)$$

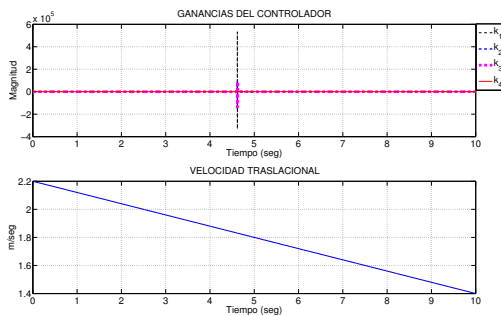


Figura 8. Ganancias de control y variación de v

VI. CONCLUSIONES

La técnica de control por ganancias programadas es una metodología para sistemas no lineales que ha mantenido

su aplicación con el paso del tiempo. En el presente artículo se muestran los resultados de la aplicación de un control basado en esta metodología al modelo dinámico de una bicicleta. Se concluye, a partir de los resultados observados, que este diseño permite estabilizar en buena medida al sistema bajo la consideración de una variación lenta en la velocidad traslacional. Con respecto a trabajos anteriores, la metodología presentada involucra un enfoque analítico que evita la necesidad de soluciones basadas en aproximaciones numéricas, relativas principalmente, a las Desigualdades Matriciales Parametrizadas.

VII. AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (conacyt). El primer autor agradece al Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica (IPICYT) por su apoyo.

REFERENCIAS

- Wilson J. Rugh, Jeff S. Shamma. *Research on gain Scheduling*. Automatica, 36:1401-1405,2000.
- Jerrold E. Marsden, Neil H. Getz (1995). *Control for an autonomous bicycle*. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1995
- Masaki Yamakita, Atsuo Utano (2005). *Automatic control of bicycles with a balancer*. IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 2005.
- Lychee Keo, Masaki Yamakita (2009). *Controller Design of an autonomous bicycle with both steering and balancer controls*. IEEE Multiconference on Systems and Control, 2009.
- Guo Lei, Qizheng Liao, Shimin Wei, Huang Yonghua (2010). *A kind of bicycle robot dynamic modeling and nonlinear control*. In International Conference on Information and Automation, 2010.
- Wen-Shyong Yu, Chan-Chin Yeh (2011). *Steering and balance controls of an electrical bicycle using integral sliding mode control*. In International Conference on Robotics and Automation, 2011.
- Michael Defoort, Toshiyuki Murakami (2009). *Sliding-mode control scheme for an intelligent bicycle*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 56,9:3357-3368,2009.
- Thanh-Son Dao, Chih-Keng Chen (2006). *Fuzzy control for equilibrium and roll-angle tracking of an unmanned bicycle*. Multibody System Dynamics, 15:321-346,2006.
- Shimin Wei, Yufeng Zhuang, Lei Guo, Qizheng Liao (2009). *Design of linear quadratic optimal controller for bicycle robot*. IEEE International Conference on Automation and Logistics, 2009.
- Davide Andreo, Mats Larsson, Vito Cerone, Diego Legruto (2010). *Stabilization of a riderless bicycle: A Linear Parameter Varying Approach*. IEEE Control Systems Magazine,30:23-32,2010.
- D. Dzung, D. Legruto, D. Andreo, V. Cerone (2009). *Experimental results on LPV stabilization of a riderless bicycle*. American Control Conference, 2009.
- J. M. Papadopoulos, A. L. Schwab, J.P. Meijaard (2005). *Benchmark results on the linearized equations of motion of an uncontrolled bicycle*. Journal of Mechanical Science and Technology, 19,1:292-304, 2005.
- J. P. Meijard, J. M. Papadopoulos, A. Ruina, A. L. Schwab (2007). *Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review*. Proceedings of the Royal Society A, 463,2084:1955-1982.