Análisis de Estabilidad de un Controlador de Seguimiento PID de Ganancias Variables para Robots Manipuladores

Francisco Salas, Víctor Santibáñez, Miguel Llama
Instituto Tecnológico de la Laguna
Apdo. Postal 49, Adm. 1, Torreón, Coahuila, 27001, México. Fax: +52 871 7051326
fg_salas@yahoo.com.mx

***Resumen*— En este trabajo se presenta el análisis de estabilidad de un controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) de seguimiento con ganancias P y D variables y ganancia I constante, para robots manipuladores. Con base en la teoría del acotamiento de las soluciones de sistemas no autónomos, se demuestra que, bajo ciertas condiciones para la selección de las cotas de las ganancias, las soluciones del sistema en lazo cerrado están uniforme y finalmente acotadas. Este es un resultado general aplicable a aquellos controladores de robots en los que las ganancias variables estén acotadas, sin tomar en cuenta el mecanismo mediante el cual se ajusten.**

Palabras clave: control PID, control de robots, análisis de estabilidad .

I. Introducción

Desde su aparición, el control PID (Proporcional-Integral-Derivativo) ha sido ampliamente utilizado para controlar gran variedad de sistemas en la industria, la aeronáutica y la navegación. Una de las razones de su popularidad es que no requiere un modelo del proceso o sistema a controlar. Esto es particularmente útil cuando se trata de sistemas cuyo modelo, si se tiene, puede incluir incertidumbres o el sistema está expuesto a perturbaciones grandes. En el caso de sistemas robóticos, aún cuando se han desarrollado controladores que producen excelentes respuestas en control de regulación y seguimiento, como el control PD con compensación de gravedad, control Par calculado, éstos requieren del conocimiento del modelo dinámico del robot. Debido a esto y a su simplicidad de implementación, el control PID se sigue utilizando en muchos robots industriales.

No obstante su adecuado desempeño en muchos casos, el control PID con ganancias fijas no produce tan buenos resultados en sistemas donde se presenta variación de parámetros o condiciones de operación (Kelly y Carelli, 1996), (Ying, 2000), (Meza *et. al*, 2009). Con el objeto de superar esta limitante, se han propuesto una diversidad de esquemas para generar ganancias variables, dependientes de la configuración del sistema o de las condiciones de operación. Algunos están basados en técnicas de control inteligente como el control difuso (Kelly *et al.*, 1999), (Salas y Llama, 2010), (Kazemian, 2008), (Zao *et al.*, 1993), u otras técnicas (Su *et al.*, 2005), (Wang *et al.*, 2001).

Aunque su utilización se está extendiendo, el estudio de la estabilidad de dichos controladores PID con ganancias variables se ha limitado al caso de regulación, cuando el objetivo de control es alcanzar una consigna constante (Meza *et al.*, 2009). En el caso de control de seguimiento, cuando el objetivo de control es alcanzar una consigna variable de movimiento, al conocimiento de los autores, no ha sido reportado el estudio de estabilidad correspondiente.

En el presente trabajo se estudia la estabilidad del control PID considerando dos ganancias variables: ganancia proporcional y ganancia derivativa, aplicado a robots manipuladores rígidos de articulaciones rotatorias. Se supone simplemente que las ganancias variables están acotadas y pueden ser funciones de los estados, aunque esta última suposición no interviene en el resultado. De modo que el resultado es aplicable a aquellos controladores PID de robots en los que las ganancias sean variables, sin importar el algoritmo mediante el cual están variando. El análisis está inspirado en la teoría de sistemas perturbados (Khalil, 2002), y el enfoque presentado en (Camarillo *et al.*, 2008).

En este reporte se utiliza la siguiente notación: $\lambda_{min}(A)$ y $\lambda_{max}(A)$ indican el menor y el mayor valor propio, respectivamente, de una matriz simétrica definida positiva A. La norma del vector $\boldsymbol{y}$ se define como $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}}$. Los vectores se representan con letras negritas pequeñas.

II. Dinámica del Robot

El modelo de un robot rígido con articulaciones rotatorias, sin considerar la fricción, es (Spong *et al.*, 2005), (Kelly y Santibáñez, 2003)

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau} \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ y $\ddot{\boldsymbol{q}}$ son los vectores de $n \times 1$ de posiciones, velocidades y aceleraciones articulares, respectivamente, $\boldsymbol{\tau}$ es el vector de $n \times 1$ de pares aplicados, $M(\boldsymbol{q})$ es la matriz de inercia de $n \times n$ simétrica definida positiva del robot, $C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ es la matriz de $n \times n$ de fuerzas centrífugas y de Coriolis, y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ es el vector de $n \times 1$ de pares gravitacionales. Puesto que en el presente artículo se invocan varias propiedades del modelo (1), a continuación se mencionan.

Propiedad 1: (Spong *et al.*, 2005). Existe una constante $K_M > 0$ tal que:

$$\|M(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\| \leq k_M\|\boldsymbol{y}\| \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

Propiedad 2: (Koditschek, 1984) (Antisimetría). La matriz $C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ y la derivada temporal de la matriz de inercia $\dot{M}(\boldsymbol{q})$ satisfacen:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^T \left[\frac{1}{2}\dot{M}(\boldsymbol{q}) - C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right] \dot{\boldsymbol{q}} = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\dot{M}(\boldsymbol{q}) = C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})^T.$$

Propiedad 3: (Tomei, 1991). Existe una constante positiva k_c tal que para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\|C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{z}\| \leq k_c\|\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{z}\|$$

Propiedad 4: (Kelly y Santibáñez, 2003). Existe una constante positiva k_g tal que:

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\| \leq k_g \quad \forall\, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n.$$

A continuación se mencionan algunas definiciones útiles para el presente análisis.

Definición 1: (Horn y Johnson, 1991). Sea A una matriz simétrica de $n \times n$, con a_{ij} como el elemento correspondiente al renglón i, columna j. Se dice que la matriz A es estrictamente diagonal dominante si:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\,, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Corolario 1: (Hernández-Guzmán *et al.*, 2008). Si A es una matriz simétrica de $n \times n$ y estrictamente diagonal dominante y si $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces A es definida positiva.

Definición 2: (Basada en (Llama *et al.*, 2001)). Una matriz diagonal de ganancias $K_y(\boldsymbol{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene la siguiente estructura:

$$K_y(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} k_{y_1}(y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{y_2}(y_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{y_n}(y_n) \end{bmatrix}.$$

Un resultado importante que es usado en el presente reporte es el siguiente.

Teorema 1: (Khalil, 2002) (p. 172). Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene el origen y sea $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} \sigma_1(\|\boldsymbol{x}\|) \quad &\leq \quad V(t, \boldsymbol{x}) \quad \leq \quad \sigma_2(\|\boldsymbol{x}\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} f(t, \boldsymbol{x}) \quad &\leq \quad -W_3(\boldsymbol{x}), \quad \forall \|\boldsymbol{x}\| \geq \mu > 0 \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, donde σ_1 y σ_2 son funciones clase $\mathcal{K}$[1] y W_3 es una función continua definida positiva. Tómese $r > 0$ tal que $B_r \subset \mathcal{D}$ y supóngase que

$$\mu < \sigma_2^{-1}(\sigma_1(r))$$

Entonces, existe una función ρ, la cual es clase $\mathcal{KL}$ y, para cada estado inicial $\boldsymbol{x}(t_0)$, que satisface $\|\boldsymbol{x}(t_0)\| \leq \sigma_2^{-1}(\sigma_1(r))$, hay un $T \geq 0$ (dependiente de $\boldsymbol{x}(t_0)$ y de μ) tal que la solución de $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, donde $f : [0, \infty) \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, satisface

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}(t)\| \quad &\leq \quad \rho(\|\boldsymbol{x}(t_0)\|, t - t_0), \qquad (2) \\ &\qquad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \\ \|\boldsymbol{x}(t)\| \quad &\leq \quad \sigma_1^{-1}(\sigma_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T \qquad (3) \end{aligned}$$

Aún mas, si $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ y σ_1 pertenece a la clase $\mathcal{K}_\infty$, entonces (2) y (3) se cumplen para cualquier estado inicial $\boldsymbol{x}(t_0)$, sin restricción sobre la magnitud de μ.

III. Control de seguimiento PID

La ley de control PID de seguimiento con ganancias P y D variables es:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{q}} + K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_i\boldsymbol{\eta} \qquad (4)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q_d} - \boldsymbol{q}$ y $\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} = \dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} - \dot{\boldsymbol{q}}$ son los vectores de error de posición y de velocidad, respectivamente, $\boldsymbol{q_d}$ y $\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}$ son los vectores de posición y velocidad deseadas, respectivamente, $K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})$ y $K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})$ son matrices diagonales definidas positivas de ganancias variables proporcionales y derivativas, K_i es la matriz diagonal definida positiva de ganancias integrales constantes, y $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \tilde{\boldsymbol{q}}$. Al aplicar esta ley de control al modelo (1) se tiene la ecuación de lazo cerrado

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ -M(\boldsymbol{q})^{-1}\Big[K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{q}} + K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_i\boldsymbol{\eta} \\ +C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} - M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} - C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\Big] \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Defínase una perturbación

$$\boldsymbol{d}(t, \boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} + C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}), \qquad (6)$$

donde $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^T & \tilde{\boldsymbol{q}}^T & \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T \end{bmatrix}^T$, entonces (5) puede expresarse como

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ -M(\boldsymbol{q})^{-1}\Big[K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{q}} + K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + K_i\boldsymbol{\eta} \\ +C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} - \boldsymbol{d}(t, \boldsymbol{x})\Big] \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Nótese que cuando $\boldsymbol{d}(t, \boldsymbol{x}) = 0$, el origen $\boldsymbol{x} = 0 \in \mathbb{R}^{3n}$ es el único equilibrio del sistema (7). Sin embargo, el origen no puede considerarse como un equilibrio del sistema, ya que la perturbación (6) no se desvanece en el origen. Por lo anterior, en lugar de estudiar la estabilidad del origen, en este reporte se aborda el problema de estudiar el acotamiento de las soluciones $\boldsymbol{x}(t)$ del sistema en lazo cerrado.

IV. Análisis de estabilidad

En esta sección se muestra que es posible encontrar condiciones para que las soluciones del sistema en lazo cerrado de la ecuación (7), que considera un control de seguimiento PID de ganancias proporcionales y derivativas variables, estén acotadas uniforme y finalmente. Es decir,

[1] Para las definiciones de funciones clase $\mathcal{K}$, $\mathcal{KL}$ y $\mathcal{K}_\infty$ véase (Khalil, 2002) p. 144.

se demuestra que la norma del vector de estado permanece por debajo de una cota uniforme, que no depende de t_0, para un tiempo $t_0 < t$.

IV-A. Función candidata de Lyapunov

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) &= \frac{1}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \alpha\boldsymbol{\eta}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ &+\frac{1}{2}\delta\tilde{\boldsymbol{q}}^T\tilde{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T K_i\boldsymbol{\eta} - \beta\boldsymbol{\eta}^T\tilde{\boldsymbol{q}} \end{aligned} \tag{8}$$

donde α, β y δ son constantes positivas.

La función (8) puede acotarse inferiormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) &\geq \frac{1}{2}\lambda_{min}\{M\}\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|^2 + \frac{1}{2}\delta\|\tilde{\boldsymbol{q}}\|^2 \\ &+\frac{1}{2}\lambda_{min}\{K_i\}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \beta\|\boldsymbol{\eta}\|\|\tilde{\boldsymbol{q}}\| \\ &-\alpha\lambda_{max}\{M\}\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|\|\boldsymbol{\eta}\| \end{aligned} \tag{9}$$

En forma matricial (9) puede escribirse:

$$V(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) \geq \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\eta}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| \end{bmatrix}^T P_1 \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\eta}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| \end{bmatrix} \tag{10}$$

donde

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_{min}\{K_i\} & -\beta & -\alpha\lambda_{max}\{M\} \\ -\beta & \delta & 0 \\ -\alpha\lambda_{max}\{M\} & 0 & \lambda_{min}\{M\} \end{bmatrix} \tag{11}$$

De manera similar, la cota superior sobre (8) puede expresarse así:

$$V(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) \leq \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\eta}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| \end{bmatrix}^T P_2 \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\eta}\| \\ \|\tilde{\boldsymbol{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| \end{bmatrix}$$

donde

$$P_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_{max}\{K_i\} & \beta & \alpha\lambda_{max}\{M\} \\ \beta & \delta & 0 \\ \alpha\lambda_{max}\{M\} & 0 & \lambda_{max}\{M\} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Alternativamente, las cotas inferior y superior de $V(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}})$ pueden expresarse como:

$$k_1\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq V(t, \boldsymbol{x}) \leq k_2\|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{13}$$

donde k_1 y k_2 son constantes positivas

$$k_1 = \lambda_{min}\{P_1\}, \quad k_2 = \lambda_{max}\{P_2\}. \tag{14}$$

Nótese en (10) que la función candidata de Lyapunov es definida positiva si la matriz P_1 es definida positiva. Siguiendo el criterio de Sylvester, de los determinantes de P_1 y del primer menor principal de P_1 (submatriz diagonal superior de 2×2), la condición para que $V(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) > 0$ es

$$\lambda_{min}\{K_i\} > \frac{\alpha^2\delta\lambda_{max}^2\{M\} + \beta^2\lambda_{min}\{M\}}{\delta\lambda_{min}\{M\}}. \tag{15}$$

IV-B. Derivada temporal de la función candidata de Lyapunov

Por otra parte, la derivada temporal de (8) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) &= \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T M(\boldsymbol{q})\ddot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T \dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ &+\alpha\dot{\boldsymbol{\eta}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \alpha\boldsymbol{\eta}^T \dot{M}(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ &+\alpha\boldsymbol{\eta}^T M(\boldsymbol{q})\ddot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \delta\tilde{\boldsymbol{q}}^T\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{\eta}^T K_i\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ &-\beta\dot{\boldsymbol{\eta}}^T\tilde{\boldsymbol{q}} - \beta\boldsymbol{\eta}^T\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}, \end{aligned}$$

de la cual, a lo largo de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (7), y aplicando la Propiedad 2 (*antisimetría*), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{\eta}, \tilde{\boldsymbol{q}}, \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) &= -\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{q}} - \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \delta\tilde{\boldsymbol{q}}^T\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \\ &-\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T K_i\boldsymbol{\eta} + \alpha\tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{\eta}^T K_i\tilde{\boldsymbol{q}} \\ &+\alpha\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T C(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\eta} - \alpha\boldsymbol{\eta}^T K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{q}} \\ &-\alpha\boldsymbol{\eta}^T K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} - \alpha\boldsymbol{\eta}^T K_i\boldsymbol{\eta} \\ &-\beta\boldsymbol{\eta}^T\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} - \beta\tilde{\boldsymbol{q}}^T\tilde{\boldsymbol{q}} + \left[\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \alpha\boldsymbol{\eta}\right]^T \boldsymbol{d}(t, \boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{16}$$

A fin de encontrar expresiones apropiadas de las cotas superiores de los términos que contienen $K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})$ y $K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})$, se hacen las siguientes suposiciones, de manera similar a como se hacen en (Meza *et al.*, 2009). Con base en la Definición 2 sobre la estructura de las matrices diagonales de ganancias variables, se asume que existen constantes k_{li} y k_{ui}, relacionadas con la matriz $K_y(\boldsymbol{y})$, tales que $k_{li} \leq k_{y_i}(y_i) \leq k_{ui}$ para todo $y_i \in \mathbb{R}$ y $i = 1, \cdots, n$. Por lo tanto, existe una matriz diagonal K_{yl}, cuyos elementos son k_{li}, con $i = 1, \cdots, n$, y cuyo máximo valor propio es $\lambda_{max}\{K_{yl}\} \leq \lambda_{min}\{K_y(\boldsymbol{y})\}$. De la misma manera, existe una matriz diagonal K_{yu}, cuyos elementos son k_{ui}, con $i = 1, \cdots, n$, y cuyo máximo valor propio es $\lambda_{max}\{K_{yu}\} \geq \lambda_{min}\{K_y(\boldsymbol{y})\}$. Puede concluirse, por lo tanto, que existen matrices diagonales K_{vl}, K_{pu} y K_{vu}, relacionadas en la forma mencionada con $K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})$ y $K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})$, i.e., $\lambda_{max}\{K_{vl}\} \leq \lambda_{min}\{K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\}$, $\lambda_{max}\{K_{pu}\} \geq \lambda_{max}\{K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\}$ y $\lambda_{max}\{K_{vu}\} \geq \lambda_{max}\{K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\}$.

Haciendo uso de la Propiedad 3 y de las cotas de los valores propios de las matrices de ganancias recién mencionadas, los primeros 11 términos de (16) pueden acotarse como sigue:

$$
\begin{aligned}
-\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{q}} &\leq \lambda_{max}\{K_{pu}\}\|\tilde{\boldsymbol{q}}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| &(17)\\
-\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &\leq -\lambda_{max}\{K_{vl}\}\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|^2 &(18)\\
-\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T K_i\boldsymbol{\eta} &\leq \lambda_{max}\{K_i\}\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|\|\boldsymbol{\eta}\| &(19)\\
\delta\tilde{\boldsymbol{q}}^T\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &\leq \delta\|\tilde{\boldsymbol{q}}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| &(20)\\
\alpha\tilde{\boldsymbol{q}}^T M(\boldsymbol{q})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &\leq \alpha\lambda_{max}\{M\}\|\tilde{\boldsymbol{q}}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| &(21)\\
\alpha\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}^T C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\eta} &\leq \alpha k_c\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|^2\|\boldsymbol{\eta}\| &(22)\\
&\quad +\alpha k_c\|\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|\|\boldsymbol{\eta}\|\\
-\alpha\boldsymbol{\eta}^T K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})\tilde{\boldsymbol{q}} &\leq \alpha\lambda_{max}\{K_{pu}\}\|\boldsymbol{\eta}\|\|\tilde{\boldsymbol{q}}\| &(23)\\
-\alpha\boldsymbol{\eta}^T K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &\leq \alpha\lambda_{max}\{K_{vu}\}\|\boldsymbol{\eta}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| &(24)\\
-\alpha\boldsymbol{\eta}^T K_i\boldsymbol{\eta} &\leq -\alpha\lambda_{min}\{K_i\}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 &(25)\\
\boldsymbol{\eta}^T K_i\tilde{\boldsymbol{q}} &\leq \lambda_{max}\{K_i\}\|\boldsymbol{\eta}\|\|\tilde{\boldsymbol{q}}\| &(26)\\
-\beta\boldsymbol{\eta}^T\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} &\leq \beta\|\boldsymbol{\eta}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| &(27)
\end{aligned}
$$

donde $\|\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M$ es el supremo de las velocidades articulares deseadas. $\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|$ La perturbación $\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})$ (6) puede acotarse de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})\| &\leq \|M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\|\\
&\leq \|M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\| + \|C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\| + \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\|\\
&\leq k_M\|\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M + k_g + k_c\|\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M^2\\
&\quad +k_c\|\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|
\end{aligned}
$$

donde $\|\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M$ es el supremo de las aceleraciones articulares deseadas, y se han empleado las Propiedades 1, 3 y 4. Denotando

$$
\begin{aligned}
d_1 &= k_M\|\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M + k_g + k_c\|\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M^2,\\
d_2 &= k_c\|\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|_M,
\end{aligned}
$$

entonces

$$\|\boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x})\| \leq d_1 + d_2\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| \tag{28}$$

Usando (28), la cota superior del último término de (16) puede escribirse

$$
\begin{aligned}
\left[\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} + \alpha\boldsymbol{\eta}\right]^T \boldsymbol{d}(t,\boldsymbol{x}) &\leq d_1\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| + d_2\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|^2 &(29)\\
&\quad +\alpha d_1\|\boldsymbol{\eta}\| + \alpha d_2\|\boldsymbol{\eta}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|
\end{aligned}
$$

Conviene escribir la cota superior de (16) como

$$\dot{V}(\boldsymbol{\eta},\tilde{\boldsymbol{q}},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}) \leq W_1 + W_2 \tag{30}$$

con

$$
\begin{aligned}
W_1 &= -\alpha\lambda_{min}\{K_i\}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \beta\|\tilde{\boldsymbol{q}}\|^2 &(31)\\
&\quad -\left[\lambda_{max}\{K_{vl}\} - d_2 + \alpha k_c\|\boldsymbol{\eta}\|\right]\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|^2\\
&\quad +\left[\lambda_{max}\{K_{pu}\} + \alpha\lambda_{max}\{M\} +\right.\\
&\quad \left.\delta\right]\|\tilde{\boldsymbol{q}}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| + \left[\lambda_{max}\{K_i\} + \beta\right.\\
&\quad \left.+\alpha\left[2d_2 + \lambda_{max}\{K_{vu}\}\right]\right]\|\boldsymbol{\eta}\|\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|\\
&\quad +\left[\alpha\lambda_{max}\{K_{pu}\} + \lambda_{max}\{K_i\}\right]\|\boldsymbol{\eta}\|\|\tilde{\boldsymbol{q}}\|,\\
W_2 &= d_1\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| + \alpha d_1\|\boldsymbol{\eta}\|
\end{aligned}
$$

donde se han usado (17-27) y (29).

IV-C. Acotamiento de las soluciones

Con el fin de encontrar las condiciones para que la cota superior de la derivada de la función de Lyapunov sea definida negativa, se procede de la manera siguiente (Meza *et al.*, 2007). Se define una bola $B_r \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, de radio $r > 0$, alrededor del origen del espacio de estado, tal que

$$B_r = \left\{\boldsymbol{\eta},\tilde{\boldsymbol{q}},\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}} \in \mathbb{R}^n : \left\| \begin{matrix}\boldsymbol{\eta}\\ \tilde{\boldsymbol{q}}\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\end{matrix} \right\| < r\right\} \tag{32}$$

en la cual W_1 es definida negativa. La ecuación (31) se puede expresar en forma matricial como

$$W_1 = -\begin{bmatrix}\|\boldsymbol{\eta}\|\\ \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|\\ \|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|\end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix}\|\boldsymbol{\eta}\|\\ \|\tilde{\boldsymbol{q}}\|\\ \|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\|\end{bmatrix} \tag{33}$$

donde la matriz Q se escribe en (34) (mostrada en la parte superior de la página siguiente), y se ha usado la siguiente notación simplificada: $\lambda_P = \lambda_{max}\{K_{pu}\}$, $\lambda_V = \lambda_{max}\{K_{vl}\}$, $\lambda_{VM} = \lambda_{max}\{K_{vu}\}$, $\lambda_I = \lambda_{min}\{K_i\}$, $\lambda_{IM} = \lambda_{max}\{K_i\}$ y $\lambda_M = \lambda_{max}\{M\}$, Para encontrar condiciones para que la matriz Q (34) sea definida positiva y, por lo tanto, W_1 (33) sea definida negativa en la región $B_r \subset \mathcal{D}$, se emplea el criterio dado por el Corolario 1 de la Definición 1. De acuerdo a este criterio, la matriz Q es diagonal dominante si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
\lambda_I &> \frac{1}{2\alpha}\left[\alpha\left[\lambda_P + \lambda_{VM} + 2d_2\right] + 2\lambda_{IM} + \beta\right] &(35)\\
\beta &> \frac{1}{2}\left[\left[\alpha+1\right]\lambda_P + \lambda_{IM} + \delta + \alpha\lambda_M\right] &(36)\\
\lambda_V &> \alpha k_c r + d_2 + \frac{1}{2}\left[\lambda_{IM} + \beta + \delta + \lambda_P\right. &(37)\\
&\quad \left.+\ \alpha\left[2d_2 + \lambda_{VM} + \lambda_M\right]\right]
\end{aligned}
$$

Además, puesto que los dos primeros elementos diagonales $\alpha\lambda_I$ y β son evidentemente positivos, Q es definida positiva si se cumple también que:

$$\lambda_V > \alpha k_c r + d_2 \tag{38}$$

Nótese que (38) está contenida en (37). Entonces, si se satisfacen las condiciones (35-37), se asegura que W_1 sea una función definida negativa en la bola B_r de radio r. Una expresión para el radio r, obtenida de (37) es la siguiente

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{1}{k_c}\left[\frac{1}{\alpha}\left[\lambda_V - d_2 - \frac{1}{2}\left[\lambda_{IM} + \lambda_P + \beta + \delta\right]\right]\right.\\
&\quad \left. -d_2 - \frac{1}{2}\left[\lambda_{VM} + \lambda_M\right]\right] &(39)
\end{aligned}
$$

Obsérvese que r aumenta cuando aumenta λ_V, y disminuye cuando ésta disminuye. Tomando en cuenta el hecho de que $\|\boldsymbol{\eta}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|$ y $\|\dot{\tilde{\boldsymbol{q}}}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|$, (30) puede escribirse de la siguiente manera

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}) \leq -k_3\|\boldsymbol{x}\|^2 + b\|\boldsymbol{x}\|, \tag{40}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha\lambda_I & -\frac{1}{2}\left[\alpha\lambda_P + \lambda_{IM}\right] & -\frac{1}{2}\left[\lambda_{IM} + \alpha\left[2d_2 + \lambda_{VM}\right] + \beta\right] \\ -\frac{1}{2}\left[\alpha\lambda_P + \lambda_{IM}\right] & \beta & -\frac{1}{2}\left[\lambda_P + \delta + \alpha\lambda_M\right] \\ -\frac{1}{2}\left[\lambda_{IM} + \alpha\left[2d_2 + \lambda_{VM}\right] + \beta\right] & -\frac{1}{2}\left[\lambda_P + \delta + \alpha\lambda_M\right] & \lambda_V - \alpha k_c r - d_2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

donde

$$k_3 = \lambda_{min}\left\{Q\right\}, \tag{41}$$
$$b = \left[\alpha + 1\right] d_1 \tag{42}$$

Ahora bien, para probar el acotamiento de las soluciones del sistema en lazo cerrado invocando el Teorema 1 (Khalil, 2002), se debe obtener una función definida negativa que acote superiormente la derivada de la función de Lyapunov, en este caso, (40). A continuación se muestra el procedimiento seguido para tal fin.

Con el fin de cancelar el efecto del término positivo $b\|\boldsymbol{x}\|$ en (40), se introduce un nuevo parámetro positivo $\epsilon < 1$, de tal manera que (40) puede reescribirse como

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leq -k_3(1-\epsilon)\|\boldsymbol{x}\|^2 - k_3\epsilon\|\boldsymbol{x}\|^2 + b\|\boldsymbol{x}\|. \tag{43}$$

Tomando los últimos dos términos de (43),

$$\begin{aligned} -k_3\epsilon\|\boldsymbol{x}\|^2 + b\|\boldsymbol{x}\| &< 0, \\ k_3\epsilon\|\boldsymbol{x}\|^2 &> b\|\boldsymbol{x}\|, \\ \|\boldsymbol{x}\| &> \frac{b}{k_3\epsilon}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, denotando $\mu = \frac{b}{k_3\epsilon}$,

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leq -k_3(1-\epsilon)\|\boldsymbol{x}\|^2, \ \forall\ \|\boldsymbol{x}\| > \mu. \tag{44}$$

Obsérvese que la derivada de la función candidata de Lyapunov (44) es una función definida negativa en la bola B_r con radio r.

Del análisis realizado hasta aquí, se ha obtenido el resultado principal de este trabajo, el cual se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 1: Considere el modelo dinámico del robot (1) junto con la ley de control (4). La estructura de las matrices de ganancias variables $K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})$ y $K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})$ está dada en la Definición 2. La matriz de ganancias constantes K_i es diagonal y definida positiva. Supóngase que las matrices de ganancias $K_p(\tilde{\boldsymbol{q}})$, $K_v(\tilde{\boldsymbol{q}})$ y K_i, así como las constantes positivas α, β, δ se escogen de manera que satisfagan (15), (35), (36) y (37). Asimismo, el parámetro

$$\mu = \frac{b}{k_3\epsilon},$$

donde b se definió en (42), ϵ es una constante positiva menor que 1, y k_3 se definió en (41), satisface

$$\mu < \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}r,$$

donde k_1 y k_2 se definieron en (14), y r es el radio de la bola B_r dentro de la cual $\dot{V}$ (44) es definida negativa. Entonces, el sistema es estabilizable en el sentido de que existe $T \geq 0$ tal que la solución $\boldsymbol{x}(t)$, con estado inicial $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$, satisface

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \ \leq \ \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\mu, \quad \forall\ t > t_0 + T. \tag{45}$$

donde (45) representa el acotamiento uniforme final. Una función de Lyapunov para demostrar lo anterior es (8).

Demostración: La prueba resulta del Teorema 1 (Khalil, 2002). En el presente caso, las funciones y parámetros a las que se refiere el Teorema son:

$$\begin{aligned} \sigma_1(\|\boldsymbol{x}\|) &= k_1\|\boldsymbol{x}\|^2, \\ \sigma_2(\|\boldsymbol{x}\|) &= k_2\|\boldsymbol{x}\|^2, \\ W_3(\boldsymbol{x}) &= k_3(1-\epsilon)\|\boldsymbol{x}\|^2, \\ \mu &= \frac{b}{k_3\epsilon}. \end{aligned}$$

■

V. PROCEDIMIENTO DE SINTONÍA

Para propósitos de diseño, en base al resultado de estabilidad obtenido, se propone un procedimiento de sintonía para seleccionar valores apropiados para los parámetros α, β, δ, $\lambda_{min}\left\{K_i\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_i\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_{pu}\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_{vu}\right\}$ y $\lambda_{max}\left\{K_{vl}\right\}$, para cumplir con las condiciones del acotamiento de las soluciones. Se supone que, del modelo dinámico del robot a controlar, se conocen los términos k_M, k_c, k_g, $\lambda_{min}\left\{M\right\}$, $\lambda_{max}\left\{M\right\}$ (véase (Kelly y Santibáñez, 2003) para detalles del cálculo de estos parámetros), así como de la trayectoria deseada, los valores $\|\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|$ y $\|\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\|$. El procedimiento propuesto es el siguiente:

1. Escoger valores de α, β y δ y usar (15) para determinar la cota inferior de la matriz de ganancias constantes K_i, $\lambda_{min}\left\{K_i\right\}$.
2. Calcular las matrices P_1 y P_2 (11, 12) para determinando los valores propios k_1 y k_2 (14).
3. Proponer valores de $\lambda_{max}\left\{K_i\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_{pu}\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_{vu}\right\}$ y $\lambda_{max}\left\{K_{vl}\right\}$, que cumplan con (35-37), para obtener la matriz Q definida positiva. Calcular además el radio r (39), para poder conocer el valor de $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}r$.
4. A continuación, calcular el valor propio mínimo k_3 (41), el coeficiente b (42), y proponer un valor entre 0 y 1 para ϵ (cercano a 1), para poder obtener $\mu = \frac{b}{k_3\epsilon}$ menor que $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}r$. En caso de no cumplirse esta condición, proponer nuevos valores de $\lambda_{max}\left\{K_i\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_{pu}\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_{vu}\right\}$, $\lambda_{max}\left\{K_{vl}\right\}$, y las constantes α, β y δ, hasta lograr cumplir con dicha condición.
5. Calcular la cota final $\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\mu$.

Nótese en (42) que el valor de b depende casi por completo de los coeficientes de la cota de la perturbación, i.e., a mayor perturbación, mayor valor de b. Puesto que μ debe ser mas pequeña que $\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}r$, k_3 debe seleccionarse mucho mayor que b, escogiendo valores grandes de $\lambda_{min}\{K_i\}$, $\lambda_{max}\{K_{pu}\}$ y $\lambda_{max}\{K_{vl}\}$.

VI. Conclusiones

En este artículo se ha estudiado la estabilidad de un controlador PID de seguimiento, con ganancias P y D variables, aplicado a un robot manipulador. Mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov, se ha llegado a la conclusión de que las soluciones del sistema en lazo cerrado están uniforme y finalmente acotadas. Por su generalidad, este resultado es aplicable a aquellos controladores PID de robots en los que las ganancias P y D sean variables, sin importar el algoritmo o técnica empleada para ello, siempre y cuando estén acotadas.

Se propone además un procedimiento de sintonía, el cual puede ser útil para fines de diseño, para que se escojan ganancias apropiadas para garantizar el acotamiento de los errores.

Dentro del conocimiento de los autores, por primera vez se presenta un resultado de estabilidad de un control PID de seguimiento con ganancias P y D variables que, aplicado a un robot manipulador, produzca una respuesta en la que las soluciones del sistema en lazo cerrado están acotadas, de modo que es capaz de seguir la trayectoria deseada con errores por debajo de una cota uniforme y uniforme final.

VII. Agradecimientos

La realización de este trabajo fue posible gracias al apoyo del CONACyT, a través de una beca para estudios de posgrado otorgada al primer autor del artículo, al proyecto de CONACyT No. 134534 y a proyectos de DGEST.

Referencias

Camarillo, K. y R. Campa, V. Santibáñez, J. Moreno-Valenzuela (2008), *Stability Analysis of the Operational Space Control for Industrial Robots Using Their own joint velocity PI controllers*, Robotica, vol. 26, pp. 729-738.

Hernández-Guzmán, V.M. y V. Santibáñez, R. Silva-Ortigoza (2008),*A New Tuning Procedure for PID Control of Rigid Robots*, Advanced Robotics, vol. 22, pp. 1007-1023.

Horn, R.A. y C.R. Johnson (1991), *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kazemian, H. B. (2008), *Intelligent Fuzzy PID Controller*, Foundations of Generic Optimization, vol. 2, Applications of Fuzzy Control, Genetic Algorithms and Neural Networks, pp. 241-260.

Kelly, R. y R. Carelli (1996), *A Class of Nonlinear PD-type Controllers for Robot Manipulators*, Journal of Robotic Systems, vol.13, pp.793-802.

Kelly, R. y R. Haber, R. E. Haber, F. Reyes (1999), *Lyapunov Stable Control of Robots Manipulators: A Fuzzy Self-Tuning Procedure*, Intelligent Automation and Soft Computing, vol.5, No. 4, pp.313-326.

Kelly, R. y V. Santibáñez (2003), *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, Pearson Prentice-Hall, Madrid.

Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.

Koditschek, D. (1984) *Natural Motion for Robot Arms*, Proc. IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp. 733-735.

Llama, M.A y R. Kelly, V. Santibáñez (2001) *A Stable Motion Control System for Manipulators via Fuzzy Self-Tuning*, Fuzzy Sets and Systems, No. 124, pp. 133-154, Elsevier.

Meza, J.L., V. Santibáñez, R. Campa (2007), *An Estimate of the Domain of Attraction for the PID Regulator of Manipulators*, International Journal of Robotics and Automation, vol. 22, No. 3, pp. 187-195.

Meza, J.L., V. Santibáñez, R. Soto and M.A. Llama (2009), *Stable Fuzzy Self-Tuning PID Control of Robot Manipulators*, IEEE 2009 Conference on Systems, Man, and Cybernetics, San Antonio, Texas.

Salas, F. y M. Llama (2010), *Control de Seguimiento PID Difuso Auto-Organizable para un Brazo Robótico de 2 g.d.l.* Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático 2010, Puerto Vallarta, México.

Spong, M. y S. Hutchinson, M. Vidyasagar (1989), *Robot Modeling and Control*, Wiley, New York.

Su, Y. X. y D. Sun, B. Y. Duan (2005), *Design of an Enhanced Nonlinear PID Controller*, Mechatronics, vol. 15, pp. 1005-1024

Tomei, P. (1991), *Adaptive PD Controller for Robot Manipulators*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 7,pp. 565-570.

Wang G-J. y C-T. Fong, K. J. Chang (2001), *Neural-Network-Based Self-Tuning PI Controller for Precise Motion Control of PMAC Motors*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 48, pp. 408-415.

Ying, Hao (2000), *Fuzzy Control and Modeling*, IEEE Press, Piscataway, NJ.

Zao, Zhen-Yu y M. Tomizuka, S. Isaka (1993), *Fuzzy Gain Scheduling of PID Controllers*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 23, No. 5, pp. 1392-1398.