Diagnostico óptimo de fallas en sistemas muestreados mediante teorema del valor medio

E. Alcorta García
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Universidad Autónoma de Nuevo León
efrain.alcortagr@uanl.edu.mx
Teléfono: (52)-81-10523318

***Resumen*— En este trabajo se discute un enfoque basado en el teorema del valor medio para el diseño óptimo de generadores de residuos. Mediante aplicación del teorema del valor medio se logra una representación de las entradas desconocidas del sistema entre instantes de muestreo. La representación propuesta es exacta, no involucra ningún tipo de aproximación y permite el uso de herramientas bien conocidas para la optimización de los generadores de residuos.**
Palabras clave: Fallas, sistemas muestreados, detección de fallas, desacoplo.

I. Introducción

El uso de sistemas híbridos continuo-discreto es cada vez mas común, debido a los desarrollos tecnológicos de los dispositivos para realizar control, los cuales son de naturaleza discreta. En este contexto, el análisis de sistemas muestreados adquiere una relevancia especial (Chen y Francis, 1995). Desde el trabajo pionero de (Ragazzini y Franklin, 1958) mucho esfuerzo ha sido realizado para desarrollar técnicas que permitan el control con desempeño deseado.

La consideración del efecto de entradas desconocidas entre los instantes de muestreo en lazos muestreados es un problema que ha recibido mucha atención en los años recientes, ver por ejemplo (Zhang *et al.*, 2001), (Zhang *et al.*, 2003), (Li *et al.*, 2003), (Izadi *et al.*, 2005), (Izadi *et al.*, 2008) así como los libros (Rosenwasser y Lampe, 2000), (Rosenwasser y Lampe, 2006), entre otros. El conocimiento del efecto de la entrada desconocida entre los instantes de muestreo puede permitir una acción compensatoria mas eficiente.

En este trabajo se considera el problema de representar de manera exacta la influencia de las entradas desconocidas a un sistema en el contexto de un modelo discreto equivalente. La solución propuesta a este problema esta basada en el uso de un resultado clásico del calculo, el teorema del valor medio para integrales. La principal ventaja es que conceptualmente es claro y simple. A diferencia de otras soluciones planteadas en la literatura en el dominio del tiempo, como por ejemplo, (Zhang *et al.*, 2001), el resultado es claro y el desarrollo matemático sistemático. Otras alternativas disponibles consideran enfoques en el dominio de la frecuencia, como en (Zhang *et al.*, 2003) y (Izadi *et al.*, 2005). Una vez disponible la representación propuesta herramientas convencionales para el diseño óptimo de generadores de residuos pueden ser utilizadas.

El resto del trabajo esta formado como sigue: En la siguiente sección se presentan algunos preliminares sobre el bien conocido teorema del valor medio para integrales así como la formulación del problema. En la sección 3 se discute a detalle la representación propuesta. En la sección 4 se muestra un ejemplo del método propuesto. En la sección 5 se presenta la conclusión del trabajo.

II. Preliminares

En esta sección se presentan algunos resultados que serán utilizados a lo largo del trabajo. Estos incluyen el teorema del valor medio para integrales, un repaso breve de la generación de residuos así como la formulación del problema.

La contribución principal del presente trabajo esta fundamentada en el siguiente resultado clásico del cálculo integral, el cual es presentado para hacer la lectura lo mas auto contenida posible.

Teorema 1. Valor medio para integrales, (Apostol, 1969) *Suponer que dos funciones continuas f y g sobre el intervalo $[a,\ b]$. Sí g no cambia de signo en el intervalo $[a,\ b]$ entonces, para un valor c dentro del intervalo $[a,\ b]$ se satisface que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

□

Es importante destacar que este resultado es válido para funciones escalares.

II-A. *Sistema considerado*

Semejante al planteamiento hecho en (Zhang *et al.*, 2001), en este trabajo el sistema considerado consta de tres sub-modelos: (1) el modelo de la planta dado por una descripción en espacio de estado y en tiempo-continuo dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E_d d(t) + E_f f(t) \\ y(t) &= Cx(t), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $x \in \Re^n$ es el vector de estado, $y \in \Re^m$ es el vector de salida, $u \in \Re^p$ es el vector de entrada, $f \in \Re^s$ es el vector de fallas, $d \in \Re^\nu$ es el vector de perturbaciones y A, B, C, E_d y E_f son matrices conocidas de dimensiones apropiadas. (2) el modelo de un convertidor A/D

$$y(k) = y(kT_s) \tag{2}$$

(3) el modelo del convertidor D/A

$$u(t) = u(kT_s), \quad kT \leq t < (k+1)T_s \tag{3}$$

donde T_s es el periodo de muestreo.

Con la finalidad d reducir el efecto de ruido de medición generalmente se utiliza un filtro anti-aliasing antes de la discretización (Chen y Francis, 1995). Las ecuaciones (1)-(3) describen la dinámica completa del sistema (incluyendo al posible filtro anti-aliasing). Sin perdida de generalidad se hace el supuesto de que el modelo considerado es estrictamente propio.

II-B. Repaso de estrategia para detección de fallas

El procedimiento a considerar es el que esta basado en la discretización del modelo (1). La descripción exacta del sistema (1) en los instantes de muestreo esta dada por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) + \bar{d}(k) + \bar{f}(k) \\ y(k) &= Cx(k), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{4}$$

donde T_s es el periodo de muestreo y:

$$A_d = e^{AT_s} \tag{5}$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B d\tau \tag{6}$$

$$\bar{f}(k) = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau} E_f f(kT_s + \tau) d\tau \tag{7}$$

$$\bar{d}(k) = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau} E_d d(kT_s + \tau) d\tau \tag{8}$$

y la entrada se supone invariante dentro de cada intervalo, es decir, $u(kT_s + \tau) = u(k)$ para $0 < \tau \leq \tau_s$. Note que los términos $\bar{f}(t)$ y $\bar{d}(t)$ (dados por (7) y (8)) involucran convoluciones y consecuentemente cada término del vector resultante depende en general de todas las fallas y perturbaciones respectivamente.

El primer paso para la detección de fallas es la generación de residuos (Frank, 1990). Para realizar el generador de residuos se puede utilizar un generador de residuos basado en observadores (Chen y Patton, 1999), (Ding, 2008):

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Gz(k) + Hu(k) + Ly(k) \\ r(k) &= -\omega z(k) + \nu y(k) \end{aligned} \tag{9}$$

donde $z(k) \in \Re^s$ es el vector de estados del generador de residuos, las matrices G, L, ν ω son seleccionadas de tal forma que las ecuaciones de Luenberger:

$$\begin{aligned} PA_d - GP &= LC \\ \nu C - \omega P &= 0 \\ H &= PB_d \end{aligned}$$

$$\text{con } G \text{ estable} \tag{16}$$

se satisfacen.

Alternativamente se puede utilizar espacio de paridad (Chen y Patton, 1999), (Ding, 2008):

$$\begin{aligned} r(k) &= \nu_s \left(y_s(k) - H_{u,s} u_s(k) \right) \qquad (10) \\ y_s(k) &= \begin{bmatrix} y^T(k-s) & \cdots & y^T(k) \end{bmatrix}^T \\ u_s(k) &= \begin{bmatrix} u^T(k-s) & \cdots & u^T(k) \end{bmatrix}^T \\ H_{u,s} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB_d & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA_d^{s-1}B_d & \cdots & CB_d & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{11}$$

donde el vector $\nu_s \in \Re^{(s+1)m}$ es llamado vector de paridad, el cual satisface:

$$\nu_s H_{0,s} = 0 \qquad H_{0,s} = \begin{bmatrix} C^T & A_d^T C^T & \cdot & (A_d^s)^T C^T \end{bmatrix}$$

La s denota el orden de cada uno de los residuos y $r(k) \in \Re$ es el residuo. El diseño del espacio de paridad y observadores se puede hacer de forma unificada (Ding, 2008) y equivalente. Entonces el diseño de generadores de residuos lineales se puede reducir a encontrar un vector de paridad ν_s.

Independientemente del método seleccionado, la dinámica del residuo generador es gobernada por

$$\begin{aligned} r(k) &= \nu_s H_s \left(\bar{d}_s(k) + \bar{f}_s(k) \right) \qquad (12) \\ \bar{d}_s(k) &= \begin{bmatrix} \bar{d}^T(k-s) & \cdots & \bar{d}^T(k) \end{bmatrix}^T \\ \bar{f}_s(k) &= \begin{bmatrix} \bar{f}^T(k-s) & \cdots & \bar{f}^T(k) \end{bmatrix}^T \\ H_s &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA_d^{s-1} & \cdots & C & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{13}$$

El objetivo principal de la generación de residuos es el de maximizar la robustez del sistema de detección de fallas frente a entradas desconocidas sin perder la sensibilidad a fallas. Una forma práctica para simplificar el análisis, a costa de una aproximación, es la siguiente (ver por ejemplo (Chen y Patton, 1999), (Frank, 1994), (Gertler, 1991)):

$$\bar{d}(k) \approx E_{dd} d(k), \quad E_{dd} = \int_0^T e^{At} E_d dt \tag{14}$$

$$\bar{f}(k) \approx E_{fd} d(k), \quad E_{fd} = \int_0^T e^{At} E_f dt \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
r(k) &= \nu_s\left(H_{d,s}d_s(k) + H_{f,s}f_s(k)\right) \qquad (17)\\
d_s(k) &= \left[\begin{array}{ccc} d^T(k-s) & \cdots & d^T(k)\end{array}\right]^T\\
f_s(k) &= \left[\begin{array}{ccc} f^T(k-s) & \cdots & fT(k)\end{array}\right]^T\\
H_{d,s} &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0\\ CE_{dd} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ CA_d^{s-1}E_{dd} & \cdots & CE_{dd} & 0\end{array}\right]^T\\
H_{f,s} &= \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \cdots & 0\\ CE_{fd} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ CA_d^{s-1}E_{fd} & \cdots & CE_{fd} & 0\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Si existe un vector de paridad ν_s tal que

$$
\nu_s H_{d,s} = 0, \quad \nu_s H_{f,s} \neq 0 \qquad (18)
$$

entonces existe desacoplo perfecto del residuo $r(k)$ con respecto a la perturbación $d(k)$ y una optimización no es necesaria. Considerando el índice de desempeño (Wünnenberg, 1990), (Ding, 2008):

$$
J = \frac{\nu_s H_{d,s}\left(\nu_s H_{d,s}\right)^T}{\nu_s H_{f,s}\left(\nu_s H_{f,s}\right)^T} \qquad (19)
$$

Cuando las condiciones dadas en (18) no se cumplen, entonces la solución óptima puede calcularse mediante la solución al siguiente problema de optimización:

$$
\min_{\nu_s \in P_s} J = \min_{P_s} \frac{\nu_s N_{basis} H_{d,s}\left(\nu_s N_{basis} H_{d,s}\right)^T}{\nu_s N_{basis} H_{f,s}\left(\nu_s N_{basis} H_{f,s}\right)^T} \qquad (20)
$$

donde N_{basis} es una base para el espacio de paridad P_s, es decir, para un vector de paridad ν_s se puede encontrar un vector P_s tal que $\nu_s = P_s N_{basis}$.

II-C. *Formulación del problema*

Es claro que existe una diferencia fundamental entre la señal de entrada $u(t)$ y las señales $f(t)$ y $d(t)$, esto debido al efecto del muestreador retenedor utilizado. La entrada $u(t)$ es un función continua-constante a tramos. La influencia de $u(t)$ sobre $y(t)$ es conocida exactamente y esto puede ser compensado en los generadores de residuos, en e caso de diagnostico de fallas. En contraste, las señales $f(t)$ y $d(t)$ son conocidas. Aquí, La idea es estudiar el efecto de las señales continuas $f(t)$ y $d(t)$ sobre la salida en tiempo discreto equivalente $y(k)$ y sobre el residuo (en el caso de diagnóstico de fallas) $r(k)$.

Además, hay un acoplamiento entre las fallas en el modelo de tiempo discreto que no necesariamente existe en el modelo de tiempo continuo.

El problema consiste en encontrar una representación de las fallas y las perturbaciones exacta que brinde información entre los instantes de muestreo.

Es importante destacar que la representación buscada se puede simplificar significativamente si las entradas desconocidas tienen una forma de escalón unitario. La ecuación (7) entonces queda como sigue:

$$
\bar{f}(k) = e^{AT_s}\int_0^{T_s} e^{-A\tau}E_f d\tau \cdot f(kT_s)
$$

Bajo el supuesto de que la suposición de que la entrada desconocida cambia su valor justo en $t = kT_s$. Si esto no ocurre así, entonces la relación (21) es justo una aproximación para el tiempo en el cual la falla ocurre. En este caso, el efecto de las entradas desconocidas puede manejarse de manera simple.

III. REPRESENTACIÓN PROPUESTA

Considerar el sistema (1)-(3) así como la discretización dada en (4)-(8). El punto de partida es la ecuación (8) y (8). Con la finalidad de mostrar la representación propuesta se desarrolla primero para la ecuación (8). El punto de inicio es la siguiente expresión

$$
\left[\begin{array}{c} g_{1\rho}(\tau)\\ \vdots\\ g_{n\rho}(\tau)\end{array}\right] = e^{A(T_s-\tau)}E_{f\rho}
$$

Aplicando a la falla escalar f_ρ:

$$
\begin{aligned}
\bar{f}_\rho(k) &= \left[\begin{array}{c} \int_0^{T_s} g_{1\rho}(\tau)f_\rho(kT_s+\tau)d\tau\\ \vdots\\ \int_0^{T_s} g_{n\rho}(\tau)f_\rho(kT_s+\tau)d\tau\end{array}\right]\\
&= \left[\begin{array}{c} \int_0^{T_s} g_{1\rho}(\tau)d\tau \cdot f_\rho(kT_s+\tau_{f_\rho 1})\\ \vdots\\ \int_0^{T_s} g_{n\rho}(\tau)d\tau \cdot f_\rho(kT_s+\tau_{f_\rho n})\end{array}\right]\\
&= \left[\begin{array}{ccc} \int_0^{T_s} g_{1\rho}(\tau)d\tau & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \int_0^{T_s} g_{n\rho}(\tau)d\tau\end{array}\right]\cdot\\
&\quad \left[\begin{array}{c} f_\rho(KT+\tau_{f_\rho 1})\\ \vdots\\ f_\rho(KT+\tau_{f_\rho n})\end{array}\right] \qquad (21)
\end{aligned}
$$

Note que cada elemento de la falla f_ρ genera n entradas nuevas, así para s fallas $n \cdot s$ nuevas entradas desconocidas son generadas. Las nuevas n entradas asociadas con cada falla f_ρ son consecuencia de la evaluación del vector f en los diferentes instantes de tiempo. Para el

$$
\left[\begin{array}{ccc} g_{11}(\tau) & \cdots & g_{1s}(\tau)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{n1}(\tau) & \cdots & g_{ns}(\tau)\end{array}\right] = e^{A(T_s-\tau)}E_f
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(k) &= \begin{bmatrix} \sum_{\rho=1}^{s}\left[\int_0^{T_s} g_{1\rho}(\tau) f_\rho(kT_s+\tau)d\tau\right] \\ \vdots \\ \sum_{\rho=1}^{s}\left[\int_0^{T_s} g_{n\rho}(\tau) f_\rho(kT_s+\tau)d\tau\right] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{\rho=1}^{s}\left[\int_0^{T_s} g_{1\rho}(\tau)d\tau \cdot f_\rho(kT_s+\tau_{f_\rho 1})\right] \\ \vdots \\ \sum_{\rho=1}^{s}\left[\int_0^{T_s} g_{n\rho}(\tau)d\tau \cdot f_\rho(kT_s+\tau_{f_\rho n})\right] \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

y ahora definiendo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_\rho &\triangleq \begin{bmatrix} f_1(kT_s+\tau_{f_1\rho}) \\ \vdots \\ f_s(kT_s+\tau_{f_s\rho}) \end{bmatrix} \in \Re^{s\times 1}; \\
\mathcal{F} &\triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix} \in \Re^{n\cdot s\times 1}
\end{aligned}
$$

y

$$
\mathcal{E}_i \triangleq \begin{bmatrix} \int_0^{T_s} g_{i1}(\tau)d\tau & \cdots & \int_0^{T_s} g_{is}(\tau)d\tau \end{bmatrix} \in \Re^{1\times s}
$$

$$
\mathcal{E} \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{E}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{E}_n \end{bmatrix} \in \Re^{n\times n\cdot s} \qquad (22)
$$

Y el vector de fallas $\bar{f}(k)$ finalmente puede representarse en una forma exacta como

$$
\bar{f}(k) = \mathcal{E}\mathcal{F} \qquad (23)
$$

Un desarrollo similar puede hacerse para el vector de perturbación $\bar{d}(k)$, es decir,:

$$
\begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(\tau) & \cdots & \bar{g}_{1s}(\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{g}_{n1}(\tau) & \cdots & \bar{g}_{ns}(\tau) \end{bmatrix} = e^{A(T_s-\tau)}E_d
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\rho &\triangleq \begin{bmatrix} d_1(kT_s+\tau_{d_1\rho}) \\ \vdots \\ d_\nu(kT_s+\tau_{d_\nu\rho}) \end{bmatrix} \in \Re^{\nu\times 1}; \\
\mathcal{D} &\triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} \in \Re^{n\cdot \nu\times 1}
\end{aligned}
$$

y

$$
\bar{\mathcal{E}}_i \triangleq \begin{bmatrix} \int_0^{T_s} \bar{g}_{i1}(\tau)d\tau & \cdots & \int_0^{T_s} \bar{g}_{i\nu}(\tau)d\tau \end{bmatrix} \in \Re^{1\times \nu}
$$

$$
\bar{\mathcal{E}} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{E}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{E}}_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{\mathcal{E}}_n \end{bmatrix} \in \Re^{n\times n\cdot \nu} \qquad (24)
$$

y el vector de perturbación $\bar{d}(k)$ es representado finalmente en una manera exacta como

$$
\bar{d}(k) = \bar{\mathcal{E}}\mathcal{D} \qquad (25)
$$

Es importante destacar que la representación propuesta permite separar el vector de fallas y/o el de perturbaciones y representarlo a través de una matriz de distribución constante (que depende del periodo de muestreo, como llas matrices discreteas del sistema). Este hecho permite la aplicación de técnicas conocidas para el diseño óptimo de generadores de residuos.

Un problema con la representación obtenida es el incremento del número de entradas desconocidas en las ecuaciones del sistema. Esto produce acoplamientos entre las fallas y perturbaciones. Este problema fue reportado en distintas publicaciones, ver por ejemplo (Zhang y Ding, 2008), (Izadi *et al.*, 2005).

III-A. Diseño óptimo de generadores de residuos

Utilizando el resultado anterior la representación del sistema (4) queda como sigue:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) + \mathcal{E}\mathcal{F} + \bar{\mathcal{E}}\mathcal{D} \\
y(k) &= Cx(k), \quad x(0) = x_0 \qquad (26)
\end{aligned}
$$

$$
\nu_s H_{\mathcal{D},s} = 0, \quad \nu_s H_{\mathcal{F},s} \neq 0 \qquad (27)
$$

donde

$$
\begin{aligned}
H_{\mathcal{D},s} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C\bar{\mathcal{E}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA_d^{s-1}\bar{\mathcal{E}} & \cdots & C\bar{\mathcal{E}} & 0 \end{bmatrix}^T \\
H_{\mathcal{F},s} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C\mathcal{E} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ CA_d^{s-1}\mathcal{E} & \cdots & C\mathcal{E} & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

Como fue demostrado en (Zhang *et al.*, 2001), el desacoplo perfecto no se puede lograr. Entonces es necesario recurrir a la solución óptima.

$$
\min_{\nu_s\in P_s} J = \min_{P_s} \frac{\nu_s N_{basis} H_{\mathcal{D},s}\left(\nu_s N_{basis} H_{\mathcal{D},s}\right)^T}{\nu_s N_{basis} H_{\mathcal{F},s}\left(\nu_s N_{basis} H_{\mathcal{F},s}\right)^T} \qquad (28)
$$

La solución al problema fue encontrado por (Wünnenberg, 1990) esta dada por la solución al problema de vectores propios generalizados:

$$
\begin{aligned}
&P_{s,min}\left(N_{basis} H_{\mathcal{D},s} H_{\mathcal{D},s}^T N_{basis}^T - \right. \\
&\left.\lambda_{min} N_{basis} H_{\mathcal{F},s} H_{\mathcal{F},s}^T N_{basis}^T\right) = 0 \qquad (29)
\end{aligned}
$$

con $\nu_{s,min} = P_{s,min} N_{basis}$ es el vector de paridad óptimo y $\bar{J}_{min} = \text{mín}_{\nu_s \in P_s} \bar{J} = \lambda_{min}$ como índice de desempeño óptimo.

Es claro que debido al uso del teorema del valor medio, el número de entradas desconocidas se incremento y con esto se reduce la posibilidad de hacer desacoplo perfecto. A pesar de lo anterior, es importante destacar que la representación obtenida no es una aproximación y representa de forma exacta al sistema incluyendo a las entradas desconocidas y su efecto entre instantes de muestreo.

III-B. Desacoplo perfecto

En el diseño de generadores de residuos es deseable hacer que el desacoplo entre fallas y perturbaciones sea perfecto, es decir, que el efecto de las perturbaciones sobre el generador de residuos sensible a las fallas sea cero. Cabe aclarar que pudiera desearse alguna falla en particular, en ese caso esa falla y la correspondiente matriz (vector) de distribución de fallas formarían el el vector de fallas mientras que el resto de las fallas junto con las perturbaciones formarían el nuevo vector de perturbaciones.

El desacoplo perfecto del residuo $r(k)$ con respecto a las entradas desconocidas $d(k)$ se puede lograr cuando $\lambda_{min} = 0$, ver por ejemplo (Zhang *et al.*, 2001). Entonces, existe una sistema de detección de fallas con desacoplo perfecto con respecto a $d(t)$ en el sentido que

$$r(k) = \nu_s \left(H_{\mathcal{F},s}\mathcal{F} - H_{\mathcal{D},s}\mathcal{D} \right) = \nu_s H_{\mathcal{F},s}\mathcal{F} \neq 0$$

si y solo si se cumple con:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A_d - z\mathrm{I} & \bar{\mathcal{E}} & \mathcal{E} \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix} > \text{rango} \begin{bmatrix} A_d - z\mathrm{I} & \bar{\mathcal{E}} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Esta condición esta adaptada del resultado bien conocido mostrado en (Ding *et al.*, 1999) y (Zhang *et al.*, 2001).

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se abordo el problema de diseño óptimo de los generadores de residuos en sistemas muestreados. En particular se propuso una representación del efecto de las fallas y de las perturbaciones entre instantes de muestreo que permite la formulación del problema de diseño óptimo de los residuos utilizando herramientas clásicas disponibles en la literatura. Alternativo a métodos de diseño directo, la formulación propuesta aquí es sencilla y permite visualizar con claridad los problemas bien conocidos relacionados con los métodos directos: Hay un crecimiento del número de entradas desconocidas y el desacoplo perfecto de las fallas se vuelve no posible. La representación de fallas y perturbaciones propuesta esta basada en un resultado clásico del cálculo conocido como el teorema del valor medio para integrales. La equivalencia con otros métodos directos esta actualmente bajo estudio.

V. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo a este trabajo a través del proyecto PAICyT IT287-09, de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1969). *Calculus II: Multi variable calculus and linear algebra with applications to differential equations and probability*. Vol. II. second ed. John Wiley & Sons. New York.

Chen, J. y R. J. Patton (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer.

Chen, T. W. y B. A. Francis (1995). *Optimal sampled data systems*. Springer.

Ding, S. X. (2008). *Model-based fault diagnosis techniques*. Springer.

Ding, S. X., E. L. Ding y T. Jeinisch (1999). An approach to analysis and design of observer and parity relation based FDI systems. En: *14th IFAC World Congress*.

Frank, P. M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey. *Automatica* **26**, 459–474.

Frank, P. M. (1994). On-line fault detection in uncertain nonlinear systems using diagnostic observer:A survey. *International Journal of Systems Science* **25**(12), 2129–2154.

Gertler, J. (1991). Analytical redundancy methods in fault detection and diagnosis. En: *IFAC / IMACS Symp. SAFEPROCESS, Baden-Baden, Germany*. pp. 9–21.

Izadi, I., S. L. Shah y T. Chen (2008). Parity space fault detection based on irregularly sampled data. En: *Proceedings of the American Control Conference 2008*. Washington. pp. 2798–2803.

Izadi, I., T. Chen y Q. Q. Zhao (2005). Norm invariant discretization for sampled-data fault detection. *Automatica* **41**, 1633–1637.

Li, W., H. Raghavan y S. Shah (2003). Subspace identification of continuous time models for process fault detection and isolation. *Journal of Process Control* **13**, 407–421.

Ragazzini, J. R. y G. F. Franklin (1958). *Sampled data control systems*. McGraw-Hill. New York.

Rosenwasser, E. y B. P. Lampe (2000). *Computer controlled systems: analysis and design with process-orientated models*. Springer.

Rosenwasser, E. y B. P. Lampe (2006). *Multivariable computer-controlled systems: a transfer function approach*. Springer.

Wünnenberg, J. (1990). *Observer-Based Fault Detection in Dynamic Systems*. VDI-Fortschrittsber., VDI-Verlag, Reihe 8, Nr. 222. Düsseldorf, Germany.

Zhang, P., S. X. Ding, G. Z. Wang y D. H. Zhou (2001). An FDI approach for sampled-data systems. En: *Proceedings of the American Control Conference 2001*. VA, USA. pp. 2702–2707.

Zhang, P., S. X. Ding, G. Z. Wang y D. H. Zhou (2003). A frequency domain approach to fault detection in sampled-data systems. *Automatica* **39**, 1303–1307.

Zhang, P. y S. X. Ding (2008). On fault detection in linear discrete-time, periodic, and sampled-data systems. *Journal of Control Science and Engineering* **2008**, 1–18.