

# Expresión analítica de la doble factorización coprime y sensibilidad mezclada

A. Bonilla, R. Galindo

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León  
San Nicolás de los Garza, Nuevo León 66450, México

## Resumen

Se presenta una fórmula explícita de la Doble Factorización Coprime (DFC) para sistemas cuadrados. Se consideran sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), estrictamente propios, con parámetros concentrados y Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) con una realización estabilizable y detectable. Se asume que la dimensión del estado es par, la dimensión de la entrada es la mitad de la dimensión del estado, y la planta es fuertemente estabilizable. La solución propuesta para la DFC incluye factorizaciones coprimas derecha e izquierda (*f.c.d.* y *f.c.i.*, respectivamente) de la función de transferencia de la planta en términos de su realización en espacio de estados, ecuaciones Diophantinas derecha e izquierda, y la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE). Se dan condiciones para obtener estabilidad fuerte y se fijan los parámetros libres de la PTCE resolviendo un problema de sensibilidad mezclada. Un ejemplo de simulación de un sistema de amortiguamiento de medio carro, ilustra los resultados.

**Palabras clave:** Doble factorización coprime, identidad de Bezout, sensibilidad mezclada, parametrización de controladores estabilizantes, estabilidad fuerte.

## I. INTRODUCCIÓN

El propósito principal es dar una fórmula explícita de la DFC para sistemas cuadrados, *i.e.*, la dimensión de la salida es igual a la dimensión de la entrada, y fijar sus parámetros libres resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, esto es, resolviendo simultáneamente estabilidad robusta y desempeño robusto (ver [13]). Se consideran sistemas MEMS, estrictamente propios, con parámetros concentrados y LIT con una realización estabilizable y detectable. Se asume que la planta dada  $P(s)$  satisface la propiedad de entrelazamiento par (*p.e.p.*) para asegurar que existe un controlador estable dentro de la PTCE, *i.e.*,  $P(s)$  es fuertemente estabilizable si el número de polos de  $P(s)$  (contados de acuerdo a su grado McMillan) entre cada par de ceros de transmisión reales, incluyendo el infinito, en el semiplano derecho, es par. Este problema ha sido atacado por [10] para  $P(s)$  con una entrada y una salida y [9] extendió este resultado a  $P(s)$  MEMS. Un controlador estable es importante por razones prácticas, como rompimiento de lazo, fallas o para minimizar errores numéricos.

La PTCE da una solución a la síntesis de controladores LIT como lo proponen, [9] [3], [7] y [11]. Los controladores estabilizan a  $P(s)$  y los problemas de desempeño se resuelven seleccionando adecuadamente sus parámetros libres. Hay pocos algoritmos para obtener expresiones analíticas de la PTCE. En [8] primero se estabiliza a  $P(s)$  por retroalimentación estática del estado estimado y después se dan fórmulas explícitas resolviendo la DFC. Los algoritmos computacionales de [2] que usan estas fórmulas pueden producir controladores de alto orden. Esta solución ha sido utilizada en el problema de estabilidad fuerte  $\mathcal{H}_\infty$  en [1] y [12]. En la sección III se aplican resultados algebraicos sobre  $P(s)$  en términos de su realización en espacio de estado. Se obtienen *f.c.d.* y *f.c.i.* de  $P(s)$  sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables  $\mathcal{RH}_\infty$ , como ha sido hecho por [3]; se resuelven las ecuaciones Diophantinas (ver [9]) y se obtiene la PTCE como lo proponen [7] y [11]. La solución propuesta a la DFC de la sección III, es menos compleja con respecto a la solución de la PTCE de [5]; no se requiere el cambio de coordenadas usado en [5] para asegurar que las *f.c.d.* y *f.c.i.* pertenezcan a  $\mathcal{RH}_\infty$ , disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional. Además, en la sección III se relaja la suposición de información completa del estado de [5], considerando  $P(s)$  estrictamente propia.

Se revisan las PTCEs de uno y dos parámetros en la sección II. La clase de sistemas considerada y los resultados principales se presentan en la sección III. Además, se proponen fórmulas explícitas para los parámetros libres de las PTCEs, resolviendo un problema de sensibilidad mezclada, como ha sido hecho por [6]. Se ilustran los resultados por un ejemplo de simulación de un sistema de amortiguamiento de medio carro en la Sección IV.

**Notación.**  $\mathcal{R}(s)$  y  $\mathcal{RH}_\infty$  denotan los conjuntos de funciones racionales de la variable compleja  $s$  con coeficientes reales y de propias y estables, respectivamente;  $\mathcal{R}$  el conjunto de los números reales;  $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$  y  $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$  son las aproximaciones asintóticas de una matriz  $A(s) \in \mathcal{R}(s)$ , en bajas y altas frecuencias, respectivamente;  $\|A(s)\|_\infty$  denota la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la  $A(s) \in \mathcal{R}(s)$ ;  $e I_p$  la matriz identidad de dimensión  $p \times p$ .

## II. ANTECEDENTES

Configuraciones de uno y de dos parámetros se muestran en las Fig. 1 y Fig. 2 (ver [9]), respectivamente, donde

$P(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}(s)$  representa la planta;  $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$  y  $K_r(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$  los controladores;  $u(s)$  y  $y(s)$  son la entrada y la salida de  $P(s)$ , respectivamente;  $y_d(s)$  es la entrada de referencia;  $e(s)$  es la señal de error;  $y$ ,  $d_i(s)$ ,  $d_o(s)$  y  $d_m(s)$  son perturbaciones externas a la entrada, la salida y la medición de  $P(s)$ , respectivamente. En lo que sigue se asume que la norma  $\mathcal{H}_2$  de las perturbaciones es acotada. En la Fig. 1,  $u(s) = K(s)e(s)$  es generada únicamente por  $e(s) = y_d(s) - y(s)$ , mientras que en la Fig. 2  $u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s)$  es generada por dos señales independientes. Si  $K_r(s) = K(s)$ , entonces se obtiene la configuración de la Fig. 1. Las PTCEs propuestas por [9], [3], [7], y [11], están dadas por,

**Teorema 1.** Sean  $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$  y  $\tilde{P}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$  cualesquier f.c.d. y f.c.i. de  $P(s)$  sobre  $\mathfrak{RH}_\infty$ , en las configuraciones de las Fig. 1 y Fig. 2. Entonces, las PTCEs de uno y dos parámetros son,

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} = \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \\ D_k(s) = Y(s) - R(s)N(s), \tilde{N}_k(s) = X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \quad (1)$$

donde  $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  y  $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  son los parámetros libres,  $R(s)$  satisface  $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ , y  $X(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  y  $Y(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  son la solución de la ecuación Diophantina  $X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m$ .

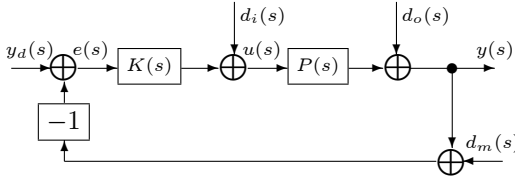


Fig. 1. Sistema retroalimentado con un controlador de un parámetro.

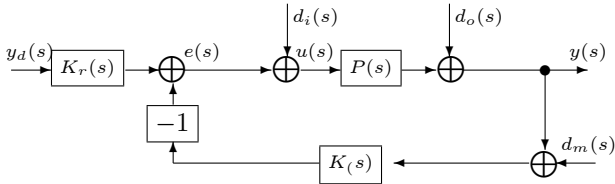


Fig. 2. Sistema retroalimentado con controlador de dos parámetros.

El papel de  $K(s)$  en la Fig. 1 es garantizar estabilidad y mejorar el desempeño; mientras que, en la Fig. 2,  $K_r(s)$  mejora el desempeño y  $K(s)$  garantiza estabilidad. Si  $K_r(s)$  es inestable, su salida crece sin límite, una alternativa es implementar  $\tilde{D}_k(s)$  dentro del lazo de la Fig. 2 (ver [9]).

En la siguiente sección se presenta una solución analítica de la DFC para  $P(s)$  estrictamente propia.

### III. DOBLE FACTORIZACIÓN COPRIMA

Considere una realización mínima  $(A, B, C)$  causal, LIT, de  $P(s)$ . Más aún, dado que todos los elementos de

$u(t)$  son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad, un cambio de coordenadas puede seleccionarse, obteniendo la realización  $(A, [0 \ B_m^T]^T, C)$  en nuevas coordenadas, donde  $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es no singular. Además, se asume que,

**Hipótesis 1.** La dimensión del estado de la realización de  $P(s)$ ,  $n$  es par, la dimensión de  $u(t)$ ,  $m = n/2$ , la dimensión de  $y(t)$ ,  $p = m$ , y  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  está particionada de acuerdo a la partición a bloques de  $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ , donde  $A_{11} = 0$ ,  $A_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es no singular, y  $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  o  $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es no singular, esto es,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, C = [C_{11} \ C_{12}] \quad (2)$$

La estructura de la realización en espacio de estado de la Ec. (2) se requiere para las f.c.d. y f.c.i. propuestas y para los resultados principales presentados en lo que sigue. En particular, la formulación Euler-Lagrange con información completa del estado y completamente actuada (ver [5]),

$$M(q(t))\ddot{q}(t) + C_o(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) + G(q(t)) = u(t) \quad (3)$$

es una clase de sistemas dinámicos no lineales que tiene una realización linealizada de la forma dada por la Ec. (2), donde  $M(q(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  denota la inercia,  $C(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  la matriz de Coriolis,  $G(q(t)) \in \mathfrak{R}^m$  las fuerzas gravitacionales,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  las fuerzas generalizadas y  $q(t) \in \mathfrak{R}^m$  las coordenadas generalizadas.

Si el estado es medido o estimado  $\tilde{N}(s)$  es una matriz larga de dimensión  $n \times m$ , entonces,  $\tilde{N}(s)$  no tiene una inversa a la derecha y por lo tanto la ecuación Diophantina izquierda  $\tilde{N}(s)X(s) + \tilde{D}(s)Y(s) = I$  no tiene una solución. Sin embargo, como se mostrará a continuación, para sistemas cuadrados esta ecuación Diophantina tiene una solución y así la DFC también tiene una solución.

Dado que  $P_h = (1/w_h)CB$  donde  $w_h$  es una frecuencia fija en la banda de Alatas Frecuencias (AF) de  $P(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$ , si  $C_{11} = 0$  y  $C_{12}$  es no singular, entonces  $P_h = (1/w_h)C_{12}B_m$ , mientras que si  $C_{12} = 0$  y  $C_{11}$  es no singular, entonces  $P_h = 0$ . En el primer caso  $P_h = (1/w_h)C_{12}B_m$  es no singular que es equivalente al grado relativo igual a 1 o los órdenes de los ceros en infinito son todos iguales a 1. El sistema se comporta como sistemas independientes de primer orden con una entrada y una salida (de hecho en este caso el sistema es desacoplable renglón por renglón).

Una solución a la DFC se propone por,

**Lema 1.** Considere la Ec. (2) satisfaciendo la hipótesis 1, y la DFC dada por,

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{D}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ D(s) & -\tilde{X}(s) \end{bmatrix} = I_{2m} \quad (4)$$

Suponga que  $0 < a \in \mathfrak{R}$ ,  $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  y  $A_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  son no singulares, y  $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2)(s^2I_m - sA_{22} - A_{21}A_{12})$ . Si  $C_{12} =$

0 y  $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es no singular, una solución de la Ec. (4) sobre  $\mathfrak{RH}_\infty$  es,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \Gamma(s)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2}B_m \\ N(s) &= \frac{1}{(s+a)^2}C_{11}A_{12}, \quad D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) B_m \\ \tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_d s + A_{21} A_{12} Y_d + a^3 I_m) \\ \tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + Y_d) \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$  y  $Y_d := A_{22} + 3a I_m$ . Si  $C_{11} = 0$ , y  $A_{21}$  y  $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  son no singulares, una solución de la Ec. (4) sobre  $\mathfrak{RH}_\infty$  es,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \Gamma(s)C_{12}^{-1}, \quad \tilde{N}(s) = \frac{s}{(s+a)^2}B_m \\ N(s) &= \frac{s}{(s+a)^2}C_{12}, \quad D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) C_{12}^{-1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_r) B_m \\ \tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m) \\ \tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{12} (s I_m + Y_r) \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $X_r := A_{22} - Y_r + 3a I_m$  y  $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$ .

**Prueba.** Utilizando (ver [13]),

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & -N_{11}^{-1} N_{12} \Phi^{-1} \\ * & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde  $*$  denota cualesquier valor finito, y  $N_{11}$  y  $\Phi := N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12}$  son no singulares. Entonces,

$$(sI_n - A)^{-1} B = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} A_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \\ s \Gamma^{-1}(s) B_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si  $C_{12} = 0$  y  $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es no singular, de la Ec. (10),

$$P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \quad (11)$$

Dado que por hipótesis  $C_{11}$  y  $A_{12}$  son no singulares, entonces, se siguen los resultados de la Ec. (5). Sean,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+a} (X_d s + X_0) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty \\ Y(s) &= \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty \\ \tilde{X}(s) &= \frac{1}{s+a} B_m^{-1} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty \\ \tilde{Y}(s) &= \frac{1}{s+a} C_{11} A_{12} (s I_m + \tilde{Y}_0) \in \mathfrak{RH}_\infty \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $X_d, X_0, \tilde{X}_1, \tilde{X}_0, Y_d$  y  $\tilde{Y}_0$  son matrices constantes que se determinan algebraicamente igualando los términos de los polinomios cúbicos de las ecuaciones Diophantinas. Por lo tanto,  $X(s)N(s)+Y(s)D(s) = I_m$  y  $\tilde{N}(s)\tilde{X}(s)+\tilde{D}(s)\tilde{Y}(s) = I_m$  para la Ec. (5) son,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+a)^3} (X_d s + X_0) + \frac{1}{s+a} (s I_m + Y_d) \Gamma(s) &= I_m \text{ y} \\ \frac{1}{(s+a)^3} (\tilde{X}_1 s + \tilde{X}_0) + \frac{1}{s+a} \Gamma(s) (s I_m + \tilde{Y}_0) &= I_m \end{aligned} \quad (13)$$

respectivamente. Entonces, soluciones analíticas de las ecuaciones Diophantinas son,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_0 &= Y_d, \quad X_0 = Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m, \\ \tilde{X}_0 &= A_{21} A_{12} \tilde{Y}_0 + a^3 I_m, \quad \tilde{X}_1 = X_d, \end{aligned} \quad (14)$$

donde se utiliza  $Y_l A_{22} = A_{22} \tilde{Y}_0$ . Así, de la Ec. (12) se siguen los resultados de la Ec. (6). Si  $C_{11} = 0$ , y  $A_{21}$  y  $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  son no singulares, de la Ec. (10),

$$P(s) = \frac{s}{(s+a)^2} C_{12} \Gamma^{-1}(s) B_m \quad (15)$$

Por lo tanto, se siguen los resultados (7) y (8) análogamente haciendo  $X(s) = (1/(s+a))(X_r s + X_0) C_{12}^{-1} \in \mathfrak{RH}_\infty$ ,  $Y(s) = (1/(s+a))(s I_m + Y_r) B_m \in \mathfrak{RH}_\infty$ ,  $\tilde{X}(s) = (1/(s+a)) B_m^{-1} (X_r s + X_0) \in \mathfrak{RH}_\infty$  y  $\tilde{Y}(s) = (1/(s+a)) C_{12} (s I_m + Y_r) \in \mathfrak{RH}_\infty$  donde  $X_0 = Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$ . ■

En la prueba del Lema 1 se resuelven las ecuaciones Diophantinas directamente en  $\mathfrak{RH}_\infty$  sin la transformación bilineal  $\lambda = 1/(s+a)$ , usada en [4] y [13], dado que las soluciones en el anillo de los polinomios en  $\lambda$  son más intrincadas. Además, los resultados del Lema 1 son menos complejos con respecto a los de [5], i.e., las f.c.d. y f.c.i. pertenecen a  $\mathfrak{RH}_\infty$  y no se requiere el cambio de coordenadas utilizado en [5], disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional.

Basandose en el Lema 1 las PTCEs están dadas por,

**Teorema 2.** Considere la Ec. (2) en las configuraciones de las Figuras 1 y 2, satisfaciendo la hipótesis 1. Entonces, las PTCEs de uno y dos parámetros que estabilizan a la Ec. (2) son,

$$[K_r(s) \quad K(s)] = \hat{D}_k^{-1}(s) [Q(s) \quad \hat{N}_k(s)] \quad (16)$$

respectivamente, donde  $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  satisfaciendo  $\det(\hat{D}_k(s)) \neq 0$  y  $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  son parámetros libres. Sea  $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  no singular,  $0 < a \in \mathfrak{R}$ , y  $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2)(s^2 I_m - s A_{22} - A_{21} A_{12})$ . Si  $C_{12} = 0$ , y  $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  y  $A_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  son no singulares,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= (s I_m + Y_d - \frac{1}{s+a} R(s)) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_d s + Y_d A_{21} A_{12} + a^3 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $X_d := Y_d A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m$  y  $Y_d := A_{22} + 3a I_m$ . Si  $C_{11} = 0$ , y  $A_{21} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  y  $C_{12} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  son no singulares,

$$\begin{aligned} \hat{D}_k(s) &:= (s I_m + Y_r - \frac{s}{s+a} R(s)) B_m \\ \hat{N}_k(s) &:= \\ &[X_r s + Y_r A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^2 I_m + (s+a) R(s) \Gamma(s)] C_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $X_r := A_{22} - Y_r + 3a I_m$  y  $Y_r := -a^3 A_{12}^{-1} A_{21}^{-1}$ . Más aún, suponga que  $P(s) = (sI_n - A)^{-1} B$  satisfice la p.e.p. y,

$$\begin{aligned} \det(s^2 I_m + (a I_m + Y_d) s + a Y_d - R(s)), \text{ y} \\ \det(s^2 I_m + (a I_m + Y_r - R(s)) s + a Y_r), \end{aligned} \quad (19)$$

son polinomios Hurwitz, entonces  $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  y  $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ .

**Prueba.** Definiendo,

$$\tilde{D}_k(s) := (s+a)\tilde{D}_k(s), \tilde{N}_k(s) := (s+a)\tilde{N}_k(s) \quad (20)$$

entonces, el resultado de la Ec. (16) se sigue directamente de la Ec. (1) reemplazando las Ec. (5), Ec. (6) y Ec. (8). Dado que  $P(s)$  satisface la *p.e.p.* entonces, existen  $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  y  $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  dentro de las PTCEs dadas por la Ec. (16). Si  $\det(\tilde{D}_k(s))$  es un polinomio Hurwitz entonces  $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  y  $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ . Dado que  $s = -a$  es un polo estable y  $B_m$  es no singular,  $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  y  $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  si los polinomios de la Ec. (19) son Hurwitz. ■

Como se muestra por la Ec. (19) del Teorema 2 la estabilidad de las PTCEs puede lograrse seleccionando  $a$  y  $R(s)$  si  $C_{12} = 0$ , sin embargo ésto es una tarea más difícil si  $C_{11} = 0$ . Así, si  $K_r(s)$  es inestable en la configuración de la Fig. 2, éste deberá implementarse con  $\tilde{D}_k(s)$  dentro del lazo.

Por otro lado, el control de sensibilidad mezclada [13] es un método de diseño de lazo cerrado basado en la minimización de  $\|S_o(s)\|_\infty$  en Bajas Frecuencias (BF), donde  $S_o(s)$  es la función de sensibilidad a la salida, mejorando la regulación y la atenuación de  $d_o(t)$ , y en la minimización de  $\|T_{u_\Delta y_\Delta}(s)\|_\infty$  en AF, donde  $T_{u_\Delta y_\Delta}(s)$  es la función de transferencia de la salida a la entrada de la incertidumbre, preservando estabilidad bajo incertidumbres. El método está basado en que usualmente las perturbaciones son de BF y en que los modelos matemáticos son más exactos y precisos en BF, despreciando generalmente las dinámicas de AF.

Se considera el problema de sensibilidad mezclada (ver [6]) que involucra la minimización simultanea de  $\|S_{ol}\|_\infty$  y de  $\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty$ , ésto es,  $\min_{K(s)} \|S_{ol}\|_\infty$  sujeta a,

$$\|T_{u_\Delta y_\Delta h}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty \quad (21)$$

Este problema se resuelve fijando  $R(s)$  y  $Q(s)$  de las PTCEs, cuando  $\dot{y}_d(t) = 0$ . Una solución exacta a (21) para sistemas estrictamente propios, se propone por,

**Teorema 3.** Considere la Ec. (2) en las configuraciones de las Figuras 1 y 2. Suponga que  $K(s)$  y  $K_r(s)$  están dados por el Teorema 4. Si  $C_{12} = 0$ , y  $C_{11} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  es no singular,  $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  sea  $a(rI_m + A_{22})$ , y  $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$  sea  $qa^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$ . Entonces, los valores de  $r$  y  $q$  que resuelven (21) para un modelo de incertidumbre multiplicativo a la salida son,

$$r = \frac{a(3\|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty - a^2b)}{a^3m + \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty}, \quad q = \frac{w_h^2}{a^2 + w_h^2} \quad (22)$$

respectivamente, donde,

$$b := \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_d + aA_{22})A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty \\ m := \frac{1}{3aw_h^2} (\|C_{11}A_{12}(X_d + aY_d)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty - w_h^2b) \quad (23)$$

siendo  $Y_d := A_{22} + 3aI_m$  y  $X_d := Y_d A_{22} + A_{21}A_{12} + 3a^2I_m$ .

**Prueba.** La función de transferencia de  $y_d(t)$  a  $y(t)$  está dada por  $T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s)$  (ver [9]), en la configuración de la Fig. 1 donde  $N(s)$  y  $\tilde{N}_k(s)$  están dadas por (5) y (18), respectivamente. Para asegurar que  $\|S_{ol}\|_\infty = 0$  para cierto valor de  $r$ , si  $C_{12} = 0$ , entonces se propone que  $R(s)$  sea  $a(rI_m + A_{22})$ . Dado que  $\Gamma_h = I_m$  y  $\Gamma_l = (-1/a^2)A_{21}A_{12}$ , entonces,

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_d + a(rI_m + A_{22}))A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (24)$$

donde  $w_h > 0$  es una frecuencia fija en la banda de AF de  $P(s)$ . Por otro lado,

$$T_{ol} = I_m + \frac{3a-r}{a^3} C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1} \quad (25)$$

Por lo tanto, dado que  $a > 0$  y  $S_{ol} = I_m - T_{ol}$ , entonces,

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{|r-3a|}{a^3} \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty \quad (26)$$

La Ec.  $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$  tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas rectas de la Fig. 3, ésto es, de la Fig. 3,  $mr + b = [(3/a^2) - (1/a^3)r] \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty$ , que implica el resultado (22). Además,  $T_o(s) = N(s)Q(s)$  (ver [9]) en la configuración de la Fig. 2. Si  $C_{12} = 0$ , entonces  $Q(s)$  es  $qa^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1}$ , así, de la Ec. (5),

$$\|T_{oh}\|_\infty = \frac{a^2}{w_h^2} |q| \quad \text{y} \quad \|S_{ol}\|_\infty = |1 - q| \quad (27)$$

respectivamente. Por lo tanto,  $\|T_{oh}\|_\infty = \|S_{ol}\|_\infty$  tiene una solución en el punto de intersección de las dos líneas rectas descritas por los puntos  $\|S_{ol}\|_\infty = 1$  para  $q = 0$ ,  $\|S_{ol}\|_\infty = 0$  para  $q = 1$ ,  $\|T_{oh}\|_\infty = 0$  para  $q = 0$  y  $\|T_{oh}\|_\infty = a^2/w_h^2$  para  $q = 1$ , *i.e.*,  $(a^2/w_h^2)q = 1 - q$ , que implica el resultado (22). ■

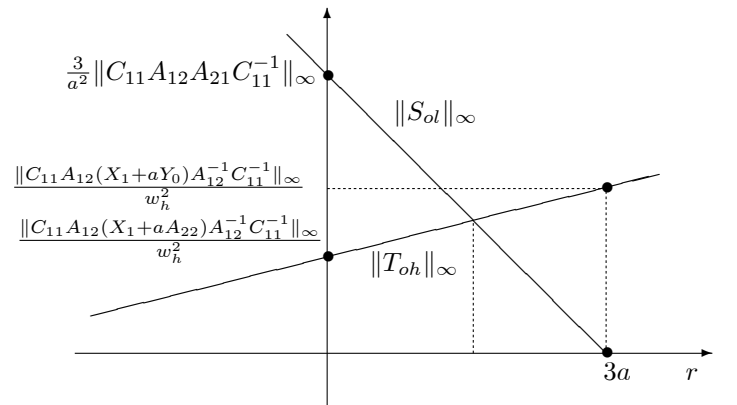


Fig. 3. Función de intersección para una configuración de un parámetro

Si  $C_{12} = 0$ , de las Ec. (22) y Ec. (26),

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{(b+3am)\|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty}{a^3m + \|C_{11}A_{12}A_{21}C_{11}^{-1}\|_\infty} \quad (28)$$

en la configuración de la Fig. 1. Además, en la configuración de la Fig. 2, de las Ec. (22) y Ec. (27),

$$\|S_{ol}\|_\infty = \frac{a^2}{a^2 + w_h^2} \quad (29)$$

Si  $w_h \rightarrow \infty$ , entonces, de (23),  $m \rightarrow 0$  y  $b \rightarrow 0$ , así, de (28) ambos  $\|T_{oh}\|_\infty$  y  $\|S_{ol}\|_\infty$  tienden a cero en la configuración de la Fig. 1. Además, si  $w_h \gg a^2$ , entonces de (29) ambos  $\|T_{oh}\|_\infty$  y  $\|S_{ol}\|_\infty$  tienden a  $a^2/w_h^2$  en la configuración de la Fig. 2. Sin embargo, si  $b \rightarrow 0$  y  $m \rightarrow 0$ , entonces  $r \rightarrow 3a$  y de (19), si  $r \rightarrow 3a$ ,  $K(s)$  y  $K_r(s)$  se vuelven inestables. Por lo tanto, para  $a$  suficientemente pequeña tal que la estabilidad de  $K(s)$  y  $K_r(s)$  se preserve, se resuelve el problema de sensibilidad mezclada incrementando  $w_h$ .

Estos resultados se ilustran por un ejemplo de simulación de un sistema de amortiguamiento de medio carro.

#### IV. SISTEMA DE AMORTIGUAMIENTO DE MEDIO CARRO

El modelo del sistema de amortiguamiento de medio carro está representado por (ver [5]),

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} u(t) + Hd(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (30)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{m_1} & \frac{1}{J}d_1 \\ \frac{-1}{m} & \frac{-1}{J}d_1 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ d_1 & -d_2 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -d_1k_1 & -d_2k_2 \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{-(b_{s2}+b_{s1})}{m} & \frac{-(d_2b_{s2}-d_1b_{s1})}{J} \\ \frac{-(d_2b_{s2}-d_1b_{s1})}{m} & \frac{-(b_{s1}d_1^2+b_{s2}d_2^2)}{J} \end{bmatrix} \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b_{s1} & 1 & b_{s2} \\ -d_1b_{s1} & 0 & d_2b_{s2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

siendo  $m$  y  $J$  la masa y el momento de inercia del cuerpo del vehículo, respectivamente,  $d_2$  y  $d_1$  las distancias entre la suspensión delantera y trasera al centro de masas (CM) del vehículo, respectivamente,  $k_2$  y  $k_1$  los coeficientes de elasticidad de la suspensión delantera y trasera respectivamente,  $b_{s2}$  y  $b_{s1}$  los coeficientes de amortiguamiento de la suspensión delantera y trasera, respectivamente. Sean  $u(t) := [F_1 \ F_2]^T$ ,  $d(t) := [V_{r1}(t) \ F_{mt}(t) \ V_{r2}(t)]^T$  donde  $F_i$  es la fuerza del actuador  $i$ ,  $F_{mt}(t)$  y  $V_{ri}(t)$ ,  $i = 1, 2$ , son entradas de perturbaciones medibles y no medibles, y  $x(t) := [x_{r1}(t) \ x_{r2}(t) \ Jw_j(t) \ mV_m(t)]^T$ , donde  $x_{r2}(t)$  y  $x_{r1}(t)$  son las posiciones relativas de la suspensión delantera y trasera respectivamente,  $V_m(t)$  y  $w_j(t)$  son la velocidad vertical y angular del cuerpo del vehículo en el CM.

La Ec. 30 está en la forma de la Ec. (2) y los bloques  $A_{12}$ ,  $C_{11}$  y  $B_m$  son no singulares. Considere los valores medios de los parámetros de  $P(s)$  (ver [5]),  $m = 1791.1$  kg,  $J = 3443.05$  kg m<sup>2</sup>,  $d_2 = 1.271$  m,  $d_1 = 1.716$  m,  $k_2 = 66824.4$  N/m,  $k_1 = 18615$  N/m,  $b_{s2} = 1190$

N s/m y  $b_{s1} = 1000$  N s/m. Todos los polos de  $P(s)$  son estables y así  $P(s)$  es fuertemente estabilizable. Del Lema 1 se obtienen las *f.c.d.* y *f.c.i.* de  $P(s)$  y las soluciones de las ecuaciones Diophantinas. Utilizando el Teorema 2 se obtienen las PTCEs de uno y dos parámetros, y del Teorema 3 se fijan  $R(s)$  y  $Q(s)$  resolviendo la Ec. (21) para las configuraciones de las Fig. 1 y Fig. 2.

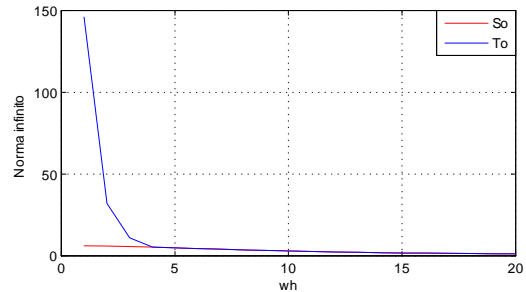


Fig. 4.  $\|S_{ol}\|_\infty$  y  $\|T_{oh}\|_\infty$  en función de  $w_h$

Seleccionando  $a = 10$ , la Fig. 4 muestra que conforme  $w_h$  se incrementa,  $\|S_{ol}\|_\infty$  y  $\|T_{oh}\|_\infty$  disminuyen sin embargo, si  $w_h < a$ , entonces  $\|S_{ol}\|_\infty$  y  $\|T_{oh}\|_\infty$  se incrementan con lo cual se pierde el objetivo de la minimización de estas normas, sin embargo, se espera que  $w_h > a$  dado que es una frecuencia en la banda de AF de  $P(s)$ .

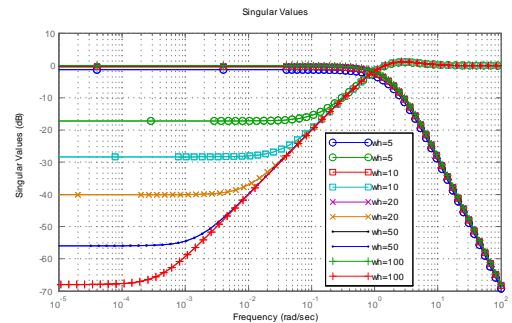


Fig. 5. Valores singulares de  $\|S_{ol}\|_\infty$  y  $\|T_{oh}\|_\infty$  al variar  $w_h$

En la Fig. 5 se muestra que si  $w_h$  toma valores grandes se puede corregir  $e(t)$  en estado estacionario, se tiene una atenuación mayor de  $d_o(t)$  y las frecuencias de corte de  $S_o(s)$  y  $T_o(s)$  no se mueven. Así,  $e(t)$  en estado estacionario se corrige ajustando  $a$ ,  $w_h$  o ambos.

En la Fig. 6 se muestra que si  $a$  toma valores grandes la atenuación de  $d_o(t)$  es deteriorada, sin embargo se incrementa el ancho de banda para las perturbaciones de AF y de la referencia. Esto se ve reflejado también en un incremento de la energía de  $u(t)$ .

Considere  $y_d = [1 \ 1.25]^T$ ,  $w_h = 100$  y  $d(t) = [\sin(300t) \ 1 \ \sin(300t)]^T$  para los controladores de uno y dos parámetros, y  $a = 2$  y  $a = 5$  para el

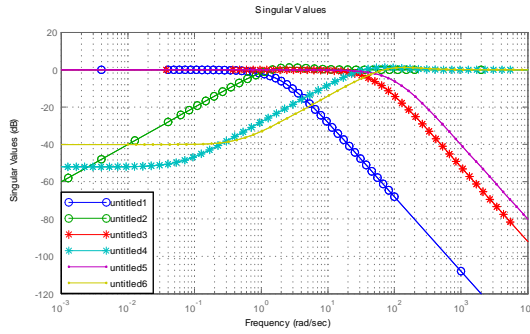


Fig. 6. Valores singulares de  $S_o(s)$  y  $T_o(s)$  al variar  $\alpha$

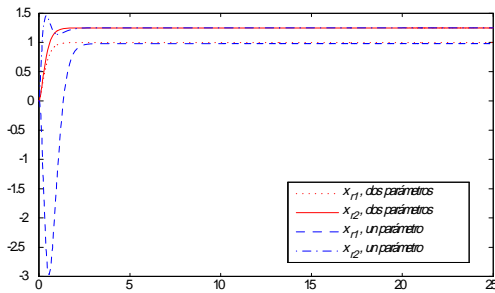


Fig. 7.  $y(t)$  con los controladores de uno y dos parámetros.

controlador de uno y dos parámetros, respectivamente. En las Fig. 7 y 8 se muestran  $y(t)$  y  $u(t)$ , respectivamente, en las configuraciones de las Fig. 1 y Fig. 2. En la Fig. 7 se muestra la atenuación de las perturbaciones y la disminución del  $e(t)$  en estado estacionario, como se esperaba. Además se tiene un mejor desempeño en la configuración de dos parámetros con respecto a la de un parámetro, debido al sobre paso negativo de esta última. En la Fig. 8 se muestra que las perturbaciones afectan directamente a  $u(t)$  por lo cual la efectividad del control queda sujeta al ancho de banda del actuador para poder atenuar las perturbaciones.

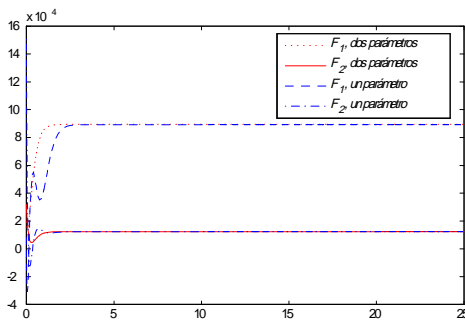


Fig. 8.  $u(t)$  con los controladores de uno y dos parámetros.

## V. CONCLUSIONES

Se consideran sistemas MEMS, estrictamente propios, de parámetros concentrados, LTI y fuertemente estabilizables con una realización mínima. En particular, se consideran sistemas Euler-Lagrange completamente actuados expresados en ecuaciones en espacio de estados. Los estados están dados por las coordenadas generalizadas de posición y velocidad, esto implica que la dimensión del estado es par y la dimensión de la salida es la mitad de la dimensión del estado. El enfoque utilizado es aplicar resultados algebraicos en una planta en términos de su realización en espacio de estado. Se presenta una solución a la DFC sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables, para sistemas estrictamente propios, y se proponen expresiones analíticas de las PTCEs de uno y dos parámetros. Se dan condiciones para obtener controladores estables. Además, se presentan expresiones analíticas para los parámetros libres, resolviendo un criterio de sensibilidad mezclada. Los resultados muestran que la sintonización de los parámetros es más compleja para la configuración de un parámetro y errores numéricos incrementan la dimensión del controlador. Se logra sensibilidad mezclada estabilizando el sistema a pesar de las perturbaciones e incertidumbres que son atenuadas, y se tiene un pequeño valor del error en estado estacionario, en la salida regulada. Se tiene un mejor desempeño y la magnitud de la entrada de la planta es menor para la configuración de dos parámetros que para la de un parámetro.

## REFERENCES

- [1] Campos-Delgado D. U. and Zhou K., " $\mathcal{H}_\infty$  strong stabilization", *Trans. on Automatic Control (TAC)*, vol. 46, no. 12, pp. 1968-1972, (2001).
- [2] R.Y. Chiang and M.G. Safonov, *Matlab Robust Control Toolbox User's Guide*, version 2, Math Works Inc., (1992).
- [3] Desoer C. A., Liu R., Murray J. and Saeks R., "Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis", *TAC*, pp. 399-412, (1980).
- [4] Doyle J. C., Francis B. A. and Tannenbaum A. R., *Feedback Control Theory*, McMillan, (1992).
- [5] Galindo R., "Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity", *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, vol. 223 (17), pp. 957-971, (2009).
- [6] Galindo R., "Tuning of a Non-conventional Mixed Sensitivity  $\mathcal{H}_\infty$  control", In the book *Emerging Technologies, Robotics and Control Systems*, second ed., International SAR, and also in *Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing*, vol. 2, pp. 141-149 and pp. 15-23, (2008).
- [7] Kučera V., *Discrete linear control, The polynomial equation approach*, Wiley, Chichester, (1979).
- [8] Nett C. N., Jacobson C. A. and Balas M. J., "A connection between state-space and doubly coprime fractional representations", *TAC*, vol. 29, no. 9, pp. 831-832, (1984).
- [9] Vidyasagar M., *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, Massachusetts: The MIT Press Cambridge, (1985).
- [10] Youla D. C., Bongiorno J. J. and Lu C. N., "Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants", *Automatica*, pp. 159-173, (1974).
- [11] Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J., "Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case", *TAC*, pp. 319-338, (1976).

- [12] Zeren M. and Özbay H., “On the synthesis of stable  $\mathcal{H}_\infty$  controllers”, *TAC*, vol. 44, no. 2, pp. 431–435, (1999).
- [13] Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, (1996).