

CONTROL BASADO EN PASIVIDAD PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

N. Romero-Mata, G. Espinosa-Pérez, P. Maya, J. Rivas
Facultad de Ingeniería-UNAM
Coyoacán DF 04510, México

20- Mayo- 2011

Resumen

La técnica de Asignación por Interconexión y Amortiguamiento de Control Basado en Pasividad, IDA-PBC por sus siglas en inglés, es bien utilizada para resolver problemas de regulación, sin embargo se ha estudiado poco para poder resolver problemas de seguimiento. Es común que este problema se resuelva visto como un problema de regulación, transformando el sistema original en un sistema de error de manera que éste sea estabilizado. En el trabajo se propone una metodología para emplear IDA-PBC para hacer seguimiento de trayectoria, la cual consiste en transformar el sistema a controlar y reescribirlo en una nueva coordenada que indique que se llegó a la trayectoria deseada cuando ésta es igual a cero. A este nuevo sistema se le aplica IDA-PBC, de manera que se aproveche las ventajas que esta técnica presenta. La metodología propuesta se emplea a un sistema de una grúa donde, dada una transformación específica y diversas trayectorias deseadas se puede observar que el sistema realmente sigue las trayectorias previamente definidas, ilustrando los resultados mediante algunas simulaciones.

Palabras clave: Control basado en pasividad, seguimiento de trayectorias, transformación no lineal.

1. Introducción

Resolver el problema de seguimineto de trayectorias utilizando una técnica de pasividad prácticamente está abierto, son pocas las referencias que han hecho seguimiento utilizando IDA-PBC. Uno

de los principales trabajos [2] muestra que, a través del cambio de coordenadas se obtiene un sistema Hamiltoniano por lo que implícitamente se hace IDA-PBC. Dentro del método se especifican condiciones de existencia de la transformación $\bar{x} = \phi(x)$, donde x son las coordenadas reales del sistema y \bar{x} las nuevas coordenadas del sistema transformado. Dentro de las principales ventajas que este método presenta es que la transformación está bien caracterizada ya que se puede obtener a partir de la solución de una ecuación diferencial parcial, sin embargo el resolver este tipo de ecuaciones no es sencillo, por lo que se dificulta su aplicación. Para evitar esto, por lo general se tiene que proponer parte de la transformación, además tiene como desventaja que este método está diseñado solo para sistemas Hamiltonianos.

Otro método que puede ser utilizado [1], consta en reescribir el sistema en términos del error, esto es $e = x - x_d$, este nuevo sistema se linealiza parcialmente y al resultante se le aplica IDA-PBC. Sin embargo, tiene la gran desventaja que, para poder transformarlo es necesario definir una trayectoria en particular solamente en una de sus coordenadas, en la otra coordenada se requiere que la trayectoria deseada sea cero, es decir se hace seguimiento en una y regulación en otra.

En este trabajo se propone una metodología en la que primero se transforma el sistema para representarlo en términos de las variables de error \bar{x} y posteriormente se intenta aplicar la metodología IDA-PBC. Una de las ventajas de este enfoque es que tanto a la transformación ni al sistema se requiere que tengan una estructura específica. En este artículo se presenta un caso ilustrativo de una grúa donde se desarrolla el método propuesto, los resul-

tados se ilustran a partir de algunas simulaciones. El resto del artículo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 2 se describe la formulación del problema a tratar. En la sección 3 se muestran los resultados de este trabajo aplicando la metodología propuesta para resolver en problema planteado presentando un caso de estudio. Posteriormente en la Sección 4 se muestran simulaciones realizadas del sistema de la sección anterior, para finalizar, la Sección 5 presenta las conclusiones de este trabajo.

2. Problema general

Para poder hacer seguimiento, el problema a resolver consiste en, dado un sistema $\dot{x} = f(x, u)$ encontrar una u y una $\bar{x} = \phi(x)$ tales que:

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}) \frac{\partial H(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \quad (1)$$

Cumpliendo con tres condiciones:

1. $F(\bar{x}) + F^T(\bar{x}) \leq 0$
2. $\arg \min\{H(\bar{x})\} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$
3. $\bar{x} = 0 \Rightarrow x = x_d$, x_d comportamiento deseado (variante en el tiempo)

Las dos primeras corresponden al problema de IDA, donde la primera asegura estabilidad asintótica en lazo cerrado, la segunda indica que la función H debe tener un mínimo en el punto deseado, mientras que la tercera está enfocada a resolver el problema de seguimiento, esto es, se quiere que cuando la coordenada transformada $\bar{x} = 0$ implique que las trayectorias del sistema se comporten como las deseadas.

Para resolver el problema anterior, en este artículo se propone la siguiente metodología.

Paso 1: Encontrar una transformación $\bar{x} = \phi(x)$ que satisfice la condición 3, bajo la cual un sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ se puede representar como:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})u$$

Paso 2: Una vez que el sistema es transformado, aplicar la técnica de diseño IDA-PBC para estabilizar el punto $\bar{x} = 0$, esto es, encontrar una \bar{u} , $H(\bar{x})$ y $F(\bar{x})$ tales que:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})\bar{u} = F(\bar{x}) \frac{\partial H(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \quad (2)$$

con:

$$\bar{g}^\perp \bar{f}(\bar{x}) = \bar{g}^\perp F(\bar{x}) \frac{\partial H(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \quad (3)$$

$$\bar{u} = (\bar{g}^T(\bar{x})\bar{g}(\bar{x}))^{-1} \bar{g}^T(\bar{x}) (F(\bar{x}) \frac{\partial H(\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \bar{f}(\bar{x}))$$

donde $\bar{g}^\perp(\bar{x})\bar{g}(\bar{x}) = 0$

Este método presenta dos ventajas principales:

- La estructura de la transformación $\phi(x)$ es libre, considerando que debe cumplir con la condición 3.
- La metodología se aplica a cualquier clase de sistemas, no necesariamente se aplica a sistemas Hamiltonianos.

Sin embargo cabe mencionar que:

- La principal desventaja es que se tiene que proponer la transformación $\phi(x)$.
- Aún cuando en [2] se resuelve el problema de seguimiento para sistemas Hamiltonianos y se tiene caracterizada la transformación, la conjetura principal de este trabajo es que con la metodología propuesta se puede resolver más fácil el problema planteado, además no hay la necesidad de hacer una linealización parcial como se muestra en [1].

Si se toma en cuenta que la transformación también depende de las trayectorias deseadas, entonces $\bar{x} = \phi(x, x_d)$, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \phi(x, x_d)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] + \frac{\partial \phi(x, x_d)}{\partial x_d} \dot{x}_d$$

con $\dot{x}_d = f(x_d) + g(x_d)u_d$, por lo tanto se tiene

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})\bar{u} \quad (4)$$

La ecuación (4) es la representación del sistema ya transformado donde

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) - g(x)\beta(x)] + \frac{\partial \phi}{\partial x_d} \dot{x}_d \\ \bar{g}(\bar{x}) &= \frac{\partial \phi(x, x_d)}{\partial x} g(x) \\ \bar{u} &= u + \beta(x) \end{aligned} \quad (5)$$

De esta manera se tiene un nuevo sistema expresado en las coordenadas transformadas \bar{x} . Es claro que para transformar el sistema se tiene que conocer la función $\phi(x)$, ya que obtenerla a partir de las ecuaciones (5) implica resolver ecuaciones diferenciales parciales y al no tener bien caracterizada la transformación, se dificulta obtener su solución.

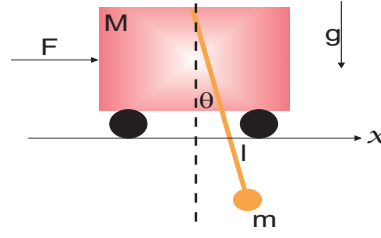


Figura 1: Modelo de una grúa

Actualmente no se tiene una solución completa para obtener la función $\phi(x)$ pero se tiene caracterizada parcialmente. Aún cuando se ha establecido que no se requiere una estructura específica, se debe de cumplir con el siguiente Lema:

Lema.

Utilizando el Teorema de la Función Implícita el cual establece que dada una función $F(z, y)|_{z=a, y=b} = 0$, si

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)|_{y=b} \neq 0$$

entonces existe una función $g : z \rightarrow y$ tal que $y = g(z)$.

Más aún, el teorema también establece que

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

Entonces, una transformación $\bar{x} = \phi(x)$ debe satisfacer las siguientes propiedades:

- i. $\ker\{\phi(x)\} = x_d$
- ii. $\det\left(\frac{-\partial\phi(x)}{\partial x}\right)|_{x=x_d} \neq 0$
- iii. $\frac{\partial\phi^{-1}(\bar{x})}{\partial\bar{x}} = \left(\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right)^{-1}$

Demostración:

i. Esta propiedad se cumple de manera trivial ya que es otra manera de representar la condición 3 descrita en la sección anterior.

ii. Aplicando el Teorema de la Función Implícita, considerando $z = \bar{x}$, $y = x$, $g(\bar{x}) = \phi^{-1}(\bar{x})$ lo que implica que $x = \phi^{-1}(\bar{x})$, y definiendo $F(\bar{x}, x) = [\bar{x} - \phi(x)] = 0$ entonces, para que la transformación sea un difeomorfismo, se debe cumplir con la propiedad 2.

iii. Del mismo teorema, se obtiene que la transformación inversa debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial\phi^{-1}(\bar{x})}{\partial\bar{x}} = -\left(\frac{\partial F(\bar{x}, x)}{\partial x}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F(\bar{x}, x)}{\partial\bar{x}}\right)$$

Si se considera que

$$\frac{\partial F(\bar{x}, x)}{\partial x} = -\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(\bar{x}, x)}{\partial\bar{x}} = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x} = I_m$$

donde I_m es la matriz identidad, al sustituir las ecuaciones se observa que se cumple con la propiedad 3.

△

Aunque no se ha logrado una generalización para obtener una transformación, en la siguiente sección se presenta una aplicación con la que se ilustra la utilidad de este enfoque.

3. Caso de estudio

Para ejemplificar los resultados obtenidos, se analizó el sistema de una grúa mostrado en la figura (1) el cual se obtuvo de la referencia [1].

3.1. Modelo

Para realizar el modelo del sistema se consideraron las siguientes coordenadas:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$x(t)$ corresponde a la posición de carro y $\theta(t)$ es el ángulo del péndulo respecto a la vertical. El modelo

dinámico se puede obtener a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange y se puede representar como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B(q) = G(q)u \quad (7)$$

donde:

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} M + m & ml \sin(q_2) \\ ml \sin(q_2) & ml^2 \end{bmatrix} \\ C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 0 & -ml\dot{q}_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B(q) &= \begin{bmatrix} 0 \\ ml \sin(q_2) \end{bmatrix} \\ G(q) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En el modelo M es la masa del carro, m y l son la masa y la longitud del péndulo, $u = F$ corresponde a la entrada de control. El modelo se puede reescribir de la forma (4), considerando:

$$x_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} ; \quad x_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

De esta manera se tiene:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M(x_1)^{-1}C(x_1, x_2)x_2 - M(x_1)^{-1}B(x_1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ M(x_1)^{-1}G(x_1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Una vez que se tiene esta representación, se puede aplicar la metodología propuesta para poder resolver el problema de seguimiento.

3.2. Resultado principal

Como se mencionó en la Sección 2, los pasos a seguir son:

PASO 1: Transformación del sistema.

En este caso se propone una transformación de la forma

$$\bar{x} = \phi(x, x_d) = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1d} \\ x_2 - x_{2d} \end{bmatrix} \quad (10)$$

la cual cumple con las propiedades mostradas en la sección (3.A). Aplicando las ecuaciones mostradas en (5), entonces se tiene

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -M(\bar{x}_1)^{-1}C(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\bar{x}_2 - M(\bar{x}_1)^{-1}B(\bar{x}_1) - \dot{x}_{2d} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{g}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ M(\bar{x}_1)^{-1}G(\bar{x}_1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

considerando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x, x_d)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \phi(x, x_d)}{\partial x_d} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En este caso se considero que $\beta(x) = 0$ por lo que $\bar{u} = u$. De esta manera ya puede expresar al sistema como en (4).

PASO 2: Aplicar IDA-PBC.

Una vez teniendo el sistema transformado, se le aplica IDA-PBC para estabilizar la nueva coordenada en $\bar{x} = 0$. Para ello, se desarrolla la ecuación (2) obteniendo

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -M^{-1}C\bar{x}_2 - M^{-1}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}G \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\bar{x}_1} H \\ \nabla_{\bar{x}_2} H \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

De la expresión anterior se pueden obtener dos ecuaciones

$$\begin{aligned} F_{11}\nabla_{\bar{x}_1} H + F_{12}\nabla_{\bar{x}_2} H - (\dot{\bar{x}}_2) &= 0 \\ F_{21}\nabla_{\bar{x}_1} H + F_{22}\nabla_{\bar{x}_2} H + M^{-1}(C + B) - \dot{x}_{2d} &= MG u \end{aligned} \quad (14)$$

De las ecuaciones anteriores se tienen como grados de libertad los componentes de la matriz $F(\bar{x})$ y la función $H(\bar{x})$, que para poder diseñarlas se deben cumplir las condiciones mostradas en la Sección 2. En esto caso se propone la función $H(\bar{x})$ como una función de energía

$$H = \frac{1}{2}(\bar{x}_2^t M_d \bar{x}_2 + (a - a \cos(x_{\bar{1}1})) + b(x_{\bar{1}1})^2 + c(x_{\bar{1}2})^2) \quad (15)$$

$$M_d = \begin{bmatrix} md11 & md12 \\ md12 & md22 \end{bmatrix}$$

con $a, b, c > 0$ y $md11 > 0, md11 \cdot md22 > md12^2$. De esta manera la función $H(\bar{x})$ tiene un mínimo en $\bar{x} = 0$, además se puede verificar que

$$\nabla_{\bar{x}_1} H = \begin{bmatrix} b\bar{x}_{11} \\ \frac{1}{2}a \sin(\bar{x}_{12}) + c\bar{x}_{12} \end{bmatrix} \quad \nabla_{\bar{x}_2} H = M_d \bar{x}_2 \quad (16)$$

Para satisfacer las ecuaciones (14) se tiene que determinar los componentes de la matriz $F(\bar{x})$. De la primera ecuación, se puede observar que, como no depende explícitamente de \bar{x}_1 , entonces se puede fijar $F_{11} = 0$, quedando entonces

$$F_{12}(M_d)\bar{x}_2 - (\bar{x}_2) = 0 \implies F_{12} = (M_d)^{-1}$$

De esta manera la primer ecuación queda resuelta. Ahora se deben encontrar los valores de F_{21} y F_{22} para satisfacer la segunda ecuación. Para forzar que la matriz $F(\bar{x})$ sea antisimétrica, entonces se fija

$$F_{21} = -F_{12}^T \implies F_{21} = -(M_d)^{-T}$$

Por último falta determinar los valores de F_{22} que en este caso son grados de libertad para el diseño de control, por lo tanto ya se tienen todos los elementos para obtener \bar{u} como lo indica la ecuación (3).

4. Simulaciones

Con base en el análisis previo, se realizaron simulaciones con diferentes trayectorias deseadas para observar el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

De acuerdo con [1] se consideraron los siguientes parámetros: $M = 1,3[kg]$, $m = 0,2[kg]$, $l = 0,25[m]$, $g = 9,81[m/s^2]$. Con los valores de las matrices M_d y F_{22} se obtuvieron mejores resultados para observar de manera más clara el comportamiento del sistema.

$$M_d = \begin{bmatrix} 6 & 1,5 \\ 1,5 & 5 \end{bmatrix} ; \quad F_{22} = \begin{bmatrix} -34 & -8 \\ -1 & -12 \end{bmatrix}$$

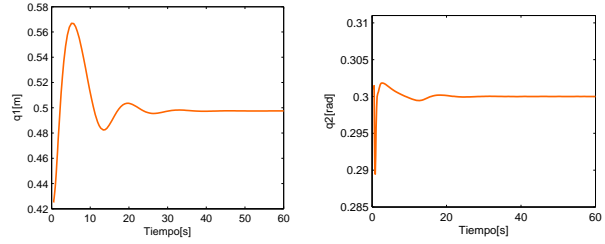


Figura 2: Posición (q_1) y ángulo (q_2) reales

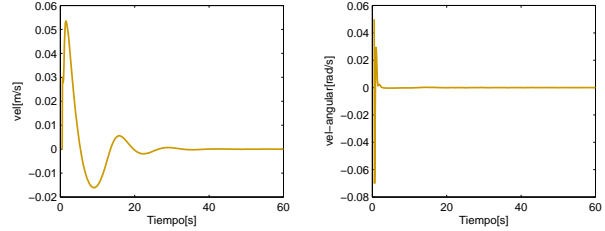


Figura 3: Velocidad (\dot{q}_1) y velocidad angular (\dot{q}_2) reales

La primera trayectoria deseada es constante para ambas coordenadas, $q_{1d} = 0,5$ y $q_{2d} = 0,3$, lo que implica que las velocidades deben ser cero.

En la figura (2) se observa que las dos trayectorias llegan al valor constante deseado corroborándolo en la figura (3) donde se observa que las velocidades llegan a cero. Al ser trayectorias constantes puede decirse que se resuelve un problema de regulación, así que se consideraron trayectorias deseadas variantes en el tiempo, en una de sus coordenadas.

La primer prueba consiste en considerar la velocidad del carro constante $\dot{q}_{1d} = 0,1$, obteniendo una recta en la posición, el ángulo deseado también será constante $q_{2d} = 0,5$.

En las figuras (4) y (5) se puede observar que las coordenadas reales se comportan de acuerdo a

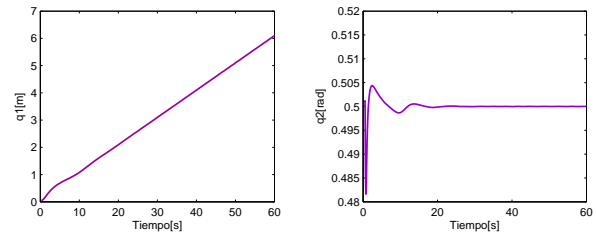


Figura 4: Posición (q_1) y ángulo (q_2) reales

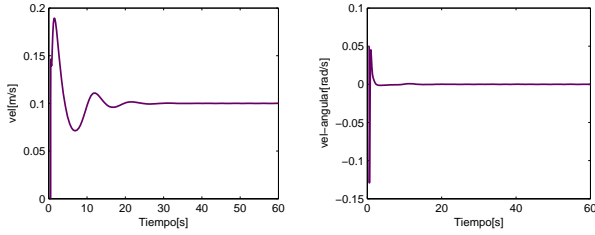


Figura 5: Velocidad (\dot{q}_1) y velocidad angular (\dot{q}_2) reales

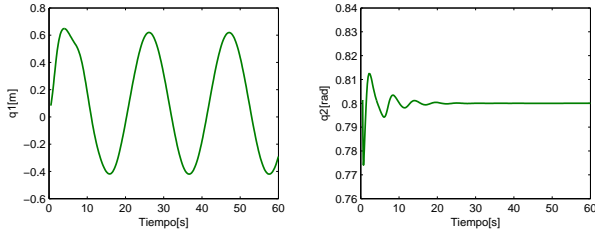


Figura 6: Posición (q_1) y ángulo (q_2) reales

las trayectorias deseadas tanto en posición como en ángulo. Además la velocidad llega al valor constante deseado, por lo que se puede decir que la metodología empleada se puede aplicar para una trayectoria variante en el tiempo para la posición.

Considerando ahora una trayectoria variante en el tiempo que no sea constante en la velocidad, por ejemplo se propone que la trayectoria deseada para la posición del carro sea una senoidal, $q_{1d} = 0,5 \sin(0,3t)$, mientras que el ángulo deseado se considera de nuevo constante $q_{2d} = 0,8$. La gráficas resultantes se muestran en las figuras (6) y (7) donde se observa que nuevamente ambas coordenadas se comportan de acuerdo a las trayectorias deseadas no solo en posiciones, también en velocidades.

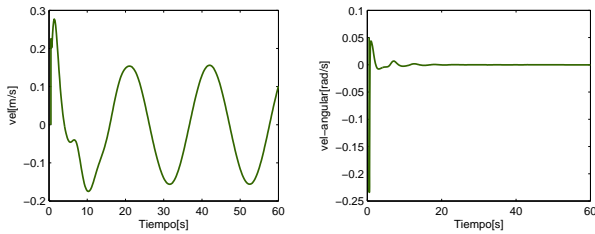


Figura 7: Velocidad (\dot{q}_1) y velocidad angular (\dot{q}_2) reales

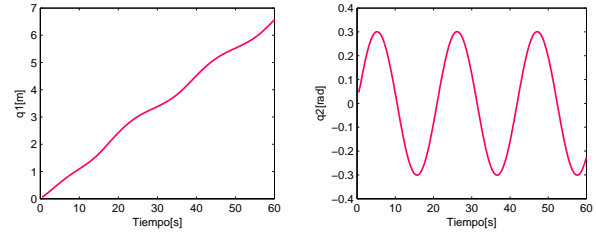


Figura 8: Posición (q_1) y ángulo (q_2) reales

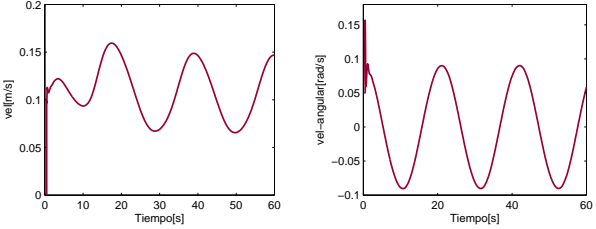


Figura 9: Velocidad (\dot{q}_1) y velocidad angular (\dot{q}_2) reales

Por último se consideran ambas trayectorias deseadas variantes en el tiempo, en este caso $\dot{q}_{1d} = 0,1$ y ahora el ángulo deseado será una trayectoria senoidal $q_{2d} = 0,3 \sin(0,3t)$.

Los resultados se pueden observar en las figuras (8) y (9). Se puede ver que la posición del carro sí sigue una línea recta de acuerdo a su trayectoria deseada pero se observa que tiene ligeras oscilaciones debido a la trayectoria que realiza el péndulo, esto se debe al propio acoplamiento que existe entre ambas partes lo cual se corrobora en la gráfica de la velocidad \dot{q}_1 donde se observa que aunque sí se llega al valor deseado también oscila de acuerdo a la trayectoria de q_2 .

5. Conclusiones

En este artículo se ha evaluado la metodología propuesta bajo la cual se puede aplicar la técnica de IDA-PBC para resolver el problema de seguimiento. Esta metodología se basa en transformar cualquier sistema para expresarlo en una nueva coordenada \bar{x} la cual se va a estabilizar, de manera que cuando $\bar{x} = 0$ implique que $x = x_d$ considerando x_d las trayectorias deseadas.

La metodología propuesta tiene como ventaja que se puede aplicar a cualquier sistema de la forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ y poder utilizar cualquier transfor-

mación que cumpla con las propiedades necesarias indicadas en la sección (3.A).

Para mostrar como se realiza el método propuesto se analizó como caso de estudio una grúa, donde se pudo observar que la transformación $\bar{x} = x - x_d$ es viable para expresar el modelo en las nuevas coordenadas. Para estabilizar $\bar{x} = 0$ del modelo transformado se utilizó IDA-PBC, proponiendo una función de energía $H(\bar{x})$ en lazo cerrado y calculando los elementos de la matriz $F(\bar{x})$ para satisfacer las ecuaciones propias de esta técnica. Se pudo ilustrar mediante simulaciones que con la metodología empleada se puede hacer seguimiento para diferentes trayectorias deseadas, incluso variantes en el tiempo, en ambas coordenadas del sistema.

En este artículo no se muestra una caracterización más profunda sobre la transformación, se puede apreciar cualquiera que cumpla con las condiciones establecidas pero, como trabajo a futuro, se espera poder tener mayor información sobre las propiedades de la transformación de manera que, sin que se tenga que proponer explícitamente $\phi(x)$, se puedan calcular otras transformaciones que también ayuden a resolver el problema de seguimiento bajo el esquema propuesto.

Referencias

- [1] Rakesh Singhal, Rupesh Patayane and Ravi N. Banavar, *Tracking a Trajectory for a Gantry Crane: Comparison Between IDA-PBC and Direct Lyapunov Approach*. IEEE International Conference on Industrial Technology, 2006. ICIT 2006.
- [2] Kenji Fujimoto, Kazunori Sakurama, Toshiharu Sugie, *Trajectory tracking control of port-controlled Hamiltonian systems via generalized canonical transformations*. Automatica 2003
- [3] Romeo Ortega, Mark W. Spong, Fabio Gómez-Estern, and Guido Blankenstein, *Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, No. 8, August 2002
- [4] Kenji Fujimoto, Toshiharu Sugie, *Canonical transformation and stabilization of general-*

ized Hamiltonian systems. Systems and Control Letters 2000

- [5] Giuseppe Viola, Romeo Ortega, Ravi Banavar, Jose Angel Acosta, Alessandro Astol, *Total Energy Shaping Control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, No. 6, Junio 2007
- [6] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Third Edition, Pearson Education.
- [7] Eduardo D. Sontag, *Mathematical Control Theory*. Second Edition, Springer.
- [8] Peter E. Wellstead, *Introduction to Physical System Modelling*. Control Systems Principles
- [9] Ortega, R., Loría Perez, J.A., Nicklasson, P.J., Sira-Ramirez, H.J., *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*. Springer 1998.