

Esquema FDI basado en observadores para sistemas LPV: aplicación a un reactor anaerobio

M.P. Reyes-Yépez*, C. M. Astorga-Zaragoza, M. Adam-Medina,
G. Madrigal-Espinosa, V. M. Alvarado-Martínez
Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Interior internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos
*miriam_yepezh@cenidet.edu.mx

Resumen—En el presente artículo se muestra el diseño de observadores tipo Luenberger para sistemas lineales de parámetros variables (LPV) politópicos, aplicados a la detección y diagnóstico de fallas, bajo un esquema de observadores generalizados (GOS). La validación del esquema GOS se realiza a nivel simulación utilizando como caso de estudio un reactor anaerobio de manto de lodos de flujo ascendente. La representación LPV de la planta se obtiene linealizando el modelo no lineal del reactor anaeróbico, evaluándolo en cada vértice del polítopo.

Palabras clave: Observadores, FDI, LPV.

I. INTRODUCCIÓN

El interés por los métodos de modelado para sistemas LPV y por los trabajos realizados para lograr una extensión de las herramientas para los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) con el objetivo de ser empleadas en los sistemas LPV, se ha incrementado, ya que éstos últimos pueden interpretarse como una generalización de un sistema LTI cuando la trayectoria paramétrica admisible es constante (Teppa, P., 2008).

El diseño de observadores para sistemas LPV reportado por Hamdi et al., (2009), Gagliardi et al., (2010), Patton y Klinkhieo, (2010), muestran las ventajas de utilizar este enfoque para abordar la problemática del diagnóstico y aislamiento de fallas.

Este trabajo tiene como objetivo presentar el diseño de un observador tipo Luenberger para sistemas LPV politópicos, el cual posteriormente será empleado en un banco de observadores GOS para la detección de fallas en sensores, utilizando como caso de estudio un reactor anaerobio de manto de lodos de flujo ascendente.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la sección II se abordan generalidades de los sistemas LPV; posteriormente en la sección III, se presenta el diseño de un observador tipo Luenberger para sistemas LPV politópicos; en la sección IV se muestran las características de tres bancos de observadores empleados para el diagnóstico y detección de fallas; en la sección V se presenta el procedimiento para obtener un esquema GOS con el cual es posible detectar fallas en los sensores de la planta utilizada como caso de estudio; por último, en la sección VI se presentan las conclusiones del trabajo.

II. GENERALIDADES DE LOS SISTEMAS LPV

Un sistema LPV es una descripción matemática de un sistema que depende explícitamente de un vector de parámetros variantes en el tiempo que pueden medirse en tiempo real (Teppa, 2008). Este tipo de sistemas es descrito, $\forall t \geq 0$, por la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles.

Las matrices dinámicas $A(\rho)$ y $B(\rho)$ dependen de uno o varios parámetros variantes en el tiempo $\rho \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$.

El modelo descrito por la Ec.1 evoluciona en función de una trayectoria paramétrica admisible, lo que significa que cada uno de los puntos pertenece en todo instante de tiempo al conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^l$, es decir, el vector de parámetros satisface en todo momento la condición:

$$\rho(t) \in \Omega = \{\rho(t) : \underline{\rho}_i \leq \rho_i(t) \leq \bar{\rho}_i \forall i = 1, 2, \dots, l\} \subset \mathbb{R}^l$$

donde $\underline{\rho}_i$ y $\bar{\rho}_i$ son las cotas superior e inferior del parámetro $\rho_i(t)$ respectivamente.

En los sistemas LPV, los parámetros considerados como parámetros variables deben satisfacer las siguientes condiciones:

- El parámetro $\rho_i(t)$ debe ser medible $\forall t \geq 0$,
- Cada parámetro $\rho_i(t)$ varía en un rango con valores extremos conocidos y acotados.

Como consecuencia de estas dos suposiciones, el vector de parámetros $\rho(t)$ se encuentra dentro de un polítopo de 2^l vértices, donde l es el número de parámetros variables. Cada vértice del polítopo está formado por la combinación de los valores extremos de cada parámetro.

Sistemas LPV politópicos

La representación politópica de un sistema LPV consiste en definir funciones de ponderación que permitan obtener las variables del sistema como sumatoria de los modelos

definidos en cada vértice del polítopo. Esta función de ponderación debe cumplir con las siguientes restricciones:

$$\lambda_i(\rho) \geq 0 \forall t \sum_{i=1}^{2^l} \lambda_i(\rho) = 1$$

Considerando lo anterior, la representación politópica del sistema descrito en la Ec. (1) es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas y $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles y las matrices dinámicas evolucionan en función del parámetros de la siguiente manera:

$$A(\rho) = \sum_{i=1}^{2^l} \lambda_i(\rho)A_i, B(\rho) = \sum_{i=1}^{2^l} \lambda_i(\rho)B_i$$

Aquí, las matrices A_i, B_i representan matrices constantes obtenidas al evaluar el sistema LTI en cada vértice del polítopo.

III. DISEÑO DEL OBSERVADOR

Observador LPV politópico tipo Luenberger

Considerando la clase de sistemas LPV politópicos descritos en la Ec. (2), el observador propuesto en Daafouz et al. (2000) es:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\rho)\hat{x}(t) + B(\rho)u(t) + L(\rho)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $L(\rho) = \sum_{i=1}^{2^l} \lambda_i(\rho)L_i$ es la matriz de ganancias del observador obtenida para cada vértice del polítopo. Para garantizar la convergencia del observador se realiza el siguiente procedimiento:

Se define el error de estimación como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

cuya derivada es:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ &\quad - A(\rho)\hat{x}(t) - B(\rho)u(t) - L(\rho)(y(t) - \hat{y}(t)) \\ &= [A(\rho) - L(\rho)C](x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= [A(\rho) - L(\rho)C]e(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación dinámica del error se expresa como:

$$\dot{e}(t) = [A(\rho) - L(\rho)C]e(t) \quad (4)$$

De la Ec. (4) se deduce que el error de estimación será estable si $A(\rho) - L(\rho)C$ es una matriz Hurwitz $\forall t$. Para obtener las ganancias del observador $L(\rho)$ que garanticen dicha estabilidad, se emplea el método de Lyapunov.

Proponiendo la función candidata de Lyapunov en función del error de estimación:

$$V(t) = e^T(t)Pe(t); P = P^T > 0 \quad (5)$$

Derivando con respecto al tiempo la Ec. (5) se obtiene:

$$\dot{V}(t) = \dot{e}^T(t)Pe(t) + e^T(t)P\dot{e}(t) \quad (6)$$

Sustituyendo la Ec. (4) en la Ec. (6):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T(t)[A(\rho) - L(\rho)C]^T Pe(t) \\ &\quad + e^T(t)P[A(\rho) - L(\rho)C]e(t) \\ &= e^T(t)[(A(\rho) - L(\rho)C)^T P + P(A(\rho) - L(\rho)C)]e(t) \end{aligned}$$

Para garantizar la estabilidad del error se debe satisfacer la siguiente desigualdad matricial lineal (LMI):

$$((A(\rho) - L(\rho)C)^T P + P(A(\rho) - L(\rho)C)) < 0 \quad (7)$$

Definiendo una región LMI situada a una distancia $-\alpha$ del origen en el eje real definida por Chilali y Gahinet (1996), se obtiene la siguiente LMI:

$$A^T(\rho)P - C^T L^T(\rho)P + PA(\rho) - PL(\rho)C + 2\alpha P < 0$$

Utilizando la variable auxiliar $Q(\rho) = PL(\rho)$

$$A^T(\rho)P - C^T Q^T(\rho) + PA(\rho) - Q(\rho)C + 2\alpha P < 0 \quad (8)$$

Por lo tanto, el problema de garantizar la estabilidad del observador se reduce a resolver la LMI de la Ec. (8). Una vez resuelta esta LMI, las ganancias del observador están dadas por $L(\rho) = P^{-1}Q(\rho)$. Por la estructura tanto de las matrices dinámicas del sistema como de las ganancias del observador, esta LMI se resuelve para cada vértice del polítopo, lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$A_i^T P - C^T Q_i^T + PA_i - Q_i C + 2\alpha P < 0$$

Por lo que $L_i = P^{-1}Q_i$

Condición de observabilidad

Para el diseño del observador se debe satisfacer la siguiente condición:

Es posible diseñar un observador con la estructura descrita en la Ec. (3) para el sistema de la Ec. (2) si y sólo si, la siguiente condición de rango (Briat, C., 2008):

$$\text{rank}(O(\rho)) = n; O(\rho) = \begin{bmatrix} C \\ CA(\rho) \\ \vdots \\ CA(\rho)^{n-1} \end{bmatrix}$$

se mantiene $\forall \rho$.

IV. ESQUEMA FDI BASADO EN OBSERVADORES

Existen diferentes esquemas de detección y localización de fallas (FDI) basados en observadores. Tal es el caso de los esquemas que utilizan bancos de observadores para generar los residuos. En el caso de diagnóstico de fallas en sensores hay diferentes esquemas FDI dependiendo el número de observadores empleados: a) el esquema de observadores simplificado (SOS) sólo requiere un observador, utiliza todas las entradas y sólo una salida, por lo cual detecta fallas en un sensor; b) el esquema de observadores dedicado (DOS), también utiliza todas las entradas y sólo una salida, sin embargo en este esquema se construye un banco de observadores capaz de localizar múltiples fallas en sensores; por último, c) el esquema de observadores generalizado (GOS) el cual implica un banco de observadores, donde cada observador utiliza todas las entradas y salidas, con lo cual se logra la localización de fallas únicas (Martínez et al., 2011).

En este trabajo se empleó el esquema GOS para el diseño del FDI. Una representación esquemática de éste se muestra en la siguiente figura:

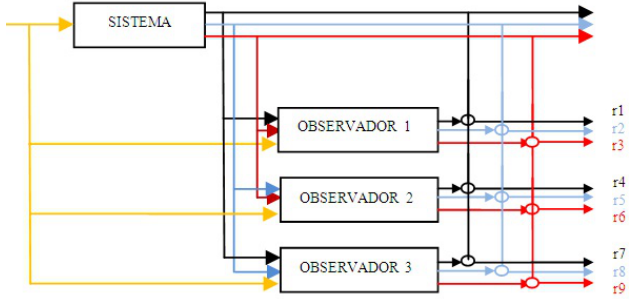


Figura 1. Diagrama esquemático de banco de observadores GOS.

El esquema DOS no es aplicable al caso de estudio utilizado en este trabajo, ya que la condición de observabilidad no se satisface.

El esquema GOS permite obtener residuos como resultado de la comparación de las salidas reales del sistema y las estimaciones realizadas con cada observador. Una vez obtenidos los residuos se generan las firmas características de cada falla.

V. ESQUEMA FDI APLICADO A UN REACTOR ANAEROBIO

Modelo matemático del sistema

Como caso de aplicación del esquema FDI basado en observadores, se considera un reactor de manto de lodos de flujo ascendente (UASB) cuyo modelo matemático no lineal está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones (Martínez

TABLA I

PARÁMETROS DEL SISTEMA

Parámetro	Valor y unidades
$k_{m,1}$	5.1 gDQO/gDQO d
$k_{s,1}$	0.5 gDQO/L
k_d	0.02 L/d
Y_1	0.1 gDQO/gDQO
Y_{ch4}	0.35 Lch4/gDQO
a	0.5(adimensional)

et al., 2011):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= Y_1 k_{m,1} \frac{s_1}{k_{s,1} + s_1} I_{pH} x_1 - a D x_1 - k_d x_1 \\ \dot{s}_1 &= D(s_1^i - s_1) - k_{m,1} \frac{s_1}{k_{s,1} + s_1} I_{pH} x_1\end{aligned}\quad (9)$$

$$\dot{Q}_{ch4} = (1 - Y_1) Y_{ch4} k_{m,1} \frac{s_1}{k_{s,1} + s_1} I_{pH} x_1 - Q_{ch4}$$

con:

$$I_{pH} = \frac{1 + 2 * 10^{0.5(pH_{LL} - pH_{UL})}}{1 + 10^{pH - pH_{UL}} + 10^{(pH_{LL} - pH)}}$$

donde x_1 es la concentración de masa anaerobia, s_1 es la concentración de materia orgánica expresada como demanda química de oxígeno (DQO), Q_{ch4} es el metano producido por el biorreactor, D es la tasa de dilución, $k_{m,1}$, k_d y $k_{s,1}$ son la razón de crecimiento de masa anaerobia, la velocidad de dilución del reactor y la constante de decrecimiento de semi-saturación para la biomasa anaerobia, respectivamente. Y_1 es el coeficiente de desempeño de degradación de DQO, s_1^i es la concentración de DQO en el afluente, I_{pH} representa la inhibición de pH .

Los valores de los parámetros empleados se presentan en la tabla I.

La representación LPV politópica del sistema descrito por la Ec. (9) se obtuvo por medio de la expansión en serie de Taylor truncada al primer orden evaluando en cada vértice del politopo.

Para dicha representación se consideran como parámetros variables: $D(t)$ e $I_{pH}(t)$, los cuales cumplen con las condiciones establecidas en la sección II. Su rango de variación es:

$$D(t) \in [0.3 \quad 0.5] \quad I_{pH} \in [0.9068 \quad 1]$$

Se considera como entrada del sistema a s_1^i , la cual representa la concentración de materia orgánica en el afluente del biorreactor.

La estructura general de las matrices dinámicas es:

$$A_i = \begin{bmatrix} Y_1 b I_{pH} - a D - k_d & Y_1 c I_{pH} x_1 & 0 \\ -b I_{pH} & -D - c I_{pH} x_1 & 0 \\ (1 - Y_1) Y_{ch4} b I_{pH} & (1 - Y_1) Y_{ch4} c I_{pH} x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ D \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$b = k_{m,1} \frac{s_1}{k_{s,1} + s_1} \quad c = k_{m,1} \frac{k_{s,1}}{(k_{s,1} + s_1)^2}$$

Evaluando en cada vértice del polítopo, las matrices constantes son:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.17689 & 0 \\ -1.7 & -2.068 & 0 \\ 0.5355 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.22 & 0 \\ -1.7 & -2.5 & 0 \\ 0.5355 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0682 & 0 \\ -2.7 & -1.1819 & 0 \\ 0.8505 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0.102 & 0 \\ -2.7 & -1.5196 & 0 \\ 0.8505 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las funciones de ponderación empleadas son (Hamdi et al., 2009):

$$\lambda_1(\rho) = \frac{\underline{D} - D(t)}{\underline{D} - \underline{D}} * \frac{\overline{I_{pH}} - I_{pH}(t)}{\overline{I_{pH}} - \underline{I_{pH}}},$$

$$\lambda_2(\rho) = \frac{\underline{D} - D(t)}{\underline{D} - \underline{D}} * \frac{I_{pH}(t) - \underline{I_{pH}}}{\overline{I_{pH}} - \underline{I_{pH}}},$$

$$\lambda_3(\rho) = \frac{D(t) - \underline{D}}{\underline{D} - \underline{D}} * \frac{\overline{I_{pH}} - I_{pH}(t)}{\overline{I_{pH}} - \underline{I_{pH}}},$$

$$\lambda_4(\rho) = \frac{D(t) - \underline{D}}{\underline{D} - \underline{D}} * \frac{I_{pH}(t) - \underline{I_{pH}}}{\overline{I_{pH}} - \underline{I_{pH}}},$$

con las que se satisface la restricción

$$\lambda_i(\rho) \geq 0 \forall t \sum_{i=1}^{2^l} \lambda_i(\rho) = 1$$

Esquema FDI

El observador propuesto para el sistema empleado como caso de estudio es un observador tipo Luenberger cuya estructura se muestra en la Ec. (3).

Suponiendo que se tienen disponibles todas las salidas del sistema, se proponen las siguientes matrices para realizar el esquema GOS:

$$\begin{array}{ccc} \text{Observador1} & \text{Observador2} & \text{Observador3} \\ C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Con estas matrices se garantiza que el sistema es completamente observable. Por definición, cuando se emplea el esquema GOS, se consideran todas las entradas y la $p - 1$ salida en cada observador. Sin embargo, el sistema deja de ser observable si en el observador 3 sólo se emplearan las salidas 1 y 2. Por tal motivo, se consideró la estructura $C_3 = [0 \ 0 \ 1]$ para el observador 3, con la cual se garantiza la observabilidad del sistema. Para resolver las

LMI de cada observador, se definieron los siguientes valores de α :

$$\alpha = 10, \text{ para el observador 1 y 3}$$

$$\alpha = 50, \text{ para el observador 2}$$

En las siguientes figuras se presentan las gráficas de las estimaciones obtenidas con los tres observadores. Se comparan las variables de estado obtenidas con el modelo no lineal y la estimación realizada con el observador tipo Luenberger para sistemas LPV politópicos.

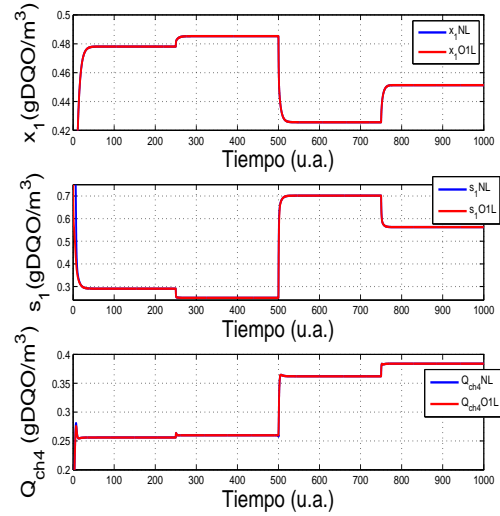


Figura 2. Estimación empleando C_1 , observador 1.

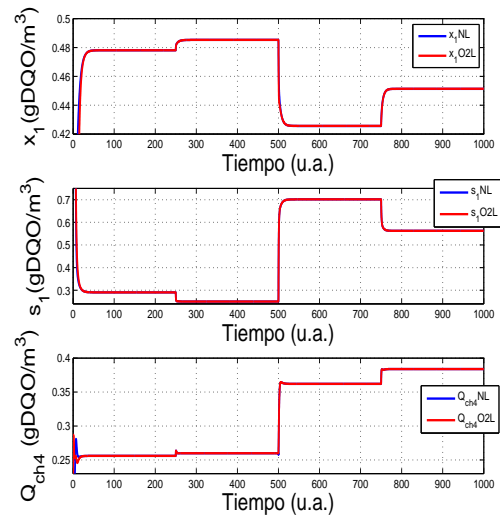


Figura 3. Estimación empleando C_2 , observador 2.

En las tres figuras anteriores se observa una rápida convergencia del observador. En el caso de los observadores

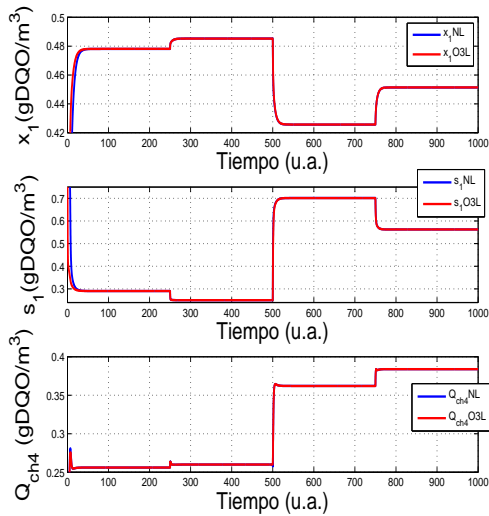


Figura 4. Estimación empleando C_3 , observador 3.

2 y 3 se presenta el mayor error en la estimación de la variable x_1 . La condición de observabilidad se satisface para todos los observadores, dado que se cumple con la condición establecida en la Ec. (8). Una vez generada la estimación se procede a comparar las salidas del sistema con las variables estimadas para generar los residuos. Las firmas obtenidas con el esquema GOS son:

TABLA II
FIRMAS DE LAS FALLAS

Residuo	x_1	s_1	Q_{ch4}
r_1	0	0	0
r_2	1	1	1
r_3	0	0	0
r_4	1	1	0
r_5	0	0	0
r_6	0	0	0
r_7	1	0	1
r_8	0	1	1
r_9	0	0	0

A continuación se presentan las gráficas de los 9 residuos generados al simular una falla del 5% en el sensor de x_1 , se omiten las gráficas de los residuos generados cuando se simula falla en s_1 y en Q_{ch4} , sin embargo también se llevo a cabo su verificación y la obtención de los residuos característicos correspondientes.

En la figura 5 se muestran 4 gráficas, las cuales representan el comportamiento tanto de la variable x_1 como de los residuos generados cuando una falla del 5% es simulada en el sensor de x_1 . La falla es introducida en el sensor al tiempo 150, en la gráfica superior se observa que el valor de x_1 cambia. Antes de ocurrir la falla la magnitud de los residuos era del orden de 10^{-3} , en cuanto la falla es introducida, los residuos correspondientes a la firma de la falla en x_1 (Tabla II) cambian de valor. Los

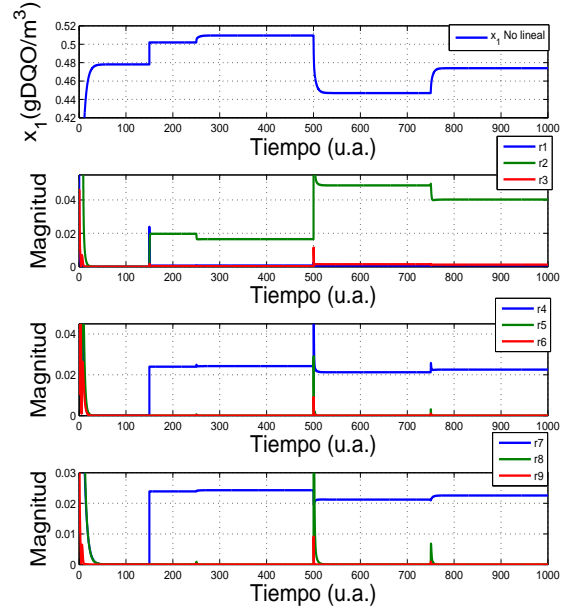


Figura 5. Residuos generados con falla del 5% en sensor de x_1

cambios que se observan en la magnitud de los residuos se deben a la variación de los parámetros variables durante la simulación, dicha variación consistió en utilizar la combinación de los valores extremos de los parámetros variables, los cuales representan los 4 vértices del polítopo.

VI. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se muestra el diseño de un observador tipo Luenberger para sistemas LPV politópicos aplicado al diagnóstico de fallas. Se emplea como ejemplo de aplicación el reactor UASB. El esquema FDI desarrollado se validó a nivel simulación.

De acuerdo con los resultados obtenidos se comprueba que a pesar de la sencillez del observador utilizado en el esquema GOS, es posible detectar fallas en los sensores del sistema. Una limitación que se observó fue la sensibilidad del esquema, ya que para los sensores de x_1 , s_1 y Q_{ch4} sólo se detectaron fallas aditivas a partir del 5%.

Es posible, que la sensibilidad del esquema mejore ajustando las ganancias de los observadores, ya que éste ajuste podría reducir el error de la estimación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo agradecen la colaboración del M.C. Albino Martínez-Sibaja por las facilidades brindadas para el conocimiento del sistema empleado como caso de estudio.

REFERENCIAS

Briat, C (2008). Tesis de doctorado, *Comande et Observation Robustes des Systèmes LPV retardés*. Grenoble INP.

- Chilali, M. y Gahinet, P (1996). *H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach*. IEEE Transactions on automatic control, Vol. 41, No. 3.
- Daafouz, J, Bara, G, Kratz, F y Ragot, J (2000). *State observer for discrete-time LPV systems: an interpolation based approach*. Proceedings of the 39th IEEE conference on decision and control, Sydney, Australia.
- Gagliardi, G, Casavola, A, De Cristofaro, F, Famularo, D y Franzè, G. (2010). *A LPV Fault detection and isolation method for a spark injection engine*. 2010 American control conference, Marriot Waterfront, Baltimore, MD, USA, June30-July 02, 2010.
- Hamdi, H, Rodrigues, M, Mechmeche, C, Theilliol, D. y Braiek, N. (2009). *State estimation for polytopic LPV descriptor systems: application to fault diagnosis*. Fault detection, supervision and safety of technical processes, Barcelona, Spain.
- Martínez, A, Astorga, C, Alvarado, A, Posada, R, Aguila, G, Rodríguez, J. y Adam, M. (2011). *Simplified interval observer scheme: a new approach for fault diagnosis in instruments*. Sensors 2011, 11, pp. 612-622.
- Patton, R. y Klinkhieo, S. (2010). *LPV fault estimation and FTC of a two-link manipulator*. 2010 American control conference, Marriot Waterfront, Baltimore, MD, USA, June30-July 02, 2010.
- Rodrigues, M, Theilliol, D y Sauter, D. (2005). *Design of a robust polytopic unknown input observer for FDI: application for systems described by multi-model representation*. 44th IEEE Conference on decision and control, and the European control conference Seville, Spain.
- Teppa, P (2008). *Control robusto de un sistema lineal de parámetros variantes (LPV): un enfoque de las desigualdades matriciales lineales (LMI)*. Revista de la facultad de ingeniería de la U.C.V., Vol. 23, No. 1, pp. 5-17.