

Control lineal estabilizante para sistemas subactuados aplicado al Pendubot

C. D. Conejo, R. Galindo, L. Carrasco

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Universidad Autónoma de Nuevo León
San Nicolás de los Garza, Nuevo León 66450, México

Resumen—Se presentan fórmulas explícitas de la parametrización de controladores estabilizantes de uno y dos parámetros para sistemas subactuados con información completa del estado. Se consideran sistemas Multi Entrada Multi Salida (MEMS), estrictamente propios, de parámetros concentrados y Lineales Invariantes en el Tiempo (LIT) con una realización estabilizable. Se asume que la planta es fuertemente estabilizable. Se proponen factorizaciones coprimas derecha e izquierda (*f.c.d.* y *f.c.i.*, respectivamente) de la función de transferencia en términos de la realización en espacio de estado, se resuelve la ecuación Diophantina, y los controladores estabilizantes se obtienen usando la parametrización de Youla. Se dan condiciones para obtener estabilidad fuerte y se fijan los parámetros libres r y q de los controladores estabilizantes, resolviendo los problemas de estabilidad y desempeño para sistemas subactuados. En el esquema de control maestro-esclavo utilizado, un número de estados igual al número de entradas es controlado “directamente”, y estas variables son utilizadas como entradas para controlar “indirectamente” al resto de los estados. Los resultados se aplican al sistema subactuado Pendubot.

Palabras clave: Controladores estabilizantes de uno y dos parámetros, parametrización de Youla, estabilidad fuerte, sistemas subactuados, Pendubot.

I. INTRODUCCIÓN

El propósito principal es dar fórmulas explícitas de la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE) de dos parámetros para sistemas subactuados con información completa del estado. Se consideran sistemas MEMS, estrictamente propios, de parámetros concentrados y LIT, con una realización estabilizable. Se asume que la planta satisface la propiedad de entrelazamiento par (*p.e.p.*), para asegurar que un controlador $K(s)$ estable existe dentro del conjunto de controladores estabilizantes, *i.e.*, que la planta dada $P(s)$ es fuertemente estabilizable. Un $K(s)$ estable es importante por razones prácticas como rompimiento de lazo, fallas o para minimizar errores numéricos.

Los sistemas subactuados son aquellos que tienen menos actuadores que grados de libertad, esto se debe al diseño o a la falla de algún componente. Algunas aplicaciones son submarinos, robots, vehículos autónomos y satélites (Blajer W., Kolodziejczyk K., 2008), (Galindo R., Lozano R., 2000), (Teel A., *et. al.*, 1997), (Rozak J., Ray A., 1997), (Jerome D., 1996) y (Spong M. W., 1995). En el esquema de control *maestro-esclavo* utilizado, un número de estados n es controlado “directamente”, y estas variables son utilizadas como entradas m para controlar “indirectamente” al

resto de los estados, gracias al acoplamiento dinámico que existe entre ellas. En este esquema, al sistema *maestro* se le asocia una dinámica directa (*d.d.*) y al sistema *esclavo* una dinámica indirecta (*d.i.*).

La PTCE da una solución al problema de síntesis de controladores LIT como lo proponen (Vidyasagar M., 1985), (Desoer C. A., *et. al.*, 1992), (Kučera V., 1979) y (Youla D. C., *et. al.*, 1976). Los controladores estabilizan a $P(s)$ y los problemas de desempeño pueden resolverse por medio de la correcta elección de r y q . Hay pocos algoritmos para obtener expresiones analíticas de la PTCE (Nett C. N., *et. al.*, 1984). En la sección V se aplican resultados algebraicos sobre $P(s)$ en términos de su realización en espacio de estado. Primero, se obtienen *f.c.d.* y *f.c.i.* de $P(s)$ sobre el conjunto de funciones racionales propias y estables \mathcal{RH}_∞ , como lo ha hecho (Desoer C. A., *et. al.*, 1992). Entonces, se resuelve la ecuación Diophantina derecha (ver el libro de (Vidyasagar M., 1985)) y finalmente se dispone de la PTCE como lo proponen (Kučera V., 1979) y (Youla D. C., *et. al.*, 1976). La solución propuesta de la PTCE para sistemas con información completa del estado de la sección V, es menos compleja con respecto a la de (Galindo R., 2009). El cambio de coordenadas usado en (Galindo R., 2009) para asegurar que la factorización pertenece a \mathcal{RH}_∞ , no se requiere para la factorización propuesta, disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional.

La estabilización fuerte y la PTCE de dos parámetros se revisa en la sección II. La clase considerada de sistemas está dada en las secciones III y IV. En la sección IV se propone una transformación del modelo de Euler-Lagrange para sistemas subactuados tal que la *d.d.* y la *d.i.* cumplan con la condición $n = 4m$, y el esquema *maestro-esclavo* para las *d.d.* y las *d.i.*. Los resultados principales se presentan en la sección V. Además, se fijan r y q de la PTCE de dos parámetros. Los resultados se aplican al sistema subactuado Pendubot en la sección VI.

Notación. \mathfrak{R} el conjunto de números reales; $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$ y $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ son las aproximaciones asintóticas de una matriz $A(s) \in \mathfrak{R}(s)$, en bajas y altas frecuencias, respectivamente; e I_p la matriz identidad de dimensión $p \times p$.

II. ANTECEDENTES

El problema de estabilización fuerte fue atacado por (Youla D. C., *et. al.*, 1974) para plantas con una entra-

da y una salida, y (Vidyasagar M., 1985) extendió estos resultados a plantas MEMS, dando la siguiente propiedad de entrelazamiento par (p.e.p.),

Teorema 1. $P(s)$ es fuertemente estabilizable si el número de polos de $P(s)$ (contados de acuerdo a su grado McMillan) entre cada par de ceros reales, incluyendo los ceros al infinito, en el semiplano derecho, es par.

El problema de estabilización fuerte es importante por razones prácticas, como rompimiento de lazo, fallas o para minimizar errores numéricos.

La configuración de control de uno y dos parámetros se muestra en las Figs. 1 y 2 (ver (Horowitz I., 1963) y (Vidyasagar M., 1985)), donde $P(s)$ representa la planta, $u(s)$ y $y(s)$ son la entrada y salida de la planta, $e(s)$ es la señal de error, y $d_i(s)$, $d_o(s)$ y $d_m(s)$ son perturbaciones externas a la entrada, a la salida y en la medición de la planta, respectivamente. Se asume en lo que sigue que la norma \mathcal{H}_2 de las perturbaciones es acotada. La entrada de la planta $u(s)$ es generada por una señales independientes, $u(s) = K_r(s)y_d(s) - K(s)y(s)$, donde $y_d(s)$ es la entrada de referencia y $\begin{bmatrix} K(s) & K_r(s) \end{bmatrix}$ es el controlador de dos parámetros.

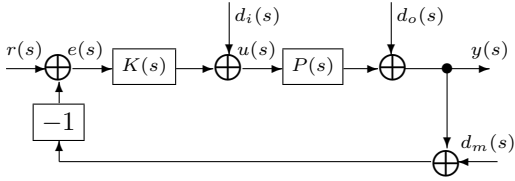


Figura 1. Sistema de lazo cerrado con controlador de un parámetro.

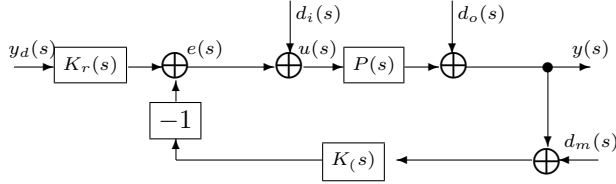


Figura 2. Sistema de lazo cerrado con controlador de dos parámetros.

La PTCE de dos parámetros como lo propone (Vidyasagar M., 1985), está dada por,

Teorema 2. Suponga que $P(s) \in \mathfrak{R}^{p \times m}(s)$, $K_r(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ y $K(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}(s)$ en la configuración retroalimentada de las Figs. 1 y 2. Sean $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$ y $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ cualesquier f.c.d. y f.c.i. de $P(s)$ con $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{D}(s)$ y $\tilde{N}(s)$ perteneciendo a \mathfrak{RH}_∞ . Entonces, el conjunto de todos los controladores que estabilizan $P(s)$ está dado por,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} &= \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \\ \tilde{D}_k(s) &:= Y(s) - R(s)\tilde{N}(s) \\ \tilde{N}_k(s) &:= X(s) + R(s)\tilde{D}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $R(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Q(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son parámetros libres satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$, y $X(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $Y(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ son la solución de la Ec. Diophantina,

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = I_m \quad (2)$$

En la Fig. 1 $K(s)$ se garantiza estabilidad y desempeño, mientras que en la Fig. 2, $K_r(s)$ es usado para mejorar la regulación o el seguimiento y $K(s)$ garantiza estabilidad interna en la Fig. 2. Si $K_r(s)$ es inestable, su salida crece sin límite, una alternativa es implementar $\tilde{D}_k(s)$ dentro del lazo de la Fig. 2 (ver (Vidyasagar M., 1985)).

En la sección V se presenta una solución analítica de la PTCE para sistemas con información completa del estado, aplicable a la clase de sistemas dada en la siguiente sección.

III. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

Considere una realización causal, mínima y LIT (F, G, H) de $P(s)$. Más aún, dado que todas las entradas de $u(t)$ son linealmente independientes, sin pérdida de generalidad, un cambio de base puede seleccionarse, obteniendo la realización $(A, \begin{bmatrix} 0 & B_m^T \end{bmatrix}^T, C)$ en nuevas coordenadas, donde $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ es una matriz no singular. Además, se asume que el estado es medible o se puede estimar, que $n = 4m$ y que se particiona $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ de acuerdo a la partición a bloques de $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, donde $A_{11} = 0$ y A_{12} es una matriz no singular, ésto es,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_{2m} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, \quad C = I_n \quad (3)$$

donde $A_{12} = I_{2m}$ es modificado a diferencia de como se muestra por (Galindo R., 2009). En (Galindo R., 2009) $n = 2m$, por lo que se requiere una representación en variables de estado conveniente para la formulación E-L con información completa del estado y subactuada. Para esta clase de sistemas dinámicos no lineales se obtiene una realización linealizada (3) satisfaciendo $n = 4m$. La formulación E-L para sistemas subactuados es,

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= \\ M^{-1}(q(t)) &\left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - C(q(t), \dot{q}(t))\dot{q}(t) - G(q(t)) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $M(q(t)) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ denota la inercia, $C(q(t), \dot{q}(t)) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}$ la matriz de Coriolis-centrípeta, $G(q(t)) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2}}$ la fuerza de gravedad, $\tau(t) \in \mathfrak{R}^m$ la fuerza generalizada, siendo $m \leq \frac{n}{2}$ y $q(t) \in \mathfrak{R}^{\frac{n}{2}}$ son las coordenadas generalizadas de posición.

La formulación para sistemas subactuados (3) no cumple con $n = 2m$, por esto, se propone en la siguiente sección una transformación para (4) y así obtener la estructura de la realización en espacio de estados para las d.d. y para las d.i. con la estructura siguiente,

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ A_{21d} & A_{22d} \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{md} \end{bmatrix}, \quad C_d = I_{2m} \\ A_i &= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ A_{21i} & A_{22i} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{mi} \end{bmatrix}, \quad C_i = I_{2m} \end{aligned} \quad (5)$$

lo cual se requiere para las factorizaciones propuestas y para los resultados principales presentados en seguida.

IV. MODELO E-L PARA SISTEMAS SUBACTUADOS

Se transforma el modelo (4), ya que se necesita la representación en variables de estado de la forma (5). Para esto, se propone una matriz de transformación, que desacople la entrada al elemento de *d.i.* (q_2). De acuerdo a $n = 4m$, la submatriz de la transformación multiplica a la ecuación de q_2 , y deja como entrada de control la salida de q_1 , para después poder separar al sistema en uno con *d.d.* (q_1) que controle a la *d.i.*

A continuación, se particiona $M^{-1}(q(t))$ acorde a las dimensiones de $\tau(t)$,

$$M^{-1}(q(t)) := \begin{bmatrix} M_{11}(q(t)) & M_{12}(q(t)) \\ M_{21}(q(t)) & M_{22}(q(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q(t))\tau(t) \\ M_{21}(q(t))\tau(t) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Como $\tau(t)$ se presenta para las *d.i.*, se propone T tal que $M_{21}(q(t))\tau(t) = 0$, linealizando primero $M^{-1}(q(t))$ alrededor del punto de equilibrio q_e , solamente para obtener una matriz de transformación constante para el cambio de coordenadas $q(t) = T^{-1}\bar{q}(t)$ que se aplica a (4), quedando representados en la forma (5) la *d.d.* y la *d.i.*,

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_{21}(q_e)M_{11}^{-1}(q_e) & I \end{bmatrix}, \quad (7)$$

así,

$$TM^{-1}(q_e) \begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q_e)\tau(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

El modelo (4) transformado es,

$$\ddot{\bar{q}}(t) = TM^{-1}(T^{-1}\ddot{q}(t)) \left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - C(T^{-1}\bar{q}(t), T^{-1}\dot{\bar{q}}(t))T^{-1}\dot{\bar{q}}(t) - G(T^{-1}\bar{q}(t)) \right) \quad (9)$$

$$\ddot{\bar{q}}(t) = \hat{M}(q(t)) \left(\begin{bmatrix} \tau(t) \\ 0 \end{bmatrix} - \hat{C}(q(t), \dot{q}(t))\dot{\bar{q}}(t) - \hat{G}(q(t)) \right), \quad (10)$$

donde $\hat{M}(q(t)) = TM^{-1}(q(t))$, $\hat{C}(q(t), \dot{q}(t)) = C(q(t), \dot{q}(t))T^{-1}$ y $\hat{G}(q(t)) = G(q(t))$. La transformación (7) es invertible, por lo tanto $q(t) = T^{-1}\bar{q}(t)$ y $\bar{q}(t) = Tq(t)$, que es utilizado para obtener (10). Lo que se logra se observa en la sección VI en la cual, después de linealizar en los puntos de equilibrio ($q_e = cte.$ y $\dot{q}_e = 0$) y cancelar el acoplamiento dinámico por retroalimentación en las *d.d.*, donde las variables de estado de la *d.d.* y de la *d.i.* se definen por,

$$\begin{bmatrix} x_{1d}(t) \\ x_{2d}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_d(t) \\ \dot{\bar{q}}_d(t) \end{bmatrix}, \text{ y } \begin{bmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_i(t) \\ \dot{\bar{q}}_i(t) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Obteniendo las representaciones en variables de estado, que tienen la forma (5). Por lo tanto, la transformación propuesta (7), lleva a la representación del sistema en la

forma (5). La Función Complementaria (FC) de uno y dos parámetros de las Figs. 1 y 2 en (Vidyasagar M., 1985) es,

$$T_o(s) = N(s)\tilde{N}_k(s), T_o(s) = N(s)Q(s). \quad (12)$$

Se muestra el esquema maestro-esclavo en la Fig. 3, donde $T_o(s)$ representa la FC de dos parámetros (12) del esquema de la *d.d.* en la Fig. 2,

$$P_n(s) := P_i(s)T_o(s). \quad (13)$$

y $P_i(s)$ es la función de transferencia de la representación en variables de estado de la *d.i.* (11). En la siguiente sección

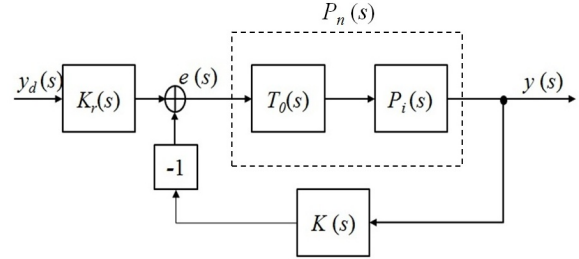


Figura 3. Esquema maestro-esclavo de dos parámetros.

se obtienen las formulaciones de la PTCE para el esquema *maestro-esclavo* de la Fig. 3.

V. CONTROLADORES ESTABILIZANTES

F.c.i. y f.c.d. de la planta y una solución analítica de la ecuación Diophantina se presentan en,

Lema 1. *Considere la realización en espacio de estado dada por la Ec. (5) satisfaciendo $n = 4m$. Entonces, f.c.i. y f.c.d. propuestas, de la función de transferencia $(sI_n - A)^{-1}B$ sobre \mathcal{RH}_∞ son,*

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ sB_m \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1}\Gamma(s) \quad (15)$$

respectivamente, donde $0 < a \in \mathcal{R}$, $B_m \in \mathcal{R}^{m \times m}$ y I_m son matrices no singulares y,

$$\Gamma(s) := \frac{1}{(s+a)^2} (s^2I_m - sA_{22} - A_{21}) \quad (16)$$

Además, una solución analítica de la Ec. Diophantina (2) para la f.c.d. de la Ec. (15) sobre \mathcal{RH}_∞ es,

$$X(s) = [a^2I_m^{-1} + I_m \quad M] \text{ y } Y(s) = B_m \quad (17)$$

donde $M := 2aI_m + A_{22}$.

Prueba. Multiplicando $(sI_n - A)^{-1}$ por B y usando (ver (Zhou K., et. al., 1996)),

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & -N_{11}^{-1}N_{12}\Phi^{-1} \\ * & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde * denota cualquier valor finito, y N_{11} y $\Phi := N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12}$ son matrices no singulares. Entonces,

$$(sI_n - A)^{-1} B = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} \Gamma^{-1}(s)B_m \\ s\Gamma^{-1}(s)B_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

Considere la transformación bilineal usada en (Doyle J. C., *et. al.*, 1992) y (Zhou K., *et. al.*, 1996), $s = (1/\lambda) - a$, que simplifica las factorizaciones de $P(s)$ y la solución de la Ec. Diophantina en el anillo de polinomios en λ , además, la solución en s pertenece a \mathfrak{RH}_∞ . Así,

$$(sI_n - A)^{-1} B \Big|_{s=\frac{1}{\lambda}-a} = \begin{bmatrix} \lambda^2 \Gamma^{-1} B_m \\ \lambda(1-a\lambda) \Gamma^{-1}(\lambda) B_m \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde $\Gamma(\lambda) := \lambda^2 (a^2 I_m + aA_{22} - A_{21}) - \lambda M + I_m$. Por lo tanto, f.c.i. y f.c.d. de la Ec. (20) son,

$$\tilde{D}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(s) & 0 \\ 0 & \Gamma(s) \end{bmatrix}, \tilde{N}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} B_m \\ sB_m \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$N(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix}, D(s) = B_m^{-1} \Gamma(s) \quad (22)$$

respectivamente. Así, una solución analítica de $X(\lambda)N(\lambda) + Y(\lambda)D(\lambda) = I_m$ para la Ec. (22) es,

$$X(s) = [a^2 I_m^{-1} + I_m \quad M] \text{ y } Y(s) = B_m \quad (23)$$

Dado que $\tilde{D}(\lambda)$, $\tilde{N}(\lambda)$, $N(\lambda)$ y $D(\lambda)$ son polinomios en λ , entonces $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $N(s)$ y $D(s)$ pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ . Aplicando $\lambda = 1/(s+a)$ a las Ec. (21) a (23), se siguen los resultados de las Ec. (14), Ec. (15) y Ec. (17). ■

Los resultados del Lema 1 son menos complejos con respecto a los de (Galindo R., 2009). En la prueba del Lema 1 se invierte la planta $P(s)$ antes de aplicar la transformación bilineal $s = (1/\lambda) - a$. Así, las f.c.d. y f.c.i. pertenecen a \mathfrak{RH}_∞ y no se necesita el cambio de coordenadas usado en (Galindo R., 2009), disminuyendo los parámetros de control y el esfuerzo computacional para las factorizaciones del Lema 1. Si A_{11} en la matriz de estado A no es cero, entonces Φ en (18) tendrá un término $sI_m - A_{11}$ que impide obtener la f.c.i. de $P(s)$. Basándose en el Lema 1 la PTCE de dos parámetros está dada por, **Teorema 3.** *Considere la realización en espacio de estado dada por la Eq. (5) en la configuración retroalimentada de la Fig. 2, satisfaciendo $n = 4m$. Entonces, la PTCE de dos parámetros que estabilizan la Ec. (3) es,*

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} = \tilde{D}_k^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_k(s) \end{bmatrix} \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k(s) &= \left(I_m - \frac{1}{(s+a)^2} (R_1(s) + sR_2(s)) \right) B_m \\ \tilde{N}_k(s) &= \\ \begin{bmatrix} a^2 I_m^{-1} + A_{21} + R_1(s)\Gamma(s) & M + R_2(s)\Gamma(s) \end{bmatrix} \\ Q(s) &= \begin{bmatrix} Q_1(s) & Q_2(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

siendo $R_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ satisfaciendo $\det(\tilde{D}_k(s)) \neq 0$ y $Q_i(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$, $i = 1, 2$, parámetros libres, $B_m \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ no singular, $0 < a \in \mathfrak{R}$ $\Gamma(s) := (1/(s+a)^2) (s^2 I_m - sA_{22} - A_{21})$, $i = 1, 2$, y $M := 2aI_m + A_{22}$. Más aún, suponga que $(sI_n - A)^{-1} B$ satisface la p.e.p. y,

$$\det(s^2 I_m + s(2aI_m - R_2(s)) + a^2 I_m - R_1(s)) \quad (26)$$

es un polinomio Hurwitz, entonces la Ec. (24) es estable, i.e., el controlador $\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix}$ pertenece a \mathfrak{RH}_∞ .

Prueba. Sea $R(s) := \begin{bmatrix} R_1(s) & R_2(s) \end{bmatrix} \in \mathfrak{RH}_\infty$. El resultado de las Ec. (24) se sigue directamente de la Ec. (1) reemplazando la Ec. (14), Ec. (15) y Ec. (17)

Dado que $(sI_n - A)^{-1} B$ satisface la p.e.p. entonces, existe un controlador estable $\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix}$ dentro de la familia de controladores estabilizantes. Si $\det(\tilde{D}_k(s))$ es un polinomio Hurwitz entonces $K(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ y $K_r(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$. Dado que $s = -a$ es un polo estable y B_m es una matriz no singular, $K(s)$ y $K_r(s)$ son estables si (26) es un polinomio Hurwitz. ■

La estabilidad del controlador de dos parámetros depende de a y $R_i(s)$, $i = 1, 2$. En particular si $R_i(s)$, $i = 1, 2$ son $r_i I_m$ donde $r_i \in \mathfrak{R}$, $i = 1, 2$, entonces, (26) es un polinomio Hurwitz si,

$$r_1 < a^2 \text{ y } r_2 < 2a \quad (27)$$

Dado que $\tilde{N}(s)$ es una matriz larga de dimensión $n \times m$, entonces, $\tilde{N}(s)$ no tiene una inversa a la derecha y por lo tanto la Ec. Diophantina izquierda $\tilde{N}(\lambda) \tilde{X}(\lambda) + \tilde{D}(\lambda) \tilde{Y}(\lambda) = I$ no tiene una solución.

A partir de la FC de un parámetro (12) (Vidyasagar M., 1985) para la d.d., de (25) en el esquema de la Fig. 1, se tiene que,

$$T_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) + R_1(s)\tilde{D}(s) \end{bmatrix} \quad (28)$$

donde (28) es una matriz con entradas y salidas de posición y su derivada (velocidad), y sólo se requiere la información de posición que brinda el elemento $T_{o(1,1)}(s)$ de (28), ya que la derivada de la referencia (velocidad) es cero; de (28) se tiene

$$T_{o(1,1)}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} (a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma_d(s)). \quad (29)$$

Del esquema *maestro-esclavo* de un parámetro de la Fig. 3, se tienen la f.c.i. y la f.c.d. de $P_n(s)$ de los resultados del Lema 1, sean $\tilde{N}_i(s)$, $\tilde{D}_i(s)$ $\Gamma_i(s)$ de la d.i. y $\Gamma_d(s)$ de la d.d.,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_e(s) &= \tilde{D}_i(s), \\ \tilde{N}_e(s) &= \tilde{N}_i(s) (a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma_d(s)) \\ N_e(s) &= \frac{1}{(s+a)^4} \begin{bmatrix} I_m \\ sI_m \end{bmatrix}, \\ D_e(s) &= (a^2 I_m + A_{21} + R_1(s)\Gamma_d(s))^{-1} B_{mi}^{-1} \Gamma_i(s). \end{aligned} \quad (30)$$

Así, de (30), se obtiene la solución de la Ec. Diophantina para la Fig. 3, donde los subsistemas de *d.d.* y de *d.i.* son de la forma (5) y sus elementos se consideran escalares, de manera que,

$$\begin{aligned} X_e(s) &= [x_0 \quad x_1] \\ Y_e(s) &= \left(I_m + \frac{y_1}{(s+a)} + \frac{y_2}{(s+a)^2} \right) B_{mi} \left(a^2 I_m + A_{21} + R_1 \Gamma_d(s) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

donde

$$\begin{aligned} x_0 &= 6a^2 A_{21} + 4a A_{21} A_{22} + A_{21}^2 + A_{21} A_{22}^2 + a^4 I_m \\ x_1 &= 6a^2 A_{22} + 4a A_{22}^2 + 4A_{21} a + A_{22}^3 + 2A_{21} A_{22} + 4a^3 I_m \\ y_1 &= A_{22} + 2a I_m \\ y_2 &= 3a A_{22} + A_{22}^2 + A_{21} + 3a^2 I_m \end{aligned} \quad (32)$$

siendo $\Gamma_d(s)$ y $\Gamma_i(s)$ los complementos de Shur de (12) de la *d.d.* y de la *d.i.*, respectivamente, y así aplicar (30) y (31), en (25) y (24) para obtener los controladores estabilizantes de un parámetro de la Fig. 1.

De los controladores de (24) (Vidyasagar M., 1985) de la *d.i.* de (25) del esquema de la Fig. 3, se tiene que

$$T_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \begin{bmatrix} I_m \\ s I_m \end{bmatrix} [Q_1(s) \quad Q_2(s)] \quad (33)$$

donde (33) es una matriz con entradas y salidas de posición y su derivada (velocidad), y sólo se requiere la información de posición que brinda el elemento $T_{o(1,1)}(s)$ de (12), ya que la derivada de la referencia (velocidad) es cero; de (33) se tiene,

$$T_{o(1,1)}(s) = \frac{1}{(s+a)^2} Q_1(s) \quad (34)$$

Del esquema maestro-esclavo de dos parámetros de la Fig. 3, se tienen la f.c.i. y la f.c.d. de $P_n(s)$ de los resultados del Lema 1, sean $\tilde{N}_i(s)$, $\tilde{D}_i(s)$ $D_i(s)$ de la *d.i.* y $\Gamma_d(s)$ de la *d.d.*,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_e(s) &= \tilde{D}_i(s), \quad \tilde{N}_e(s) = \tilde{N}_i(s) Q_1(s) \frac{1}{(s+a)^2} \\ N_e(s) &= \frac{1}{(s+a)^4} \begin{bmatrix} I_m \\ s I_m \end{bmatrix}, \quad D_e(s) = Q_1^{-1}(s) D_i(s) \end{aligned} \quad (35)$$

Así, de (35), se obtiene la solución de la Ec. Diophantina para la Fig. 3, donde los sistemas de *d.d.* y de *d.i.* de la forma (5) sus elementos se consideran escalares, de manera que

$$\begin{aligned} X_e(s) &= [x_0 \quad x_1] \\ Y_e(s) &= \left(I_m + y_1 \frac{1}{(s+a)} + y_2 \frac{1}{(s+a)^2} \right) B_{mi} Q_1(s) \end{aligned} \quad (36)$$

donde los elementos son iguales a (32), y así aplicar (35) y (36), en (25) y (24) para obtener los controladores estabilizantes de dos parámetros de la Fig. 3.

VI. EJEMPLO (PENDUBOT)

Se abordará al ejemplo del sistema electromecánico subactuado denominado Pendubot, ya que este sistema cuenta con el acoplamiento entre dos eslabones; el primer eslabón

está conectado al actuador y el segundo eslabón depende de la posición y movimiento del anterior. Se desea llevar ambos eslabones a Top Position ($q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) desde Bottom Position ($q_1 = -\frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$) en la Fig. 4. A continuación, se muestra el diagrama utilizado del sistema Pendubot (Jerome D., 1996).

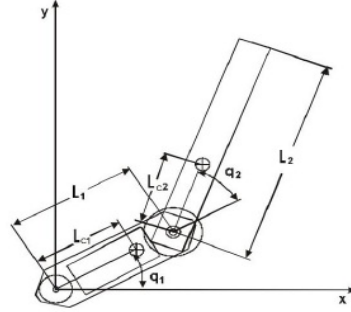


Figura 4. Pendubot.

Se presenta la ecuación dinámica de la forma E-L dada por la ecuación (4)

$$\begin{aligned} M(q(t)) &= \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2(t) & \theta_2 \end{bmatrix} \\ C(q(t), \dot{q}(t)) &= \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_2(t) \\ \theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_1(t) \\ -\theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_2(t) - \theta_3 \sin(q_2(t)) \dot{q}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G(q(t)) &= \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1(t) + \theta_5 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) \\ \theta_5 g \cos(q_1(t) + q_2(t)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

siendo, $q(t) = [q_1(t) \quad q_2(t)]^T$, $\theta_1 := m_1 L_{c1}^2 + m_2 L_1^2 + I_1$; $\theta_2 := m_2 L_{c2}^2 + I_2$; $\theta_3 := m_2 L_1 L_{c2}$; $\theta_4 := m_1 L_{c1} + m_2 L_1$; $\theta_5 := m_2 L_{c2}$; m_i es la masa del eslabón i ; L_i es la longitud total del eslabón i ; L_{ci} es la distancia al centro de masa del eslabón i ; I_i es el momento de inercia del eslabón i , alrededor de este centroide y g la aceleración de la gravedad. Los valores de estos parámetros son: $\theta_1 = 0.0761$, $\theta_2 = 0.0662$, $\theta_3 = 0.0316$, $\theta_4 = 0.9790$ y $\theta_5 = 0.3830$.

Se procede a linealizar por aproximación de Taylor el sistema transformado dado por la Ec. (10) en los puntos de equilibrio $q_1 = \frac{\pi}{2}$ y $q_2 = 0$, y se obtiene

$$\ddot{\bar{q}}_1(t) = \frac{-g(\theta_3 \theta_5 - \theta_2 \theta_4)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_1(t) - \frac{g(\theta_3 \theta_5)}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_2(t) + \frac{\theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2} \tau_1(t) \quad (38)$$

$$\ddot{\bar{q}}_2(t) = \beta (\bar{q}_1(t) + \bar{q}_2(t)). \quad (39)$$

donde $\beta = \frac{-g(\theta_3^2 \theta_5 - \theta_1 \theta_2 \theta_5)}{\theta_2 (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2)}$. Entonces la representación en variables de estado del sistema con *d.d.* se desarrolla como sigue: se propone $\tau_1(t)$ tal que se cancela la dinámica de \bar{q}_2

$$\tau_1(t) = \frac{(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2) \ddot{\bar{q}}_1(t)}{\theta_2} + \frac{g(\theta_3 \theta_5)}{\theta_2} \bar{q}_2(t). \quad (40)$$

Así, sustituyendo (40) en (38), se tiene que

$$\ddot{\bar{q}}_1(t) = \frac{-g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} \bar{q}_1(t) + \tilde{\tau}_1(t). \quad (41)$$

Definiendo la representación en variables de estado (11) de (41) es

$$\dot{x}_{1d}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g(\theta_3\theta_5 - \theta_2\theta_4)}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2} & 0 \end{bmatrix} x_{1d}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{\tau}_1(t). \quad (42)$$

Ahora, definiendo la representación en variables de estado (11) de la *d.i.*, para la cual su entrada ahora es la posición q_1 del primer eslabón, de (39)

$$\dot{x}_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} x_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} x_{1d}(t) \quad (43)$$

donde (42) y (43), tienen la forma (5) y cumplen con la condición $n = 4m$.

Se obtienen las *f.c.i.* (14), *f.c.d.* (15) y la solución de la Ec. Diophantina (17), así como también, se fijan los parámetros de la *d.d.* $r_d = -6.4877 \times 10^3$ y $q_d = 864.8649$, y del esquema *maestro-esclavo* $r_e = 1.0847 \times 10^7$ y $q_e = 1.9674 \times 10^8$ para el controlador de dos parámetros (24). Lo anterior se aplica para la *d.d.* (42) y la *d.i.* (43), con $a = 80$ y $\omega_h = 1000$, debido a la velocidad de respuesta admisible del sistema.

Se muestran las siguientes gráficas con los resultados obtenidos en Matlab, aplicando los controladores lineales de dos parámetros en el modelo del Pendubot linealizado desde condiciones iniciales de Bottom Position a la referencia deseada de Top Position.

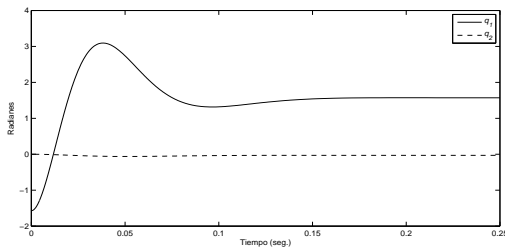


Figura 5. Gráfica de posiciones de q_1 y q_2 del Pendubot.

En la Fig. 5, se visualizan oscilaciones en el transitorio y en estado estacionario se tiene que $q_1 = 1.5702 \text{ rad}$ y $q_2 = -0.0303 \text{ rad}$.

VII. CONCLUSIONES

Se consideran sistemas MEMS, de parámetros concentrados, LIT y fuertemente estabilizables con una realización estabilizable. En particular, se consideran sistemas subactuados Euler-Lagrange. Los estados están dados por las coordenadas generalizadas de posición y de velocidad. Esta clase de sistemas se requiere transformar, tal que se cumpla la condición $n = 4m$ y una estructura de la representación en variables de estado del sistema linealizado. El enfoque

utilizado es aplicar resultados algebraicos sobre una planta en términos de su realización en espacio de estados. Se presentan la *f.c.d.* y la *f.c.i.* que pertenecen a \mathcal{RH}_∞ . Además, se proponen una solución de la ecuación Diophantina para sistemas con información completa del estado, y expresiones analíticas para la PTCE de dos parámetros y para el esquema *maestro-esclavo*. En este esquema, el maestro está asociado a dinámicas que se controlan directamente, y estas variables se utilizan para controlar las dinámicas indirectas asociadas al esclavo. Se dan condiciones para obtener un controlador estable. Los resultados muestran que se logra desempeño estabilizando al sistema. Alternativamente se puede utilizar un controlador no-lineal inicialmente y conmutar al control lineal propuesto cerca de Top Position, mejorando el desempeño.

REFERENCIAS

- Jerome D., (1996), *Mechanical design and control of the Pendubot*, Tesis de maestría de la Universidad de Illinois.
- Desoer C. A., et. al., (1992), *Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis*, TAC pp. 399-412.
- Doyle J. C., et. al., (1992), *Feedback Control Theory*, McMillan.
- Galindo R., (2009), *Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity*, Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering vol. 223 (17) pp. 957-971.
- Galindo R., (2008), *Tuning of a Non-conventional Mixed Sensitivity \mathcal{H}_∞ control*, Emerging Technologies, Robotics and Control Systems second ed. InternationalSAR and also in Int. J. of Factory Automation, Robotics and Soft Computing pp. 141-149 and pp. 15-23.
- Horowitz I., (1963), *Synthesis of Feedback Systems*, Academic Press.
- Kučera V., (1979), *Discrete linear control, The polynomial equation approach*, Wiley, Chichester.
- Nett C. N., et. al., (1984), *A connection between state-space and doubly coprime fractional representations*, TAC, vol. 29, no. 9, pp. 831-832.
- Spong M. W., (1995), *The Swing Up Control Problem For The Acrobot*, IEEE Control Systems, pp. 49-55.
- Vidyasagar M., (1985), *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, Massachusetts: The MIT Press Cambridge.
- Youla D. C., et. al., (1974), *Single-loop feedback stabilization of linear multivariable dynamical plants*, Automatica, pp. 159-173.
- Youla D. C., et. al., (1976), *Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case*, TAC, pp. 319-338.
- Zhou K., et. al., (1996), *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall.
- Galindo R., Lozano R., (2000), *Control of Under Actuated Systems. Application to a Tandem Fan in a 3-d.o.f.-Platform*, Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications pp. 686-691.
- Blajer W., Kolodziejczyk K., (2008), *Modeling of underactuated mechanical systems in partly specified motion*, Journal of Theoretical and applied mechanics pp. 383-394.
- Rozak J., Ray A., (1997), *Robust Multivariable Control of Rotorcraft in Forward Flight*, Journal of the American Helicopter Society pp. 149-160.
- Teel A., et. al., (1997), *Uniting Local and Global Controllers for the Caltech Ducted Fan*, American Control Conference.