

Estabilización de sistemas de primer orden inestables con retardo utilizando un controlador PD.

E. Olvera, J.F. Márquez, B. del Muro, J.C. Sánchez, y G.I. Duchén
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.
Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional
Santa Ana 1000 México DF 04430, México
eleozal@hotmail.com; jfcomr23@yahoo.com.mx
bdelmuro@yahoo.com; jcsanchezgarcia@gmail.com
gduchen@ipn.mx
Teléfono: (52)-55-56562058

Resumen—Este trabajo considera el problema de estabilización de sistemas lineales de primer orden con retardo. Para resolver este problema primero presentamos las condiciones necesarias y suficientes que aseguran la estabilidad del sistema a lazo cerrado con el uso de un controlador Proporcional-Derivativo, posteriormente se propone un método de sintonización del controlador.

Palabras clave: Sistemas lineales, Controladores PD, Sistemas con retardo.

I. INTRODUCCIÓN

La interconexión entre dos o más sistemas físicos está siempre acompañado de fenómenos de transferencia como son transporte y propagación. Matemáticamente hablando, los fenómenos de transporte y propagación pueden ser representados por elementos de retardo (material, energía, información) (Niculescu, 2007).

Desde la perspectiva de control, los retardos son un caso desafiante que debe ser superado diseñando estrategias de control que propicien un comportamiento aceptable del sistema en lazo cerrado y por supuesto estable. Se han desarrollado diversas estrategias de control para tratar a los retardos. El enfoque más simple consiste en ignorar el término de retardo. Es claro que esto solo es funcional en el caso de procesos que cuentan con un retardo pequeño.

Cuando se considera el caso en tiempo continuo el operador puede ser aproximado utilizando series de expansión de Taylor o Padé. De ésta forma el sistema puede ser analizado como un sistema de fase no mínima con una función de transferencia racional en la variable compleja s (Marshall, 1979).

Otra clase de estrategia de compensación consiste en contrarrestar los efectos del tiempo de retardo a través de estrategias que intentan predecir los efectos de la entrada actual para una salida futura. La estrategia conocida como Predictor de Smith (SPC) (Smith, 1957) (Palmor, 1996) es la estrategia de predicción más utilizada, por medio de un

tipo de esquema observador a lazo abierto. La principal limitación del SPC original consiste en que el esquema de predicción no contiene un paso de estabilización, lo que lo restringe a aplicaciones de plantas a lazo abierto estables. Para resolver sistemas de primer orden inestables se han presentado distintas modificaciones de la estructura original del (SPC), ver por ejemplo (Torricco and Normey-Rico, 2004), (Márquez, Muro, Velasco and Alvarez, 2010) y las referencias ahí incluidas.

Una motivación para trabajar con sistemas de bajo orden con retardo esta basada en el hecho, que en algunos casos sistemas de alto orden pueden ser aproximados por sistemas de primer o segundo orden con tiempo de retardo, como un primer paso hacia la estabilización de plantas de mayor orden inestables con retardo (Skogestad., 2004) y (Seshagiri R.A., 2007). El caso de plantas inestables de primer orden con retardo también ha sido analizado por (Guillermo J. Silva and Bhattacharyya, 2002) y (Guillermo J. Silva, 2004), utilizando un controlador Proporcional Integral Derivativo (PID), usando una versión del teorema de Hermite-Biehler aplicable a cuasipolinomios, presentando el conjunto completo de parámetros del controlador PID. En dicho trabajo se dan los detalles sobre la sintonización del controlador PID que asegura la estabilidad del sistema en lazo cerrado cuando el retardo τ es estrictamente inferior a dos veces la constante de tiempo $1/a$ (inestable) del sistema en lazo abierto, i.e., $\tau < 2/a$. Cabe mencionar que en el trabajo referido no se contempla el caso con constante integral nula, es decir, no se muestra como sintonizar un controlador PD.

Con una perspectiva diferente (Ya-Gang Wang, 2010) propone un controlador Proporcional Integral (PI) adaptivo para procesos con tiempo de retardo largo, con especificaciones sensitivas, en base a sistemas de entrada-salida en operación normal, la respuesta en frecuencia importante es estimada con descomposición de señales y análisis de

Laplace.

Este trabajo se enfoca en el problema de estabilización y control de sistemas de primer orden inestables con retardo en el lazo directo. Se dan condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilización del sistema en lazo cerrado, encontrando de nuevo que el límite es $\tau < 2/a$, pero ahora usando un controlador proporcional-derivativo PD. Así mismo, se propone un método simple de sintonización de los parámetros k_p y k_d . La principal motivación para abordar este problema surge al constatar que para sistemas con un retardo τ considerable, cercanos al límite $2/a$, al usar el controlador PID propuesto en (Guillermo J. Silva and Bhattacharyya, 2002), el termino integral es muy pequeño pero diferente de cero, lo que induce a que el desempeño del sistema sea muy pobre. Por el contrario, al usar un controlador PD el desempeño mejora considerablemente.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: En la Sección 2 se presenta la clase de sistemas a considerar. En la Sección 3 se hace un breve resumen sobre los resultados propuestos por (Guillermo J. Silva and Bhattacharyya, 2002) cuando se trata de la estabilización de sistemas usando un controlador PID. La Sección 4 presenta el resultado principal de esta trabajo: la estabilización de un sistema de primer orden con tiempo de retardo en el lazo directo usando un controlador Proporcional Derivativo (PD), la respuesta del sistema con el control PD se evalúa en la Sección 5 mediante ejemplos en simulación numérica. Finalmente en la Sección 6: Se presentan algunas conclusiones.

II. CLASE DE SISTEMAS

Consideremos la clase de sistemas lineales de una entrada una salida (SISO) con tiempo de retardo en el lazo directo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s} \quad (1)$$

$U(s)$ y $Y(s)$ son la señal de entrada y salida respectivamente, τ es el tiempo de retardo y $N(s)$ y $D(s)$ son los polinomios en la variable compleja s . Donde:

$$G(s) = \frac{b}{s - a} \quad (2)$$

Es la función de transferencia libre de retardo, con $a > 0$. Note que $\tau_{un} = 1/a$, puede ser vista como la constante de tiempo inestable del proceso. Observé que con respecto a esta clase de sistemas dados por la ecuación (1) una estrategia de control tradicional basada en una retroalimentación de la salida de la forma:

$$U(s) = H(s)[R(s) - Y(s)] \quad (3)$$

Produce un sistema a lazo cerrado de la forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + H(s)G(s)e^{-\tau s}} \quad (4)$$

Donde el término $H(s)$ representa el controlador PD, mientras el término $e^{-\tau s}$ localizado en el denominador de la

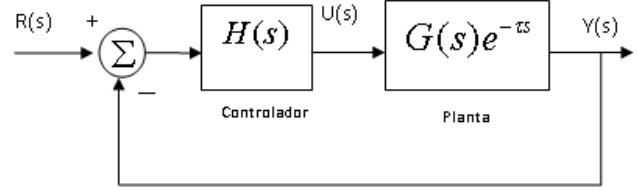


Figura 1. Sistema a lazo cerrado

función de transferencia (4) dificulta el análisis de estos sistemas debido al número infinito de polos del sistema a lazo cerrado. La función de transferencia de lazo cerrado del sistema mostrado en la Figura (1), es de la forma:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} e^{-\tau s} \quad (5)$$

En este trabajo consideraremos la noción clásica de estabilidad relacionada con la función de transferencia i.e., la estabilidad del sistema depende de la posición de los polos en el semiplano izquierdo del plano complejo para el caso continuo y dentro del círculo unitario para el caso discreto.

III. RESULTADOS EXISTENTES

El problema de estabilización de sistemas con tiempo de retardo en el lazo directo fue abordado por (Guillermo J. Silva and Bhattacharyya, 2002), el cual basados en una versión del teorema de Hermite-Biehler aplicable a cuasipolinomios presentan la sintonización de un control Proporcional Integral y Derivativo. En esta sección se hace un breve resumen de la metodología detallada en (Guillermo J. Silva, 2004).

Considerando la clase de sistemas de la forma descrita por la ecuación (1) donde conservando la nomenclatura usada por (Guillermo J. Silva and Bhattacharyya, 2002) tenemos:

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-Ls} \quad (6)$$

Donde: $k = Tb$, $L = \tau$ y $T = \frac{1}{a}$. Considerando el sistema de control retroalimentado mostrado en la Figura (1).

En este caso $H(s)$ representa el controlador del tipo Proporcional Integral Derivativo que representaremos de la siguiente forma:

$$H(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Donde k_p es la ganancia proporcional, k_i es la ganancia integral y k_d es la ganancia derivativa, las cuales se determinaron en (Guillermo J. Silva, 2004), como primer paso, analizaron el sistema sin tiempo de retardo, obteniendo la ecuación característica a lazo cerrado de la forma:

$$\delta(s) = (T + k k_d) s^2 + (1 + k k_p) s + k k_i$$

Debido a que es un polinomio de segundo orden, la estabilidad a lazo cerrado es equivalente a que todos los

coeficientes tengan el mismo signo. Asumiendo que la ganancia constante de la planta es positiva se tiene:

$$k_p > -\frac{1}{k}, k_i > 0 \quad y \quad k_d > -\frac{T}{k} \quad (7)$$

$$o$$

$$k_p > -\frac{1}{k}, k_i < 0 \quad y \quad k_d < -\frac{T}{k} \quad (8)$$

Un requerimiento en el diseño del control es que el sistema libre de retardo en lazo cerrado se estable. Por consecuencia a partir de esta condición se asume que las ganancias del control PID usadas para estabilizar la planta con retardo siempre deben cumplir las condiciones (7) o (8). Después se considera la planta con retardo distinto de cero, la ecuación característica queda de la siguiente forma:

$$\delta(s) = (kk_i + kk_p s + kk_d s^2)e^{-Ls} + (1 + Ts)s.$$

Para el caso de análisis en este artículo tenemos: $T > 0$, $k > 0$ y $L > 0$, la condición necesaria y suficiente para la existencia del controlador PID estabilizante es $|\frac{T}{L}| > 0,5$, si esta condición se satisface, existe rango de ganancia k_p tal que establezca el sistema de la siguiente forma:

$$\frac{1}{k} \left[\frac{T}{L} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \right] < k_p < -\frac{1}{k}$$

Donde α_1 es la solución de la ecuación:

$$\tan(\alpha) = -\frac{T}{T+L}\alpha \quad (9)$$

En el intervalo $(0, \pi)$, De esta forma para valores de k_p fuera de este rango, no existen valores para el control PID, el conjunto de valores completo para el controlador está dado en la Figura (2).

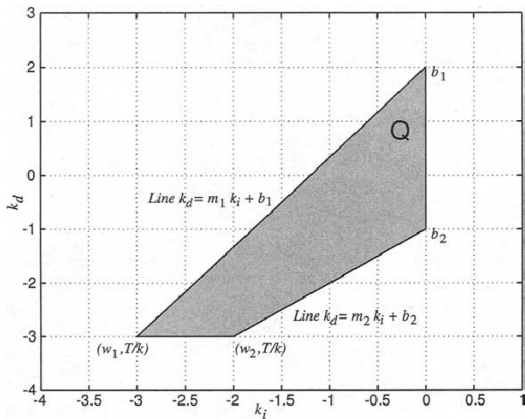


Figura 2. Región de Estabilidad (k_i, k_d)

Para cada valor de $k_p \in (k_l := \frac{1}{k} [\frac{T}{L} \alpha_1 \sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1)], -\frac{1}{k})$, la sección transversal de la región transversal en el espacio (k_i, k_d) es el cuadrilátero Q . Los parámetros m_j , b_j y w_j , $j = 1, 2$ son necesarios para determinar el límite de Q . Para mayor detalle se puede consultar (Guillermo J. Silva, 2004).

IV. RESULTADO PRINCIPAL: CONTROLADOR PD

Considere el sistema inestable dado por la ecuación (1) y considerando el controlador Proporcional derivativo como:

$$H(s) = k(s + \alpha)$$

$$H(s) = k_p + k_d s = k_d \left(s + \frac{k_p}{k_d} \right) \quad (10)$$

Las condiciones de estabilidad del sistema dado por la Figura (1) se muestra en el resultado siguiente.

Teorema 1: Considere el sistema con retardo dado por la ecuación (1) y el esquema de retroalimentación dado en la Figura (1). Existen ganancias k_p y k_d tales que el sistema a lazo cerrado:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bk(s + \alpha)e^{-\tau s}}{(s - a) + bke^{-\tau s}(s - \alpha)} \quad (11)$$

es estable si y solo si $\tau < \frac{2}{a}$.

La demostración del teorema 1 se presenta en el apéndice A.

Un Resultado que permite calcular los parámetros del controlador Proporcional Diferencia PD, puede ser calculado de la siguiente manera.

Corolario 1: Considere el esquema de control dado en la Figura (1) Si $\tau < \frac{2}{a}$, Entonces los parámetros k_p y k_d tales que el sistema a lazo cerrado dado por la ecuación (11) sea estable satisfacen:

$$k_p = \frac{a}{b} + \bar{\sigma} \quad (12)$$

$$k_d = \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b} \quad (13)$$

Donde: σ y $\bar{\sigma}$ son constantes mayores que cero. La demostración del Corolario 1, se presenta en el apéndice B.

V. RESULTADOS EN SIMULACIÓN

La metodología propuesta se evalúa a través de un ejemplo comparativo con (Guillermo J. Silva, 2004), se considera el caso en el que el retardo se encuentra cerca del límite en el que existe rango de estabilidad que cumpla la condición necesaria y suficiente de $|\frac{T}{L}| > 0,5$, i.e., $\tau < \frac{2}{a}$.

Ejemplo: Considere el sistema inestable con retardo dado por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s - 0,25} e^{-7s} \quad (14)$$

El control propuesto por (Guillermo J. Silva, 2004), se inicia probando la existencia de ganancias para el controlador PID, cumpliendo con la condición $|\frac{T}{L}| = 0,5714$ de aquí tenemos que $0,5714 > 0,5$ por lo que sugiere estabilizar el problema utilizando un valor para la ganancia k_p que se encuentre dentro del siguiente rango:

$$-1,0249 < k_p < -1 \quad (15)$$

Y haciendo uso de la región propuesta para k_p se obtiene la región para k_d y k_i mostrado en la figura (3):

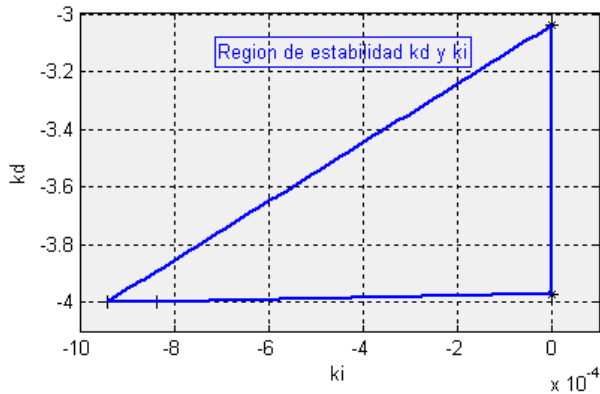


Figura 3. Regiones k_i y k_d

De aquí podemos seleccionar los parámetros del controlador que proponen como: $k_p = -1,0033$; $k_i = 0,0002$ y $k_d = -3,4$, con lo que obtenemos la respuesta mostrada en la Figura (4):

De la región Q, dada en la Figura (3), se puede observar que la ganancia k_i para el control integral es del orden 10^{-4} , lo que muestra que la ganancia es pequeña con respecto a la ganancia diferencial, aún con un valor muy pequeño, la respuesta obtenida no favorece la respuesta de salida al tener un sobre impulso de mas de cien veces el valor final deseado, con lo que el seguimiento de referencia del controlador PID no es funcional para una aplicación práctica.

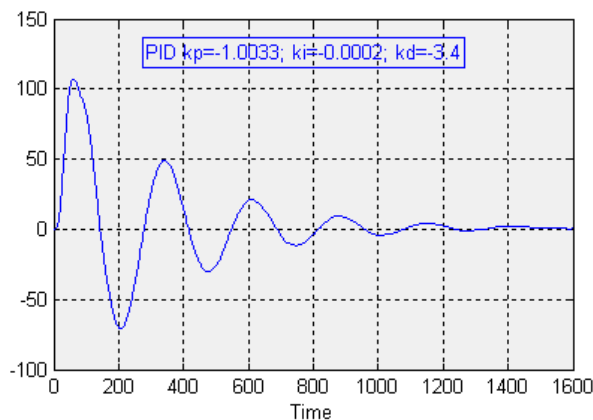


Figura 4. Respuesta con el Controlador PID

Ahora se realiza el análisis haciendo uso de la metodología propuesta en este trabajo, con uso del controlador PD.

Se prueba la existencia de ganancias k_p y k_d , corroborando se cumpla la condición dada por el Teorema 1, que es $\tau < \frac{2}{a}$, entonces tenemos $\frac{2}{a} = 8$ de esa forma tenemos $7 < 8$, cumplimos con la condición, procedemos a utilizar el método de sintonización del controlador PD.

Del teorema 1 es claro que existe ganancia k_p y k_d que estabilizan el sistema a lazo cerrado con el uso de un esquema como es mostrado en la Figura 1, debido a que el retardo cumple la condición $\tau < \frac{2}{a}$. Existen ganancias k_p y k_d que pueden ser calculadas utilizando el Corolario 1 de la siguiente forma:

$$k_p = \frac{a}{b} + \bar{\sigma}$$

$$k_d = \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b}$$

Para las simulaciones se considera $\sigma = 0,10$ y $\bar{\sigma} = 0,0033$ de esta forma obtenemos $k_p = -1,0033$ y $K_d = -3,4$. En la Figura (5), se evalúa la respuesta en la salida $y(s)$ con el uso del controlador PD propuesto. Para llevar a cabo este experimento asumimos el conocimiento exacto de los parámetros de la planta.

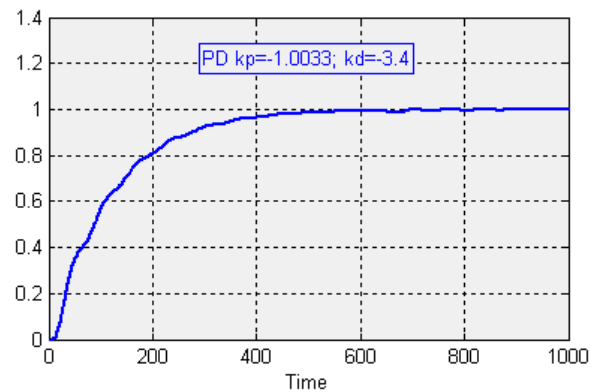


Figura 5. Respuesta con el Controlador PD

La respuesta en la salida $y(s)$ del sistema con la implementación del controlador PD, muestra una respuesta sin oscilaciones en la que se llega más rápido al valor final, en comparación a el tiempo que tarda el control PID.

VI. CONCLUSIONES

La existencia de un retardo de tiempo suficientemente grande en el lazo directo puede ser visto como el peor escenario de trabajo en el caso de estabilización y regulación de sistemas. En este trabajo se presentaron condiciones explícitas que garantizan la existencia de ganancias k_p y k_d para la existencia de un controlador Proporcional-Derivativo estabilizante de plantas de primer orden inestables con retardo.

El control (PD) propuesto da como resultado un mejor desempeño al compararse con el (PID) propuesto en (Guillermo J. Silva, 2004), al tratarse con sistemas con retardos grandes, cercanos al límite admisible. Es importante señalar que en el resultado referido en (Guillermo J. Silva, 2004) no se dan las condiciones para la estabilización usando un PD. Al aplicar los resultados de dicho trabajo explícitamente se debe usar el término integral.

APÉNDICE A

La prueba del teorema (1), es muy similar a la presentada en (J.F. Márquez-Rubio and Alvarez-Ramirez, 2010). La idea básica es analizar el problema al hacer control por computadora usando un periodo de muestreo T y un retenedor de orden cero ROC. Al discretizar el sistema y resolver el problema se obtiene un resultado que puede ser extrapolado al caso continuo al considerar el $\lim_{T \rightarrow 0}$.

Discretizando el sistema de la ecuación (11), considerando un periodo de muestreo T y un retenedor de orden cero ROC, así como el retardo $\tau = nT$, obtenemos:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{kb(z-1) + ((\frac{\alpha kb}{-a})(1 - e^{aT}))}{z^n(z - e^{aT}) + kb(z-1) + (\frac{\alpha kb}{a})(-1 + e^{aT})} \quad (16)$$

Considerando la ecuación (16) y un cambio de variable obtenemos la ecuación característica del sistema discretizado dado por:

$$p_1(z) = (z - e^{aT})(z^n + k_k) + (k_\alpha)\left(\frac{b}{a}\right)(e^{aT} - 1) = 0 \quad (17)$$

La demostración consiste en probar que todas las raíces de la ecuación (17) se encuentran dentro del círculo unitario cuando consideramos, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau}{n} = T$, si y solo si $\tau < \frac{2}{a}$. Iniciamos considerando como primer paso a $k_k = 0$ en la ecuación (17), obteniendo:

$$p_1(z) = (z - e^{aT})z^n + (k_\alpha)\left(\frac{b}{a}\right)(e^{aT} - 1) = 0 \quad (18)$$

Considere ahora el análisis del diagrama mostrado en la Figura (6) del lugar geométrico de las raíces de la ecuación (18) (Evans, 1954). El sistema a lazo cerrado tiene n polos en el origen y uno en $z = e^{aT}$, dado que no existen polos finitos, tenemos $n + 1$ trayectorias hacia el infinito, $n - 1$ que inician en el origen y las otras dos trayectorias restantes empiezan en un punto localizado entre el origen y $z = e^{aT}$. Este punto lo localizamos considerando:

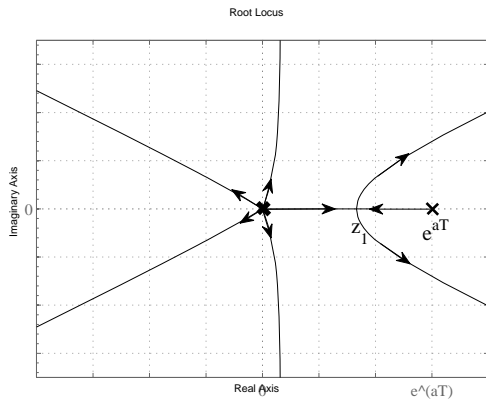


Figura 6. Lugar de las Raíces de la ecuación (18)

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \left[-\frac{z^n(1 - e^{aT})}{\frac{b}{a}(1 - e^{aT})} \right]$$

Entonces tenemos $n - 1$ raíces en el origen y una en:

$$z_1 = \frac{n}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}}$$

Si el punto de ruptura sobre el eje real se encuentra dentro del círculo unitario, entonces el sistema tiene una región de estabilidad, de lo contrario el sistema es inestable para cualquier k_α . Las propiedades de estabilidad para el sistema continuo 11 se obtiene considerando el limite cuando $n \rightarrow \infty$ o su equivalente, cuando $T \rightarrow 0$ esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} = 1 \quad (19)$$

Consideramos ahora el caso cuando $k_k \neq 0$, aplicamos de nueva cuenta el lugar geométrico de las raíces para el sistema 16 y su ecuación característica 17, como k_k crece desde cero, el punto de ruptura sobre el eje real se mueve en el lugar geométrico de las raíces (de hecho hacia la derecha). Este punto puede ser obtenido como:

$$\frac{dk_\alpha}{dz} = \left[-\frac{(z - e^{aT})(z^n + k_k)}{\left(\frac{b}{a}\right)(e^{aT} - 1)} \right] = 0 \quad (20)$$

Esto produce:

$$p_2(z) = (n+1)z^n - nz^{n-1}e^{aT} + k_k \quad (21)$$

La expresión 21 corresponde a la ecuación característica de un sistema ficticio de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{V(z)} &= G(z) \\ &= \frac{\frac{1}{(n+1)}}{z^n - \frac{z^{n-1}e^{aT}n}{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{(n+1)}}{z^{n-1}\left(\frac{z - e^{aT}n}{n+1}\right)} \end{aligned} \quad (22)$$

En lazo cerrado con la retroalimentación se tiene:

$$V(z) = U(z) - k_k Y(z) \quad (23)$$

El sistema de la ecuación 22 tiene $n - 1$ raíces en el origen y una en:

$$z = \frac{n}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}}$$

Si el punto de ruptura está ubicado dentro del círculo unitario, el sistema a lazo cerrado 22-23 puede tener región de estabilidad (probando que las otras dos $n - 2$ estén dentro del círculo unitario), de otra forma el sistema será inestable para cualquier k_k . Este punto puede ser ubicado de la siguiente forma:

$$\frac{dk_k}{dz} = \frac{d}{dz} \left[-\frac{z^{n-1}\left[\frac{z - e^{aT}n}{(n+1)}\right]}{\frac{1}{n+1}} \right] = 0 \quad (24)$$

Lo que produce:

$$z^{n-2} \left(z - \frac{n-1}{n+1} e^{aT} \right)$$

Donde tenemos $n - 2$ raíces en el origen y una en:

$$z = \left(\frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} \right)$$

Como en el caso anterior las propiedades de estabilidad del sistema continuo 11 son obtenidas considerando $n \rightarrow \infty$, o su equivalente, cuando $T \rightarrow 0$ esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} e^{a\frac{\tau}{n}} = 1$$

De igual forma, debido a que este limite esta localizado en la region de estabilidad, en este caso es posible ver que si $a\tau \leq 2$ (el limite tiende a uno desde la izquierda), entonces existe ganancia k_k que da lugar al punto de ruptura dentro del circulo unitario en el diagrama del lugar geométrico de las raíces, entonces las $n - 1$ raíces restantes se encuentran dentro del circulo unitario, entonces el sistema a lazo cerrado es estable. En el caso que $a\tau > 2$ no es posible obtener una region de estabilidad por este medio (el limite tiende a uno por la derecha). La demostración finaliza señalando que, cuando el punto de ruptura esta dentro del circulo unitario ($a\tau \leq 2$), tomando en cuenta el caso continuo la ecuación característica 18 se modifica teniendo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_1(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(z - e^{a\frac{\tau}{n}})(z^n + k_k) \\ &\quad + k_\alpha \left(\frac{b}{a} \right) (e^{a\frac{\tau}{n}} - 1)] \\ &= (z - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} (z^n + k_k) \end{aligned}$$

De donde tenemos que mientras el polo este en una region cercana a $z = 1$ el resto de polos se encontraran dentro de la region cercana al punto $(k_k)^{\frac{1}{n}}$. Dentro del circulo unitario, produciendo un sistema a lazo cerrado estable, si como vimos previamente, se satisface la condición $k_k < 1$ de la ecuación 24;

$$k_k = - \frac{\frac{z^n [z - e^{aT}]}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}}$$

Entonces si $z = 1$,

$$\begin{aligned} k_k &= - \frac{\frac{1 - e^{aT} n}{(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)}} \\ &= -(n + 1 - n e^{aT}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el caso continuo anteriormente visto tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n + 1 - n e^{a\frac{\tau}{n}}) \\ &= a\tau - 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Como $k_k < 1$ es una condición necesaria para la estabilidad, $a\tau - 1 < 1$, entonces $a\tau < 2$. Finalmente, podemos afirmar que para el sistema discreto en el limite cuando $n \rightarrow \infty$, todos los polos se encuentran dentro del circulo unitario si y solo si $a\tau < 2$.

APÉNDICE B

A continuación presentaremos la demostración del corolario 1 Tomando en consideración que $k_k = k_d b$ y $k_\alpha = k_p + k_d a$ De la demostración del teorema 1 la ecuación 26:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} -(n + 1 - n e^{a\frac{\tau}{n}}) \\ &= a\tau - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto si $\tau < \frac{2}{a}$, existen ganancias k_p y k_d que estabilicen el sistema dado por la ecuación 11:

$$a\tau - 1 < k_k \leq a\tau - 1 + \sigma$$

Para constantes $\sigma > 0$

De la ecuación 20

$$\frac{a}{b}(k_k + 1) < k_\alpha \leq \frac{a}{b}(k_k + 1) + \bar{\sigma},$$

Para constantes $\bar{\sigma} > 0$

De esta forma realizando las sustituciones algebraicas correspondientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{a}{b} + \bar{\sigma} \\ k_d &= \frac{a\tau - 1 + \sigma}{b} \end{aligned}$$

REFERENCIAS

- Evans, W. R. (1954), *Control-Systems Dynamis*, New York.
- Guillermo J. Silva, A. D. and Bhattacharyya, S. (2002), 'New results on the synthesis of pid controllers', *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL* **47**(2), 241-252.
- Guillermo J. Silva, Aniruddha Datta, S. B. (2004), *PID Controlers for Time-Delay Systems*, William S. Levine, Birkhauser.
- J.F. Márquez-Rubio, B. del Muro-Cuellar, M. V.-V. and Alvarez-Ramirez, J. (2010), 'Stabilization strategy for unstable first order linear systems with large time-delay', *Submitted Asian Journal of Control*.
- Márquez, J., Muro, B. D., Velasco, M. and Alvarez, J. (2010), 'Control Based in an Observer Scheme for First-Order Systems with Delay', *Revista Mexicana de Ingeniería Química* **9**.
- Marshall, J. E. (1979), *Control of Time Delay Systems*, Peter Peregrinus LTD, New York.
- Niculescu, W. M. S.-L. (2007), 'Stability and stabilization of time-delay systems', *siam* pp. 3-31.
- Palmer, Z. J. (1996), 'Time delay compensation smith predictor and its modifications', *The control Handbook* pp. 224- 237.
- Seshagiri R.A., Rao, V. E. a. (2007), 'Simple analytical design of modified smith predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay process.', *Ind. Eng. Chem. Res.* **46**(13), 4561-4571.
- Skogestad., S. (2004), 'Simple analytic rules for model reduction and pid controller tuning.', *Journal of Process Control.* (13), 291-309.
- Smith, O. J. M. (1957), 'Close Control of Loops with Dead Time', *Chem. Eng. Prog.* **53**, 217-219.
- Torrico, B. and Normey-Rico, J. (2004), '2dof discrete dead time compensator for stable and integrative processes with dead time.', *Journal of Process Control* **15**, 341-352.
- Ya-Gang Wang, X.-M. X. E. a. (2010), Robust adaptive pi controller for large dead-time processes with sensitivity specification., in IEEE, ed., 'Industrial electronics and applications (ICIEA).', Vol. 5th, pp. 724-729.