

Observadores para sistemas no lineales basados en disipatividad y cooperatividad

Jesús D. Avilés, Jaime A. Moreno
Instituto de Ingeniería-UNAM
Coyoacan DF, 04510 México D.F.
{JAvilesV, JmorenoP}@iingen.unam.mx
Teléfono: (52)-55-56233600 ext. 8819 y 8811

Resumen—El propósito de este trabajo es proporcionar una novedosa estrategia de diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales, en ausencia y en presencia de perturbaciones, mediante una metodología basada en propiedades sistémicas de disipatividad y cooperatividad. La primera es utilizada para asegurar la convergencia del error de estimación, y la segunda puede ser combinada con la propiedad anterior y aplicada a las dinámicas del error de estimación, para asegurar las propiedades de preservación del orden del observador. La idea principal consiste en simplificar el diseño de los observadores a través de la sustitución de una desigualdad matricial no lineal del método disipativo por un cálculo matemático sencillo del radio de estabilidad de los sistemas positivos. El diseño de un observador disipativo se reduce a la solución de tres desigualdades matriciales lineales (LMI's, por sus siglas en inglés) y del cálculo matemático mencionado; y para un observador que preserve el orden se reduce a la solución de un observador disipativo aunado con LMI dada por la condición de cooperatividad.

Palabras clave: Sistemas cooperativos; Sistemas disipativos; Sistemas positivos; radio de estabilidad; observadores cooperativos; observadores intervalo.

I. INTRODUCCIÓN

Los observadores de estados (sensores de software) proporcionan una estimación de las variables del estado que converge asintóticamente a sus valores verdaderos, al menos cuando el modelo de la planta es perfectamente conocido y/o cuando las perturbaciones desconocidas no actúan en el sistema. En general, el problema de diseño de los observadores lineales ha sido resuelto por el esquema del estimador de Luenberger y por el Filtro de Kalman. Este no es el caso, si se desea construir observadores para sistemas no lineales. Sin embargo, una actividad intensiva de investigación ha sido realizada en los últimos años apuntando hacia el desarrollo de nuevas estrategias de diseño de observadores no lineales, diferentes a los métodos convencionales del Filtro Extendido de Kalman (EKF, por sus siglas en inglés).

Una metodología de diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales, basada en la teoría disipativa, es propuesta en (Moreno, J. A., 2004). Esta metodología ofrece una aproximación sistemática para el diseño del observador, proporcionando gran flexibilidad y generalidad. Por ejemplo, algunos métodos de diseño de observadores bien conocidos, como observadores de Lipschitz (Gauthier, J. P. *et. al.*, 1992; Thau, F.E., 1973) y de Alta Ganancia (Gauthier, J. P. and Kupka, I., 2001), puede ser tratados y generalizados en una manera unificada por la aproximación disipativa. La idea principal consiste en descomponer el

sistema de error de estimación en una parte lineal invariante en el tiempo y una realimentación no lineal variante en el tiempo. Si la no linealidad es disipativa con respecto a una función de suministro cuadrática, entonces la parte lineal debe ser diseñada ser disipativa con respecto a la función de suministro relacionada, así que el lazo cerrado es exponencialmente estable. El diseño está caracterizado por una desigualdad matricial no lineal, que muchas ocasiones, pueden ser llevada al ambiente de las LMI's.

En (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009) se da seguimiento a la línea de investigación iniciada en (Moreno, J. A., 2004), y es propuesta una metodología de diseño de los observadores que preservan el orden para la misma clase de sistemas no lineales, en ausencia y en presencia de perturbaciones, basada en las propiedades sistémicas de disipatividad y cooperatividad. Esta clase de estimadores son definidos como aquellos cuyos estimados siempre permanecen por encima o por debajo de la trayectoria del estado real. La idea de este diseño es asociar la metodología de diseño del observador disipativo (Moreno, J. A., 2004) con la idea básica de hacer que el sistema del error de observación sea cooperativo, a fin de que el observador preserve el orden y converja a los valores reales, en el caso libre de perturbaciones o incertidumbres (observadores cooperativos). Para el caso perturbado, la preservación de la cooperatividad es importante y la convergencia es debilitada en lo práctico (observadores intervalo): el error de observación es Entrada-Estado estable (ISS) con respecto a la señal perturbante. Asimismo, si la dinámica del error de observación es un sistema cooperativo, entonces el ordenamiento de las trayectorias de dicho error es asegurado y por consecuencia, *el estimado del observador acota dinámicamente al estado, ya sea por encima o por debajo*, dependiendo del orden parcial del error inicial. Los observadores que preservan el orden aunados con la convergencia a cero en el error de estimación, se definen como *observadores cooperativos* (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009). Esta metodología se extiende para manejar sistemas no lineales con perturbaciones. Para asegurar la cooperatividad en las dinámicas de los errores de estimación es necesario utilizar un par de observadores. Estos observadores forman un *observador intervalo*. El diseño de estos observadores (cooperativo e intervalo) se reduce a la solución de una desigualdad matricial no lineal dada por el método disipativo y una LMI dada por la propiedad sistemática de cooperatividad. Los observadores intervalo en (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009) son muy similares

a los introducidos en (Gouzé, J. L. and Rapaport, A. and Hadj-Sadok, M. Z. , 2000), excepto que la propiedad de convergencia práctica está definida en (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009).

El objetivo de este trabajo es asociar la teoría de disipatividad de los observadores que preservan el orden (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009) y/o del observador disipativo (Moreno, J. A., 2004) con el radio de estabilidad de los sistemas positivos (Son, N. and Hinrichsen, D., 1996). El concepto de radio de estabilidad está utilizado para los sistemas lineales bajo perturbaciones estructuradas lineales, y se define como la cota más pequeña de la perturbación que estabiliza al sistema perturbado, existiendo tres diferentes radios de estabilidad según el espacio de las perturbaciones (complejo, real y real positivo). Si el sistema perturbado es positivo entonces los tres radios de estabilidad son iguales, correspondiendo a un cálculo matemático simple. Asimismo, si el cálculo matemático del radio de estabilidad es mayor que una cota de la perturbación entonces el sistema perturbado es asintóticamente estable. Este concepto se extiende para analizar el comportamiento de los sistemas lineales bajo perturbaciones no lineales variantes en el tiempo, obteniendo una afinidad de este sistema perturbado con las dinámicas del errores de estimación de los observadores que preservan el orden (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009) y del observador disipativo (Moreno, J. A., 2004). Si el sistema perturbado es positivo entonces el radio de estabilidad está dado por el cálculo matemático simple antes mencionado. Adicionalmente, si la perturbación es globalmente Lipschitz y el radio de estabilidad es mayor que la constante Lipschitz, entonces el sistema perturbado es exponencialmente estable. El mismo resultado es obtenido utilizando la teoría disipativa en las dinámicas del error de observación mencionadas. Por tanto, si el sistema del error es positivo entonces la desigualdad matricial que caracteriza a la teoría disipativa puede ser reemplazada por un cálculo matemático simple. En consecuencia, el diseño de los observadores que preservan el orden es reducido a la solución de cálculo matemático simple y una LMI, para el observador disipativo está dado sólo por el cálculo matemático simple.

II. PRELIMINARES

En este trabajo tres conceptos será fundamentales para diseñar observadores disipativos y/o de los observadores que preservan el orden: i) la propiedad de disipatividad (Willems, J.C., 1972; Hassan K. Khalil. , 2002; Moreno, J. A., 2004; Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009) es usada en ambos diseños con el propósito de asegurar las propiedades de convergencia de los errores de estimación, ii) la *cooperatividad*, propiedad sustancial para preservar el orden (Angeli, D. and Sontag, D., 2003; Hirsch, M.W. and Smith, H.L., 2005) y es fundamental en el segundo diseño para los observadores cooperativos e intervalo (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009), y iii) radio de estabilidad para sistemas positivos (Son, N. and Hinrichsen, D., 1996) será asociado al método disipativo y utilizado para simplificar el diseño de ambos observadores. Algunos resultados relevantes de estos tópicos serán mencionados aquí.

II-A. Sistemas Cooperativos

El símbolo \succeq define un *orden parcial* en el espacio de vectores o matrices. Para vectores $x \succeq y \Leftrightarrow x_i - y_i \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, es decir, cada componente de x es mayor o igual a la correspondiente en y . Para matrices $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ y $M \succeq N \Leftrightarrow M_{ij} - N_{ij} \geq 0$, $M, N \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Particularmente, representa la *no negatividad* de los vectores y matrices, tal que, $x \succeq 0 \Leftrightarrow x_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ó $M \succeq 0 \Leftrightarrow M_{ij} \geq 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, respectivamente. Los sistemas cooperativos, los cuales son una clase especial de los sistemas monótonos (Angeli, D. and Sontag, D., 2003; Hirsch, M.W. and Smith, H.L., 2005) son *aquellos que sus trayectorias preservan el orden parcial en el estado, en la entrada y en la salida para todo tiempo, cuando las señales de entrada y los estados iniciales son ordenados (parcialmente)*.

Definición 1: Sea el sistema no lineal

$$\Sigma_{NL} \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u), & x(0) = x_0 \\ y = h(t, x, u) \end{cases} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el *estado*, $u \in \mathbb{R}^m$ es la entrada, y $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida del sistema. El sistema Σ_{NL} en (1) es *cooperativo* si dados,

$$x_0^1 \succeq x_0^2, \quad u^1(t) \succeq u^2(t), \quad \forall t \geq 0$$

entonces, las trayectorias del estado están ordenadas

$$x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) \succeq x(t, t_0, x_0^2, u^2(t)), \quad \forall t \geq t_0$$

y también las trayectorias de salida

$$h \circ x(t, t_0, x_0^1, u^1(t)) \succeq h \circ x(t, t_0, x_0^2, u^2(t))$$

Los sistemas cooperativos pueden ser caracterizados por, *Proposición 1:* (Angeli, D. and Sontag, D., 2003). El sistema Σ_{NL} en (1) es *cooperativo* si y sólo si las siguientes condiciones son satisfechas:

1. $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}^M \succeq 0$, es decir, $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0, \forall i \neq j)$,
2. $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \end{bmatrix} \succeq 0$,
3. $\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \succeq 0$. ◇

donde el símbolo $\succeq 0$ representa el Jacobiano sea Metzler, es decir, que todos los elementos fuera de la diagonal son no negativos. Los sistemas cooperativos lineales se pueden caracterizar fácilmente:

Proposición 2: (Angeli, D. and Sontag, D., 2003). Considere el sistema lineal invariante (LTI) en tiempo continuo

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, & x(0) = x_0 \\ y = C(t)x, \end{cases} \quad (2)$$

donde $(x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ son los vectores de estado, entrada y salida, respectivamente. El sistema Σ_L en (2) es *cooperativo* si y sólo si,

1. $A \succeq 0$, es decir, $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0, \forall i \neq j)$,
2. $B \succeq 0$,
3. $C \succeq 0$. ◇

En los sistemas lineales, la propiedad de cooperatividad y positividad son equivalentes, si para cualquier $x_0 \succeq 0$ y $u(t) \succeq 0$ entonces $x(t, t_0, x_0, u(t)) \succeq 0$ y $h \circ x(t, t_0, x_0, u(t)) \succeq 0$. Sin embargo, para los sistemas no lineales esto no necesariamente ocurre.

II-B. Método Disipativo

Considere la función de suministro cuadrática

$$w(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con Q y R simétricas.

Definición 2: El sistema (LTI) Σ_L en (2) es *estado estrictamente disipativo* (SSD) con respecto a una función de suministro $w(y, u)$ en (3), o en forma corta (Q, S, R) -SSD, si existe una matriz $P = P^T > 0$ y una constante $\epsilon > 0$ tal que se satisface la desigualdad disipativa:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4)$$

Definición 3: Una *no linealidad estática variante en el tiempo*

$$y = f(t, u) \quad (5)$$

continua a tramos en t y localmente Lipschitz en u , tal que $f(t, 0) = 0$ es *disipativa* con respecto a la función de suministro $w(y, u)$ (3) ó en forma corta (Q, S, R) -D, si para todo $t \geq 0$ y $u \in \mathbb{R}^m$,

$$w(y, u) = w(f(t, u), u) \geq 0. \quad (6)$$

Las condiciones de sector clásicas para no linealidades cuadradas están definidas en (Hassan K. Khalil, 2002).

Lema 1: (Moreno, J. A., 2004). Considere la interconexión en retroalimentación

$$\Xi_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (7)$$

Si existe una (Q_N, S_N, R_N) tales que $f(t, y)$ es (Q, S, R) -D, y el subsistema lineal de Ξ_L es $(-R_N, S_N^T, -Q_N)$ -SSD, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de Ξ_L es *global y exponencialmente estable*. \diamond

Estos sistemas son bien comportados bajo perturbaciones:

Lema 2: (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009). Sea el sistema

$$\Xi_{NL} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + b, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u = -f(t, y) \end{cases} \quad (8)$$

donde b es una señal de entrada. Suponga que las condiciones del Lema anterior son satisfechas. Bajo estas condiciones, el sistema Ξ_{NL} es *entrada estado estable (ISS) con respecto a b* . \diamond

II-C. Radio de Estabilidad

El concepto de radio de estabilidad está dado para los sistemas lineales; bajo ciertas perturbaciones (lineales o no lineales), se puede garantizar que estos sistemas permanecen estables. En seguida se enuncian los resultados fundamentales (Son, N. and Hinrichsen, D., 1996).

Considere el sistema lineal

$$\Omega : \dot{x} = Ax, \quad (9)$$

es asintóticamente estable si y solo si la matriz A es Hurwitz, es decir, $\max\{\lambda; \lambda \in \rho(A)\} < 0$, donde $\rho(A) \subset \mathbb{C}_-$ es el espectro de A . Consideramos que el sistema Ω en

(9) está sujeto a *perturbaciones estructuradas* del tipo de realimentación de salida

$$A \rightarrow A + B\Delta C$$

El sistema perturbado está representado por

$$\Omega_p : \dot{x} = (A + B\Delta C)x, \quad \|\Delta\| < \gamma \quad (10)$$

donde A es Hurwitz, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son matrices que definen la estructura de las perturbaciones, y Δ es una matriz de perturbaciones desconocida. Esta puede ser: compleja, real y no negativa (es decir, $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\Delta \in \mathbb{R}_+^{m \times p}$). $\|\Delta\|$ es el tamaño de la perturbación lineal y $\gamma > 0$ es una cota de dicha perturbación. Para la terna $(A; B, C)$ con $\Delta \in \mathbb{K}^{m \times p}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó \mathbb{R} ó \mathbb{R}_+ se definen 3 radios de estabilidad.

Definición 4: Si el sistema Ω en (9) es perturbado, y toma la forma de Ω_p en (10), entonces el radio de estabilidad de Ω_p es:

$$r_{\mathbb{K}} = r_{\mathbb{K}}(A; B, C) = \inf \left\{ \|\Delta\|; \Delta \in \mathbb{K}^{m \times p}, \lambda(A + B\Delta C) \geq 0 \right\} \quad (11)$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$.

El radio de estabilidad se define como la menor cota de la perturbación que desestabiliza al sistema Ω_p . Los tres radios de estabilidad tienen la propiedad,

$$0 \leq r_{\mathbb{C}}(A; B, C) \leq r_{\mathbb{R}}(A; B, C) \leq r_{\mathbb{R}_+}(A; B, C) \quad (12)$$

En el caso complejo, el radio de estabilidad es definido:

$$r_{\mathbb{C}}(A; B, C) = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \|C(j\omega I - A^{-1})B\|^{-1} \quad (13)$$

Utilizando el radio de estabilidad complejo, se presentan los siguientes algoritmos que están relacionados con la estabilidad y positividad del sistema perturbado Ω_p .

Proposición 3: (Hinrichsen, D. and Pritchard, A.J., 1986). Considere el sistema Ω_p en (10). Suponga que el espectro $\rho(A) \in \mathbb{C}_-$. Si $r_{\mathbb{C}}^2 \geq \gamma$ entonces Ω_p es asintóticamente estable.

Teorema 1: (Son, N. and Hinrichsen, D., 1996). Considere el sistema Ω_p en (10). Si Ω_p es un sistema positivo, es decir, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Metzler, y además Hurwitz, $D \geq 0$ y $E \geq 0$ son matrices no negativas. Entonces, los radios de estabilidad están dados:

$$r_{\mathbb{C}} = \|EA^{-1}D\|^{-1}, \quad r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}} = r_{\mathbb{R}_+} \quad (14)$$

\diamond

Ahora, se considera que el sistema lineal Ω en (9) está sujeto a *perturbaciones no lineales variantes en el tiempo* $f(Cx, t)$ (Son, N. and Hinrichsen, D., 1996). Este sistema perturbado está representado por

$$\Omega_{np} : \dot{x} = Ax - Bf(Cx, t), \quad t > 0 \quad (15)$$

Es importante mencionar que el sistema Ω_{np} se puede reescribir de la forma del sistema Ξ_L en (7) definido por un sistema LTI con una realimentación dada por una no linealidad estática variante en el tiempo. Se asume que $f(t, y)$ es globalmente Lipschitz en y y continua a tramos en t , tal que

$$\|f(y, t)\| \leq \gamma \|y\|, \quad y \in \mathbb{R}^p, t \geq 0, \gamma > 0 \quad (16)$$

El tamaño de la perturbación no lineal se mide por

$$\|f\| = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R}_+; \forall y \in \mathbb{R}^p, t \geq 0 : \|f(y, t)\| \leq \gamma \|y\| \}$$

Proposición 4: (Son, N. and Hinrichsen, D., 1996). Suponga que el sistema perturbado Ω_{np} en (15) es positivo ($A \succeq^M 0, B \succeq 0, C \succeq 0$) y la matriz A es Hurwitz. Se asume que $f(y, t)$ es globalmente Lipschitz en y y continua a tramos en t tal que la desigualdad en (16) sea satisfecha.

Si $\|CA^{-1}B\|^{-1} > \gamma$ con $\gamma \geq \|f\|$, entonces el sistema perturbado es exponencialmente estable, es decir, existen las constantes $k > 0, \beta > 0$ tal que se satisface

$$\|x(t)\| \leq k \|x_0\| \exp(-\beta t), \quad t > 0, \quad \gamma > \|f\| \quad (17)$$

◇

El mismo resultado se puede obtener utilizando el método disipativo. A continuación se presenta un resultado que combina el análisis del radio de estabilidad con el método disipativo, que sustituye la desigualdad no lineal que caracteriza al método mencionado por el cálculo matemático del radio de estabilidad. Esto está definido para no linealidades que se encuentran en un sector específico.

Proposición 5: Suponga que el sistema Ξ_L en (7) es positivo, es decir, $A \succeq^M 0, B \succeq 0$ y $C \succeq 0$ y A es una matriz Hurwitz. Se asume que $f(y, t)$ es (Q_N, S_N, R_N) -D = $(-I, 0, \gamma^2 I)$ -D.

Si $\|CA^{-1}B\|^{-1} > \gamma$ con $\gamma > 0$, entonces existen $P_\gamma = P_\gamma^T > 0$ y $\epsilon > 0$ tal que Ξ_L es *global y exponencialmente estable*.

◇

Demostración: $f(t, y)$ es globalmente Lipschitz en y y continua a tramos en t , es decir, es $(Q_N, S_N, R_N) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D. Suponga $\|CA^{-1}B\|^{-1} > \gamma$ entonces existe una matriz $P_\gamma > 0$ y una constante $\epsilon > 0$ tal que se satisface

$$A^T P_\gamma + P_\gamma A + \epsilon P_\gamma + \gamma^2 C^T C + P_\gamma B B^T P_\gamma = 0 \quad (18)$$

Esto es porque el radio de estabilidad está caracterizado por la ecuación algebraica de Riccati (Hinrichsen, D. and Pritchard, A.J., 1986). Por consiguiente, existe un conjunto de soluciones de P_γ y ϵ tal que se satisface

$$A^T P_\gamma + P_\gamma A + \epsilon P_\gamma + \gamma^2 C^T C + P_\gamma B B^T P_\gamma \leq 0 \quad (19)$$

Aplicando Lema de Schur, se tiene la desigualdad que caracteriza a Ξ_L con $(Q, S, R) = (-\gamma^2 I, 0, I)$ -SSD

$$\begin{bmatrix} A^T P_\gamma + P_\gamma A + \epsilon P_\gamma + \gamma^2 C^T C & P_\gamma B \\ B^T P_\gamma & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (20)$$

■

III. OBSERVADORES

En (Moreno, J. A., 2004) un método basado en la teoría de disipatividad para diseñar observadores no lineales es propuesto. Asimismo, para la misma clase de sistemas se extiende el método para hacer el observador no sólo convergente sino también que preserve el orden (Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009). En esta metodología, se considera el primer caso para sistemas sin perturbaciones y después, una modificación es introducida al observador para asegurar la propiedad de preservar el orden a pesar de la perturbación.

III-A. Sistemas sin perturbaciones

Considere el sistema no lineal

$$\Pi_S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Gf(\sigma) + \varphi(t, y, u), \\ \sigma = Hx, \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (21)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $y \in \mathbb{R}^q$ es la salida medible, $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal del estado (no necesariamente medible), $u \in \mathbb{R}^p$ es la entrada, $f(\sigma) \in \mathbb{R}^m$ es una función no lineal localmente Lipschitz en σ , y φ es una función no lineal conocida localmente Lipschitz en (u, y) y continua a tramos en t . Se propone un observador de orden completo (Moreno, J. A., 2004) para el sistema Π_S en (21) de la forma

$$\Pi_O : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + Gf(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \quad + \varphi(t, y, u), \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (22)$$

donde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es el estimado de x del Π_S (21), y $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $N \in \mathbb{R}^{r \times q}$ son las matrices de diseño.

El error de estimación del estado se puede definir por $e \triangleq \hat{x} - x$, el error de estimación de la salida como $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$, y el error de estimación funcional como $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$. Por lo tanto, las dinámicas del error de observación pueden escribirse como (Moreno, J. A., 2004; Avilés, J.D. and Moreno, J.A., 2009):

$$\Pi_E : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + Gv, \quad e(0) = e_0 \\ z = H_N e \\ v = -\phi(\sigma, z) \end{cases} \quad (23)$$

con $e(0) = e_0 = \hat{x}_0 - x_0$; donde $A_L \triangleq A + LC$ y $H_N \triangleq H + NC$ y una no linealidad

$$\phi(z, \sigma) \triangleq f(\sigma) - f(\sigma + z) \quad (24)$$

Definición 5: El observador es *disipativo* si la siguiente propiedad se satisface:

- Es convergente, es decir, para toda condición inicial \hat{x}_0 , las trayectorias de la planta del error de estimación convergen asintóticamente a cero.

Definición 6: El observador es *cooperativo* si las siguientes dos propiedades son satisfechas:

1. Es convergente, es decir, el observador es disipativo.
2. El sistema de error Π_E en (23) es cooperativo. Esta condición implica que

$$\text{si } \hat{x}_0 \succeq x_0 \implies \hat{x}(t) \succeq x(t), \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{si } x_0 \succeq \hat{x}_0 \implies x(t) \succeq \hat{x}(t), \quad \forall t \geq 0$$

Es decir, la estimación siempre está por encima o por debajo de las trayectorias verdaderas de la planta.

Ahora bien, desarrollando analíticamente los dos puntos de la definición anterior se tiene,

- Convergencia del observador:* Para asegurar que el error de observación es convergente, el siguiente teorema proporciona las condiciones suficientes para la estabilidad asintótica del origen de las dinámicas del error, haciendo uso de la teoría de disipatividad:

Teorema 2: Suponga que la no linealidad ϕ en (24) es (Q_N, S_N, R_N) -D $= (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir,

$$w(\phi, z) = \phi^T \phi + \gamma^2 z^T R z \geq 0, \quad (25)$$

Suponga que existen las matrices L y N , tal que se satisface:

$$\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma \quad (26)$$

◇

Bajo estas condiciones el *observador* (22) es *global* y *exponencialmente estable* para Π_S (21), lo cual implica que existan las constantes $k > 0$ y $\rho > 0$ tales que para toda condición inicial e_0 se satisface:

$$\|e(t)\| \leq k \|e_0\| \exp(-\rho t) \quad (27)$$

ii.- *Cooperatividad del error de observación:* El observador Π_O en (22) diseñado de acuerdo con el Teorema 2 es convergente, pero no tiene las propiedades que preservan el orden. Para asegurar la cooperatividad, el sistema de error Π_E en (23) tiene que ser un sistema cooperativo. Conforme a la Proposición 1, una condición necesaria y suficiente para satisfacer esta propiedad es

$$M(z) \triangleq A_L + G \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) H_N, \forall z \in \mathbb{R}^r \quad (28)$$

tiene que ser Metzler.

Utilizando el primer punto, se proporciona el siguiente algoritmo para el diseño de un observador disipativo:

Teorema 3 (Observador Disipativo): Considere el sistema Π_S en (21), el observador Π_0 en (22) y la sistema del error de estimación Π_E en (23). Se asume que ϕ en (24) es $(Q, S, R) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir, satisface

$$\|\phi(z, \sigma)\| \leq \gamma \|z\|, \quad \forall z, \sigma \in \mathbb{R}^r \quad (29)$$

Suponga que $G \succeq 0$. Si existen las matrices L y N tales que se satisface,

1. A_L es Metzler y Hurwitz
2. $H_N \succeq 0$, y
3. $\|H_N A_L^{-1} G\|^{-1} > \gamma$

Entonces, Π_0 es *global* y *exponencialmente estable*. ◇

Combinando los puntos anteriores, el siguiente algoritmo proporciona las condiciones suficientes para el diseño de un observador cooperativo:

Teorema 4 (Observador Cooperativo): Considere el Π_S en (21), el observador Π_0 en (22) y el sistema del error de estimación Π_E en (23). Se asume que ϕ en (24) es $(Q, S, R) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir, satisface la desigualdad en (29) Suponga que $G \succeq 0$. Si existen las matrices L y N tales que se satisface,

1. Las condiciones del Teorema 3 para un Observador Disipativo,
2. $M(z) \succeq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^r$.

Entonces, Π_0 es un *observador cooperativo*, *global* y *exponencialmente estable*. ◇

Nota 1: Obsérvese que para obtener simultáneamente un estimado por encima y otro por debajo de la trayectoria del estado, se requiere construir dos observadores cooperativos e inicializarlos adecuadamente. Pero se tiene la ventaja

que con un sólo diseño se pueden desarrollar los dos observadores cooperativos, lo cual se debe a la propiedad de simetría que tiene este estimador.

III-B. Sistemas con perturbaciones

Considere siguiente sistema no lineal

$$\Psi_S : \begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Gf(\sigma) + \pi(t, x) + \varphi(t, y, u), \\ \sigma = Hx(t), \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad (30)$$

donde $\pi(t, x) \in \mathbb{R}$ es una perturbación que representa las variables exógenas y/o las incertidumbres del sistema. Adicionalmente, se asume que las cotas de la perturbación son conocidas, tales que $\pi(t, x)$ satisface $\forall t \geq 0, \forall x, y$

$$\pi^+(t, y) \succeq \pi(t, x) \succeq \pi^-(t, y), \forall t \geq 0, \forall x, y \quad (31)$$

Los *observadores intervalo* son propuestos para asegurar la propiedad de cooperatividad. Estos difieren de los observadores cooperativos por el hecho que su convergencia es práctica, y son considerados cooperativos. Los observadores intervalo son similares a los introducidos en (Gouzé, J. L. and Rapaport, A. and Hadj-Sadok, M. Z, 2000), excepto que la propiedad de la convergencia práctica es introducida aquí. Un *observador intervalo* consiste de dos sistemas dinámicos

$$\Psi_{O^+} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^+ = A\hat{x}^+ + Gf(\hat{\sigma}^+ + N^+(\hat{y}^+ - y)) \\ \quad \quad \quad + L^+(\hat{y}^+ - y) + \pi^+(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^+, \quad \hat{x}^+(0) = \hat{x}_0^+ \\ \hat{y} = C\hat{x}^+ \end{cases} \quad (32)$$

$$\Psi_{O^-} \begin{cases} \dot{\hat{x}}^- = A\hat{x}^- + Gf(\hat{\sigma}^- + N^-(\hat{y}^- - y)) \\ \quad \quad \quad + L^-(\hat{y}^- - y) + \pi^-(t, y) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}^-, \quad \hat{x}^-(0) = \hat{x}_0^- \\ \hat{y} = C\hat{x}^- \end{cases} \quad (33)$$

donde x^+ y \hat{x}^- son los estimados superior e inferior de x . Las matrices de diseño de ambos observadores son $L^+ \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $N^+ \in \mathbb{R}^{r \times q}$ y $L^- \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $N^- \in \mathbb{R}^{r \times q}$. Cuando $e^+ \triangleq \hat{x}^+ - x$ y $e^- \triangleq x - \hat{x}^-$ (y las otras variables son definidas similarmente), las dinámicas del error de observación están dadas por

$$\Psi_{E^+} \begin{cases} \dot{e}^+ = A_L^+ e^+ + Gv^+ + b^+ \\ z^+ = H_N^+ e^+, \quad e^+(0) = e_0^+ \succeq 0 \\ v^+ = -\phi^+(z^+, \sigma) \end{cases} \quad (34)$$

$$\Psi_{E^-} \begin{cases} \dot{e}^- = A_L^- e^- + Gv^- + b^- \\ z^- = H_N^- e^-, \quad e^-(0) = e_0^- \succeq 0 \\ v^- = -\phi^-(z^-, \sigma) \end{cases} \quad (35)$$

donde $A_L^+ \triangleq A + L^+ C$, $H_N^+ \triangleq H + N^+ C$, $A_L^- \triangleq A + L^- C$, $H_N^- \triangleq H + N^- C$ y las no linealidades $\phi^+(z^+, \sigma)$ y $\phi^-(z^-, \sigma)$ están definidas en una forma similar a (24). Los errores de incertidumbre actúan como entradas

$$b^+ \triangleq \pi^+(t, y) - \pi(t, x) \quad (36)$$

$$b^- \triangleq \pi(t, x) - \pi^-(t, y) \quad (37)$$

El siguiente Teorema establece la condición suficiente para el diseño de un observador intervalo. Puede ser considerado como una generalización del Teorema 4 de los

observadores cooperativos, en el caso cuando las perturbaciones no están presentes.

Teorema 5: Considere el sistema perturbado Ψ_S en (30), el observador Ψ_{O+} en (32) y el sistema del error de estimación Ψ_{E+} en (34). Se asume que la $\pi(t, x)$ está acotada por (31). Suponga que $\phi^+(z^+, \sigma)$ es $(Q, S, R) = (-I, 0, \gamma^2 I)$ -D, es decir, satisface la desigualdad en (29). Si existen las matrices L^+ y N^+ tales que se satisface:

1. A_L^+ es Metzler y Hurwitz
2. $H_N^+ \succeq 0$,
3. $\|H_N^+(A_L^+)^{-1}G\|^{-1} > \gamma$,
4. $M^+ = A_L^+ + G \frac{\partial f(z^+)}{\partial z^+} H_N^+$ es Metzler $\forall z^+ \in \mathbb{R}^T$

Entonces, Ψ_{E+} es ISS con respecto a b^+ tal que

$$\|e^+(t)\| \leq k \|e^+(0)\| \exp(-\varrho t) + \delta \sup(\|b^+\|) \quad (38)$$

con $k > 0$ y $\varrho > 0$. Además, Ψ_{E+} es un sistema cooperativo, es decir, $e^+(0) \succeq 0 \implies e^+(t) \succeq 0, \forall t \geq 0$, pero si $e^+(0) \preceq 0 \not\Rightarrow e^+(t) \preceq 0, \forall t \geq 0$. Por lo tanto, las trayectorias de Ψ_{O+} (32) están siempre por encima de las trayectorias reales de la planta, es decir,

$$\hat{x}_0^+ \succeq x_0 \implies \hat{x}^+(t) \succeq x(t), \forall t \geq 0$$

a pesar de las perturbaciones. \diamond

Si el Teorema anterior es satisfecho y Ψ_{E-} (35) también cumple con las condiciones, entonces Ψ_{O+} (32) y Ψ_{O-} (33) forman un *observador intervalo* para el sistema Ψ_S porque se cumple:

$$\hat{x}_0^+ \succeq x_0 \succeq \hat{x}_0^- \implies \hat{x}^+(t) \succeq x(t) \succeq \hat{x}^-(t) \quad (39)$$

Note que el diseño de las matrices L^+ , N^+ y L^- , N^- no depende de la perturbación, por lo que el diseño puede ser realizado como en el caso cooperativo.

IV. TÓPICO COMPUTACIONAL

El diseño del observador disipativo se reduce a encontrar las matrices L y N , tal que se satisfagan tres LMI's y una desigualdad con un cálculo matemático dado por el radio de estabilidad de los sistemas positivos (ver Teorema 3), que puede ser tratado como un problema de programación cuadrática con restricciones no lineales en la variable L . El algoritmo QPCON del software comercial TOMLAB, que está completamente integrado al ambiente de MATLAB, puede resolver este tipo de problemas para encontrar las matrices de diseño. De esta forma la convergencia del observador es asegurada. Ahora bien, el diseño de los observadores que preservan el orden (cooperativo e intervalo) se reduce a la solución de un observador disipativo aunado con una LMI proporcionada por la condición $M \stackrel{M}{\succeq} 0$ en (28), así que las matrices L y N deben ser halladas para garantizar la cooperatividad en el observador.

Un problema de diseño de los observadores que preservan el orden surge en (28), ya que M depende de la variable z , así que representa un número infinito de LMI's. En particular, cuando $f(z)$ es una función escalar en (28) el requisito para que M sea Metzler está dada por un par de LMI's: tomando $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ por el valor de $K_2 = \max(\frac{\partial f(z)}{\partial z})$ y tomando $\frac{\partial f(z)}{\partial z}$ por el valor de $K_1 = \min(\frac{\partial f(z)}{\partial z})$. Desafortunadamente, cuando $f(z)$ es una función multivariable en (28) no puede ser reducido a un número finito de LMI's, pero puede ser aproximado a un conjunto de LMI's.

V. EJEMPLOS

El funcionamiento de los observadores disipativos y que preservan el orden ha sido probado en algunas simulaciones numéricas, y también ha sido validado experimentalmente en el sistema de tres tanques.

V-A. Simulaciones

Para ilustrar la metodología de diseño de los observadores disipativos y de los que preservan el orden, se considera el siguiente ejemplo académico.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + f(x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad (40)$$

donde $f(x_2) = \frac{1}{1+x_2^2}$.

V-A.1. Diseño del observador disipativo: Para este diseño Π_S , Π_0 , y Π_E son considerados. Las matrices de Π_S , Π_0 , Π_E están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = [1 \ 0 \ 1], \quad H = [0 \ 0 \ 1]$$

con $f(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma^2}$ y $\gamma = 0.6495$. Adicionalmente, la no linealidad $\phi(\sigma, z) = \frac{1}{1+\sigma^2} - \frac{1}{1+(\sigma+z)^2}$ es (Q, S, R) -D = $(-1, 0, 0.6495)$ -D, es decir, $\phi \in [-0.6495, 0.6495]$. Las soluciones del observador disipativo son son:

$$L = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.9 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = 0$$

tal que las restricciones del Teorema 3 son satisfechas. Es importante mencionar que con estas ganancias, el radio de estabilidad con inyección de salida (26) es incrementado, y es mucho mayor, que el radio de estabilidad del sistema en lazo abierto, es decir, $rc = 89$ y $rc_{L=0} = 0.8$.

V-A.2. Diseño del observador cooperativo: Para este diseño Π_S , Π_0 , Ψ_E son considerados. Las matrices A , G , C , H , y las no linealidades $f(\sigma)$ están en el diseño anterior. Para este observador, las soluciones son:

$$L = \begin{bmatrix} -0.6495 \\ -0.9 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad N = 0$$

Entonces las restricciones del Teorema 4 son satisfechas y un observador cooperativo puede ser diseñado. Es posible obtener simultáneamente un par de observadores cooperativos con el mismo diseño: un estimado por encima y otro por debajo de la trayectoria del estado, teniendo una inicialización adecuada. Entonces, $L = L^+ = L^-$, $N = N^+ = N^-$, $\hat{x}_0^+ = (2, 2, 2)$, y $\hat{x}_0^- = (-2, -2, -2)$. El radio de estabilidad (de acuerdo con las ganancias de este observador) es $rc = 30.54$, que es menor que el radio de estabilidad del diseño anterior. Esto se debe, porque el diseño del observador cooperativo es más restrictivo que el disipativo.

La Figura 1 presenta el comportamiento dinámico del sistema Σ_1 , del observador disipativo (od) y de observadores cooperativos (oc). Es claro que el observador disipativo converge más rápido que los observadores cooperativos.

Esto es esperado, ya que el observador cooperativo además de satisfacer la propiedad de disipatividad tiene satisfacer la cooperatividad. En esta Figura se observa que el observador disipativo preserva el orden (gráficamente pero no analíticamente), pero esto no siempre sucede.

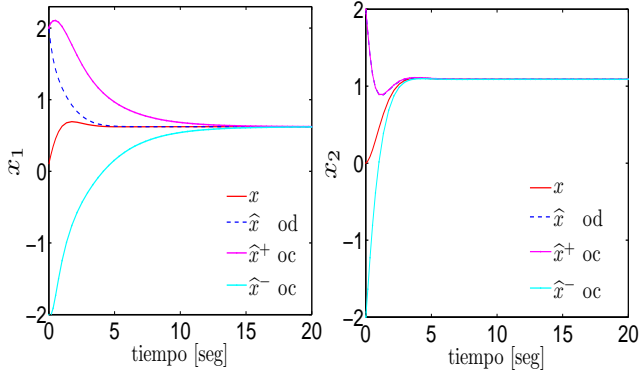


Figura 1. Comportamiento del sistema Σ_1 , del observador disipativo (od) y de los observadores cooperativos (oc).

V-A.3. Diseño del observador intervalo: Para este diseño Ψ_S , Ψ_0 , Ψ_{E^+} y Ψ_{E^-} son considerados. Las matrices A , G , C , H , y la no linealidad $f(\sigma)$ están en el diseño del observador disipativo. Para este observador, las soluciones son las mismas que el diseño del observador cooperativo, es decir, $L = L^+ = L^-$ y $N = N^+ = N^-$. Entonces las restricciones del Teorema 5 son satisfechas y los observadores intervalo se han diseñado.

Adicionalmente, una perturbación constante en el primer canal del sistema Σ_1 es considerada ($\pi(t, x) \in \mathbb{R}^3$; $\pi_2 = 0$, $\pi_3 = 0$ y sólo es tomado en cuenta π_1). También se considera que la perturbación no es mayor que $\pi_1^+ = 1.22$ y menor que $\pi_1^- = 0.82$. Por lo que, se satisface (31).

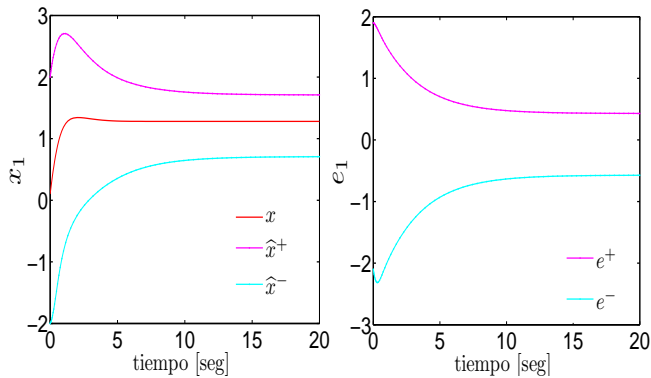


Figura 2. Comportamiento del sistema Σ_1 , del observador disipativo (od) y de los observadores cooperativos (oc).

La Figura 2 muestra el comportamiento del Σ con perturbación y del primer estimado del observador intervalo. Es fácil ver que los estimados del observador intervalo acotan por encima y por debajo a las variables del estado, a pesar de las perturbaciones o incertidumbres en el sistema (π_1).

V-B. Validación experimental

El observador disipativo y los observadores que preservan el orden han sido validados experimentalmente, en el sistema clásico de tres tanques del modelo de Amira DTS200

(see Fig 3) para ilustrar su comportamiento y propiedades. Este sistema puede ser visto como un prototipo de muchas aplicaciones industriales. El estado del sistema está dado por los niveles de los tres tanques $[h_1, h_2, h_3]$

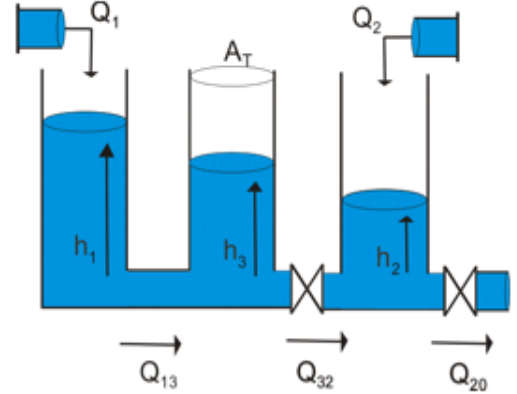


Figura 3. Three-tanks system, where the state is $x = [h_1 \ h_2 \ h_3]$.

V-B.1. Diseño del observador disipativo: Para este diseño Π_S , Π_0 , y Π_E son considerados. $x_{10} = 0.14 \text{ m}$, $x_{20} = 0.04 \text{ m}$ and $x_{30} = 0.09 \text{ m}$ son las condiciones iniciales. Las entradas de los flujos están dadas por $Q_1^0 = 2.4425 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ y $Q_2^0 = 1.9889 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Las áreas de los tanques son $A_T = 0.01539 \text{ m}^2$. Los flujos Q_{32} y Q_{20} son determinados por las válvulas V_1 y V_2 , respectivamente. Estas válvulas están representadas por

$$V1: f(\sigma) \triangleq K_{32} \operatorname{sgn}(\sigma) \sqrt{2g|\sigma|}$$

$$V2: \rho(x_2) \triangleq K_{20} \sqrt{2gx_2}$$

Además, Q_{13} está gobernada por $\rho(x_3 - x_1) = K_{13}(x_1 - x_3)$ con $K_{13} = a_{13}S_n$, $K_{32} = a_{32}S_n$ y $K_{20} = a_{20}S_n$. Entonces, las matrices de Π_S , Π_0 , y Π_E están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-K_{31}}{A_T} & 0 & \frac{K_{31}}{A_T} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{31}}{A_T} & 0 & \frac{-K_{31}}{A_T} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A_T} \\ \frac{1}{A_T} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Además, $u = [Q_1 \ Q_2]^T$ y $\varphi = \frac{1}{A_T} [-\rho(x_2) + Bu]$. Los parámetros de las válvulas están dados en la siguiente tabla:

Parámetros	Valores numéricos
S_n	$5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$
g	9.81 m/s^2
a_{13}	8.5720
a_{20}	0.7026
a_{32}	0.4883
$\frac{1}{A_T}$	64.977 $1/\text{m}^2$

La no linealidad $\phi(\sigma, z) = K_{23}[\operatorname{sgn}(\sigma) \sqrt{2g|\sigma|} - \operatorname{sgn}(\sigma + z) \sqrt{2g|\sigma + z|}]$ es (Q, S, R) -D=

$(-1, 5.05 \times 10^{-5}, -1 \times 10^{-10})$ -D, es decir, $\phi \in [1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-4}]$. Las matrices del observador disipativo son obtenidas por el software de TOMLAB:

$$L = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

así que las restricciones del Teorema 3 son satisfechas y un observador disipativo puede ser diseñado.

V-B.2. Diseño del observador cooperativo: Para este diseño Π_S , Π_0 , Ψ_E son considerados. Las matrices A , G , C , H , y las no linealidades $f(\sigma)$ están en el diseño anterior. Para este observador, las soluciones son:

$$L = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 5 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces las restricciones del Teorema 4 son satisfechas y un observador cooperativo puede ser diseñado. Adicionalmente, es posible obtener simultáneamente un par de observadores cooperativos con el mismo diseño: un estimado por encima y otro por debajo de la trayectoria del estado, teniendo una inicialización adecuada. Entonces, $L = L^+ = L^-$, $N = N^+ = N^-$, $\hat{x}_0^+ = (0.22m, 0.13m, 0.016m)$, y $\hat{x}_0^- = (0.07m, 0.02m, -0.05m)$.

La validación experimental del observador disipativo (od) y de los observadores cooperativos (oc) es presentada en la Figura 4. Es claro ver que el observador disipativo converge más rápido que los observadores cooperativos. Esto es esperado, ya que el observador cooperativo además de satisfacer la propiedad de disipatividad tiene que satisfacer la cooperatividad. Además, en esta Figura se observa que el observador disipativo preserva el orden (gráficamente pero no analíticamente), pero esto no siempre sucede.

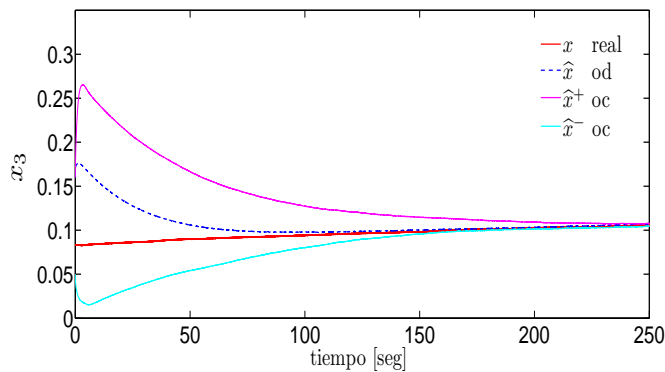


Figura 4. Comportamiento del sistema de tres tanques en x_3 , del observador disipativo (od) y de los observadores cooperativos (oc).

V-B.3. Diseño del observador intervalo: Para este diseño Ψ_S , Ψ_0 , Ψ_{E^+} y Ψ_{E^-} son considerados. Las matrices A , G , C , H , y la no linealidad $f(\sigma)$ están en el diseño del observador disipativo. Para este observador, las soluciones son las mismas que el diseño del observador cooperativo, es decir, $L = L^+ = L^-$ y $N = N^+ = N^-$. Entonces las restricciones del Teorema 5 son satisfechas y los observadores intervalo se han diseñado.

Adicionalmente, una fuga de agua en el tercer tanque es considerada ($\pi(t, x) \in \mathbb{R}^3$; $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ y sólo es

tomado en cuenta π_3). Tal fuga no será más grande que $\pi_3^+ = -0.0005$ y menor que $\pi_3^- = -0.0009$. Por lo que, se satisface (31).

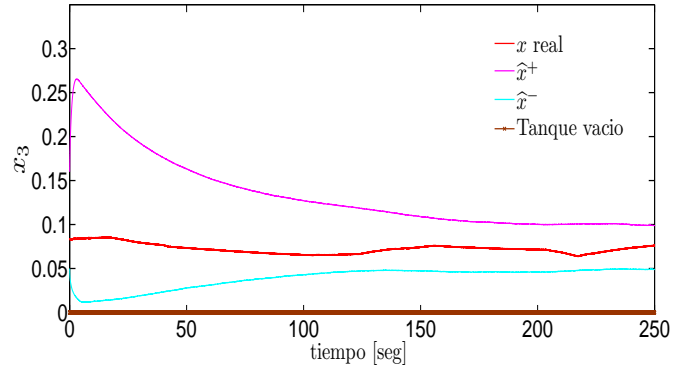


Figura 5. Comportamiento del sistema de tres tanques en x_3 en presencia de una fuga y del observador intervalo

La Figura 5 muestra el comportamiento del observador intervalo que acota por encima y por debajo a x_3 , apesar de la perturbación o incertidumbre de la fuga de agua (π_3). Además, el tercer estimado de Ψ_{O^-} indica cuando el tercer tanque está apunto de vaciarse, antes de que pase realmente. Así que este estimado proporciona una señal de alarma al sistema de control con la finalidad de evitar daños o accidentes en el sistema de tres tanques.

VI. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fu apoyado por UNAM, proyecto PAPIIT IN112207, y por CONACyT, proyecto 51244.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una novedosa metodología de diseño de observadores para una clase de sistemas, en ausencia y presencia de perturbaciones, basada en propiedades sistémicas de disipatividad y cooperatividad. La primera es utilizada para asegurar la convergencia del error de estimación, y la segunda puede ser combinada con la propiedad anterior y aplicada a las dinámicas del error de estimación, para asegurar las propiedades de preservación del orden del observador. Esta metodología de los observadores consiste en simplificar el diseño de los observadores a través de la sustitución de una desigualdad matricial no lineal del método disipativo por un cálculo matemático sencillo del radio de estabilidad de los sistemas positivos.

El diseño de un observador disipativo se reduce la solución del cálculo matemático mencionado y de tres LMI's. Para un observador que preserve el orden se reduce a la solución un observador disipativo combinado con la restricción de una LMI dada por la propiedad de cooperatividad.

REFERENCIAS

- Angeli, D. and Sontag, D. (2003). Monotone Control Systems. *IEEE Transactions Automatic*, Vol. 48, no. 10, pp. 1684-1698.
- Alcaraz-Gonzalez, V. and Harmand, J. and Rapaport, A. and Steyer, J.P. and Gonzalez-Alvarez, V. and Pelayo-Ortiz, C. (2002). Software sensors for highly uncertain WWTPS: a new approach based on interval observers. *Water Res.* no. 36, pp. 2215.
- Avilés, J.D. and Moreno, J.A. (2009). Cooperative observers for nonlinear systems. *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control*
- Bastin, G. and Dochain, D. (1990). On-Line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors. *Elsevier, Amsterdam*.

- Bernard, O. and Gouze, J.L. (2004). Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models. *Journal of Process Control*. Vol. 14 (3), pp. 765-774
- Dochain, D. and Perrier, M. and Ydstie, B.E. (1992). Asymptotic observers for stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.* Vol. 47, pp. 4167.
- Gauthier, J. P., Hammouri, H. and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors, *IEEE Trans. Automatic Control* Vol. 37, pp. 875-880.
- Gauthier, J. P. and Kupka, I. (2001). Deterministic observation theory and applications, *Cambridge University Press. Cambridge, UK*.
- Gouzé, J. L. and Rapaport, A. and Hadj-Sadok, M. Z. (2000). Interval observers for uncertain biological systems, *Ecol Modelling*. Vol. 133, no. 1-2, pp. 45-56.
- Hirsch, M.W. and Smith, H.L. (2005). *Monotone Dynamical Systems*. Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam pp. 239-357, 2005.
- Hinrichsen, D. and Pritchard, A.J. (1986). Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation. *Systems and Control Letters* 8, pp. 105-113.
- Moisan, M. and Bernard, O. and Gouze, J.L (2009). Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. *Automatica* 45, pp. 291-295.
- Moreno, J. A (2004). Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004*.
- Hassan K. Khalil. (2002). *Nonlinear Systems*. New York, USA. Prentice Hall, Third edition, 2002.
- Rapaport, A. and Dochain, D. (2005). Interval observers for biochemical processes with uncertain kinetics and inputs. *Mathematical Biosciences*. no. 1922, pp. 235-253.
- Rapaport, A. and Gouzé, J.L. (2003). Parallelotopic and practical observers for non-linear uncertain systems. *International Journal of Control*. Vol. 76, no. 3, pp. 237-251.
- Son, N. and Hinrichsen, D. (1996). Robust stability of positive continuous time systems. *Systems and Control Letters* 17, pp. 649-659.
- Thau, F.E. (1973). Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int. J. Con.* 17, pp. 471-479.
- Willems, J.C. (1972). Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 45. pp. 321-351.