

# Diseño de Modos Deslizantes Uniformes para Sistemas de Tercer Orden

Emmanuel Cruz-Zavala      Jaime A. Moreno

Coordinación Eléctrica y Computación,  
Instituto de Ingeniería,

Universidad Nacional Autónoma de México,  
04510 México D.F., Mexico

Email: emitacz@yahoo.com.mx, JMorenoP@ii.unam.mx

Leonid M. Fridman

División de Ingeniería Eléctrica,  
Facultad de Ingeniería,

Universidad Nacional Autónoma de México,  
04510 México D.F., Mexico

Email: lfridman@unam.mx

**Resumen**—En este artículo se propone un controlador exacto y uniforme con respecto a las condiciones iniciales para un sistema no lineal de tercer orden asegurando la convergencia exacta y uniforme de las trayectorias a la superficie de deslizamiento. Además, el tiempo de convergencia de las trayectorias a una vecindad del origen puede ser acotado uniformemente por una constante independiente de las condiciones iniciales e incertidumbres/perturbaciones. Para ello, se construye una superficie de deslizamiento no lineal que asegura que la dinámica sobre la superficie sea uniforme también.

**Palabras clave:** Control por modos deslizantes, Funciones de Lyapunov, Convergencia exacta y uniforme.

## I. INTRODUCCIÓN

Diseño tradicional del control por modo deslizante consta básicamente de dos pasos (Utkin, 1992): (a) diseño de la superficie de deslizamiento que asegura el comportamiento deseado del sistema sin incertidumbres/perturbaciones; (b) diseño de un control discontinuo que fuerza el movimiento deslizante y compensa incertidumbres/perturbaciones acopladas. La principal desventaja de esta metodología es un fenómeno conocido como efecto de *chattering*, que restringe posibilidades de usar un control por modos deslizantes de primer orden (MDPO) en la práctica.

El Algoritmo Super-Twisting (AST) propuesto en (Levant, 1993) ha sido empleado para diseñar controladores que atenúan el efecto del *chattering* en sistemas con incertidumbres/perturbaciones Lipschitz continuas. Cabe señalar que en las metodologías para diseñar controladores basados en el AST, el tiempo de convergencia de una trayectoria a la superficie de deslizamiento crece junto con las condiciones iniciales (c.i.), incluso si la trayectoria es iniciada sobre la superficie de deslizamiento. Dando como resultado que el tiempo de convergencia a una vecindad arbitraria del origen crezca junto con las c.i. del sistema.

Además, se ha mostrado que el uso de superficies de deslizamiento no lineal en vez de superficies lineales en el diseño clásico de control por modos deslizante mejora el desempeño deseado en lazo cerrado del sistema, que no siempre se puede lograr sólo con superficies de deslizamiento lineales, (ver (Bartoszewicz y Nowacka-Leverton, 2009),

(Bandyopadhyay, et. al, 2009) y sus referencias).

Recientemente, se han construido observadores y diferenciadores para sistemas (Cruz Zavala et. al, 2010a), (Cruz Zavala et. al, 2010b) basados en modos deslizantes de segundo orden (MDSO), que aseguran convergencia exacta y uniforme de los diferenciadores/observadores, por lo que el tiempo de convergencia del error de estimación puede ser acotado por una constante independiente de las c.i..

En este trabajo se propone un controlador para un sistema de tercer orden que proporciona convergencia de las trayectorias del sistema a cualquier vecindad del origen en un tiempo finito acotado por una constante *independiente de la c.i. en presencia de cierta clase de incertidumbres/perturbaciones*. Para lograr este objetivo: (a) una superficie deslizante no lineal se construye para que durante el modo deslizante la convergencia de las trayectorias a una vecindad arbitraria del origen sea uniforme con respecto a c.i en la superficie, (b) un controlador absolutamente continuo basado en el AST es sugerido para proveer la convergencia de las trayectorias a la superficie de deslizamiento en tiempo finito, el cual esta acotado uniformemente por otra constante independiente de las c.i. en presencia de cierta clase de incertidumbres / perturbaciones.

### I-A. Definiciones Básicas

Considere el siguiente sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(x) + w(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [0, \infty), \quad (1)$$

donde  $x \in R^n$  son los estados, la función  $f : R^n \rightarrow R^n$ ,  $w(x, t) \in \mathcal{W}_{nv}$  es la incertidumbre/perturbación and  $\mathcal{W}_{nv}$  es un conjunto de funciones que no desvanecen en el origen, tanto  $f(\cdot)$  como  $w(\cdot, \cdot)$  aseguran la existencia de soluciones al sistema (1) en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). Se assume que el origen es el punto de equilibrio, que una trayectoria solución  $x_s(t, x_0, t_0)$  del sistema (1) con c.i.  $x(t_0) = x_0$  y  $t_0 \in [0, \infty)$  es uniforme con respecto al tiempo inicial  $t_0$  y que  $B_\mu = \{x : \|x\| < \mu\}$  es una región centrada en el origen de radio  $\mu > 0$ . Se define  $T(x(t_0), \mu)$  como el tiempo de convergencia de las trayectorias estado de (1) de cualquier condición inicial  $x(t_0)$  a la región  $B_\mu$  y suponga que existe  $T_\mu > T(x(t_0), \mu)$ , es decir,  $T(x(t_0), \mu)$

esta *uniformemente acotada con respecto a las c.i.* Además,  $\forall t > T_\mu$ , las trayectorias solución pertenecen a  $B_\mu$ . Cuando  $w(x, t) \equiv 0$ , el sistema es autónomo con condición inicial  $x(0) = x_0$ .

*Definición 1:* Suponga que  $w(x, t) \equiv 0$ . Entonces, el origen de (1) es *asintóticamente uniformemente estable con respecto a c.i.* (AUS) si para cualquier  $\mu$  existe  $T_\mu > 0$  tal que para cualquier  $x_0 \in R^n$ , las trayectoria  $x_s(t, x_0) \in B_\mu$ ,  $\forall t > T_\mu > 0$ .

*Definición 2:* Suponga que  $w(x, t) \neq 0$ . Entonces, el origen de (1) es:

a) *uniformemente exactamente estable con respecto a c.i.*  $(t_0, x_0)$  si para cualquier  $\mu$  y para cualquier perturbación  $w(x, t) \in \mathcal{W}_{nv}$  existe  $T_\mu > 0$  tal que  $\forall x(t_0) \in R^n$ ,  $t_0 \geq 0$ , la trayectoria  $x_s(t, x_0, t_0) \in B_\mu$ ,  $\forall t \geq t_0 + T_\mu$ ;

b) *uniformemente exactamente estable en tiempo finito con respecto a c.i.*  $(t_0, x_0)$  si para cualquier perturbación  $w(x, t) \in \mathcal{W}_{nv}$  existe  $T > 0$  tal que  $\forall x(t_0) \in R^n$ ,  $t_0 \geq 0$ , la trayectoria  $x_s(t, x_0, t_0) \equiv 0$ ,  $\forall t \geq t_0 + T$ .

Tanto  $T_\mu$  como  $T_f$  no dependen de las c.i.  $(t_0, x_0)$ .

## II. SISTEMA NO LINEAL DE TERCER ORDEN

Considere el siguiente sistema no lineal de tercer orden:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = f(x, t) + u + w(x, t), \quad (2)$$

donde  $[x_1, x_2, x_3] \in R^3$  es el vector de estados, la función  $f : R^3 \rightarrow R$  es un mapeo continuo,  $u \in R^1$  es la entrada de control,  $w(x, t) \in \mathcal{W}_0$  es la incertidumbre y/o perturbación en el sistema (6), la cual pertenece al conjunto  $\mathcal{W}_0 = \{w(x, t) : |w(x, t)| \leq \varrho_0, \varrho_0 > 0\}$ . Para el diseño del control por modos deslizantes clásicos, es necesaria la construcción de la superficie de deslizamiento. Después de diseñar la superficie de deslizamiento, la entrada de control debe obtenerse tal que el modo deslizante sea producido en tiempo finito cuando el sistema es iniciado de cualquier c.i. arbitraria. Generalmente, la entrada de control que garantiza el modo deslizante se deriva de la condición de suficiencia  $s\dot{s} < -n|s|$ , asegurándose la existencia del modo deslizante (Utkin, 1992). Con ayuda del diseño por modos deslizantes clásicos y considerando que la incertidumbre/perturbación pertenece a cierto conjunto  $\mathcal{W}_{nv}$ , el objetivo es diseñar:

- una superficie de deslizamiento, tal que, el movimiento de las trayectorias del sistema (6) converjan uniformemente (con respecto a c.i.) a una vecindad del origen cuando  $s = 0$ .
- la ley de control que asegura que las trayectorias entrarán al modo deslizante en *tiempo prescrito*.

## III. DISEÑO DE LA SUPERFICIE DE DESLIZAMIENTO UNIFORME

Primero se debe diseñar la superficie de deslizamiento de tal forma que la dinámica del sistema sea uniforme con respecto a c.i. sobre la superficie deslizante. En forma general, la superficie de deslizamiento tiene la siguiente estructura

$$s = x_3 + s_1(x_1, x_2). \quad (3)$$

El propósito en esta sección es obtener la función  $s_1(x_1, x_2)$ . Para lograrlo, se usará la idea básica del diseño por *backstepping*. Básicamente el diseño se divide en dos partes: diseño de la ley de control virtual y diseño de la ley de control real. Inicialmente se estabilizará el estado  $x_1$  del subsistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad (4)$$

usando  $x_2$  como control virtual. Se propone un ley de control dada por  $x_2 = -k_1\phi_1(x_1)$ , donde  $\phi_1(x_1) = \mu_2x_1 + \mu_3|x_1|^q \text{sign}(x_1)$ , siendo  $q > 1$  un escalar. La ley de control virtual no puede ser implementada directamente, por lo que es mejor definir una variable de error  $s_0 = x_2 + k_1\phi_1(x_1)$ . Reescribiendo el subsistema en las variables  $x_1, s_0$ , se obtiene

$$\dot{x}_1 = -k_1\phi_1(x_1) + s_0, \quad \dot{s}_0 = x_3 + k_1\phi_1'(x_1)x_2,$$

eligiendo  $x_3 = -k_1\phi_1'(x_1)x_2 - k_2\phi_2(x_1)$ , la dinámica del subsistema queda descrita por

$$\dot{x}_1 = -k_1\phi_1(x_1) + s_0, \quad \dot{s}_0 = -k_2\phi_2(x_1), \quad (5)$$

donde  $\phi_2(x_1) = \mu_2^2x_1 + (1+q)\mu_2\mu_3|x_1|^q \text{sign}(x_1) + q\mu_3^2|x_1|^{2q-1} \text{sign}(x_1)$ . Finalmente, definiendo  $x_3 = -k_1\phi_1'(x_1)x_2 - k_2\phi_2(x_1) = -s_1(x_1, x_2)$  como nueva variable de control virtual y  $s = x_3 + s_1(x_1, x_2)$ . El sistema (6) puede ser escrito como

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -s_1(x_1, x_2) + s, \quad \dot{s} = f(x, t) + u + w(x, t) + \frac{ds_1(x_1, x_2)}{dt}, \quad (6)$$

donde  $\frac{ds_1}{dt} = k_1\{\phi_1'(x_1)x_3 + \phi_1''(x_1)x_2^2\} + k_2\phi_2'(x_1)x_2$  y

$$\begin{aligned} \phi_1'(x_1) &= \mu_2 + q\mu_3|x_1|^{q-1}, \\ \phi_1''(x_1) &= q(q-1)\mu_3|x_1|^{q-2} \text{sign}(x_1), \\ \phi_2'(x_1) &= \mu_2^2 + (1+q)q\mu_2\mu_3|x_1|^{q-1} + q(2q-1)\mu_3^2|x_1|^{2q-2}. \end{aligned}$$

La superficie de deslizamiento esta dada por (3), donde  $s_1(x_1, x_2) = k_1\phi_1'(x_1)x_2 + k_2\phi_2(x_1)$ . Cuando  $q = 1$ , la superficie de deslizamiento es lineal. Introduciendo  $(s, x_1, x_2)$  como nuevas variables de estado (donde  $s$  esta definida en (3)) y aplicando la entrada de control

$$u = u_{eq} + v, \quad (7)$$

donde  $u_{eq}x = -k_1\{\phi_1'(x_1)x_3 + \phi_1''(x_1)x_2^2\} - k_2\phi_2'(x_1)x_2 - f(x_1, x_2, x_3) + v$ , el sistema (6) queda descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -s_1(x_1, x_2) + s, \quad \dot{s} = v + w(x, t). \quad (8)$$

Es muy claro notar que la entrada de control  $u$  no será singular si se elige  $q \geq 2$ . El término  $u_{eq}$  compensa la dinámica nominal del sistema, mientras  $v$  es la encargada de lidiar con las incertidumbres/perturbaciones en el sistema. La dinámica del sistema (6), en el modo deslizante (es decir,  $s = 0$ ), es gobernada por la ecuación diferencial

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_1\phi_1'(x_1)x_2 - k_2\phi_2(x_1). \quad (9)$$

La convergencia uniforme del sistema (6) durante el modo deslizante es mostrada en el siguiente teorema.

*Teorema 1:* Para cualquier  $k_1, k_2 > 0$ , el sistema reducido (9) es AUS con respecto a c.i. Además todas las trayectorias del sistema convergen a una vecindad del origen de radio  $\mu > 0$  antes de

$$T_\mu = (2q/\kappa(q-1))\mu^{-\frac{q-1}{2q}}. \quad (10)$$

*Demostración:* Considere el siguiente sistema

$$\dot{x}_1 = -k_1\phi_1(x_1) + x_2, \quad \dot{x}_2 = -k_2\phi_2(x_1), \quad (11)$$

el cual tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable cuando  $k_1, k_2 > 0$ . Definiendo como nuevas coordenadas de estado  $z_1 = x_1$  y  $z_2 = -k_1\phi_1(x_1) + x_2$ , el sistema (11) es transformado a

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -k_1\phi_1'(z_1)z_2 - k_2\phi_2(z_1), \quad (12)$$

el cual tiene la misma estructura del sistema reducido (9). Por lo tanto, la estabilidad del sistema reducido puede ser probada a través del sistema (11). Tomando en cuenta lo anterior, la estabilidad de (11) es demostrada usando la siguiente función de Lyapunov (con  $q > 1$ )

$$V_2 = \frac{k_2\delta|\phi_1(x_1)|^2 - |\phi_1(x_1)|^{\frac{1}{q}} \text{sign}(x_1)|x_2|^{\frac{2q-1}{q}} \text{sign}(x_2)}{+\delta x_2^2}, \quad (13)$$

la cual es positiva definida si y solo si (ver Apéndice A)

$$\delta > (2q-1)^{\frac{2q-1}{2q}} (2qk_2)^{-\frac{1}{2q}}. \quad (14)$$

La derivada con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias (11) satisface (ver Apéndice A)

$$\dot{V}_2 \leq -\kappa V_2^{\frac{3q-1}{2q}}, \quad (15)$$

con  $\kappa = v_{\min} C_3 / (2^{(2q-1)} C_2^{(3q-1)})^{1/2q}$  y  $v_{\min} = q\mu_3^{\frac{1}{q}}$ . Observe que la solución a la ecuación diferencial  $\dot{v} = -\kappa v^{\frac{3q-1}{q}}$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ , para  $q > 1$ , es

$$v(t) = \left( v_0^{-(q-1)/2q} + (q-1)\kappa t/2q \right)^{-2q/(q-1)}.$$

Lo cual se deduce de (15) y del principio de comparación (Khalil, 2002), debido a que  $V_2(x(t)) \leq v(t)$  cuando  $V_{02} = V_2(x(0)) \leq v_0$ . Con lo anterior es posible estimar el tiempo de convergencia que le toma a una trayectoria en ir de  $V_2(x(t)) = v_0$  a  $V_2(x(t)) = \mu$ ,  $\forall v_0 > \mu > 0$  como

$$T_1(v_0, \mu) = \frac{2q}{\kappa(q-1)} \left( \mu^{-\frac{q-1}{2q}} - v_s^{-\frac{q-1}{2q}}(0) \right).$$

El tiempo  $T_1(v_0, \mu)$  puede ser acotado uniformemente acotado por (10), una constante que no depende de las condiciones iniciales, es decir,  $T_1(v_0, \mu) < T_\mu$ . ■

Una vez que se diseña la superficie de deslizamiento en base a los requerimientos de desempeño del sistema, la nueva entrada de control  $v$  se debe diseñar de tal forma que garantice la existencia del modo deslizante. Existen algunas leyes de control basadas en el diseño clásico para forzar el movimiento deslizante (ver por ejemplo (Hung et. al, 1993)). Estas leyes de control son obtenidas a través de un método conocido como *reaching law*, en el cual las funciones discontinuas que aparecen en el control son especificadas a priori y básicamente están basadas en MDPO.

#### IV. CONTROLADOR EXACTO Y UNIFORME DE SEGUNDO ORDEN

El uso de controladores por MDPO producen un fenómeno denominado como efecto de *chattering* o castañeo. Frecuentemente en estos controladores, se usan filtros que permiten el paso de frecuencias bajas para atenuar este efecto que contiene componentes de muy alta frecuencia. Para resolver este problema se han propuesto MDSO (Levant, 2007), que han sido ampliamente utilizados en el diseño de observadores y diferenciadores con convergencia en tiempo finito. Dentro de esta categoría se encuentra el Algoritmo Super-Twisting (AST), que ha sido altamente empleado como un controlador absolutamente continuo ya que solo depende de la superficie de deslizamiento, atenúa el efecto de chattering y sobre todo preserva todas las propiedades de los MDPO para sistemas con incertidumbres/perturbaciones Lipschitz continuas acotadas. Tomando en cuenta todas estas ventajas se introduce un controlador basado el AST generalizado (Moreno, 2010). El controlador exacto y uniforme (CEU) propuesto esta dado por

$$v = -k_1\phi_1(s) - k_2 \int_0^t \phi_2(s) dt \quad (16)$$

donde  $k_1, k_2$  son las ganancias a diseñar y

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \mu_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) + \mu_3 |s|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(s), \\ \phi_2(s) &= \frac{1}{2} \mu_1^2 \text{sign}(s) + 2\mu_1 \mu_3 s + \frac{3}{2} \mu_3^2 |s|^2 \text{sign}(s), \end{aligned}$$

siendo  $\mu_1$  y  $\mu_3$  constantes positivas. El CEU esta basado en el AST clásico. Es muy claro ver que el controlador basado en el AST es recuperado cuando  $\mu_3 = 0$ , y las ganancias  $k_1, k_2 > 0$  son seleccionadas. Para el siguiente análisis, se asume que  $w(x, t)$  puede separarse como

$$w(x_1, x_2, x_3, t) = g_1(x_1, x_2, x_3, t) + g_2(x_1, x_2, x_3, t),$$

para ser más precisos, se considera que  $w \in \mathcal{W}_2$ , donde el clase de incertidumbres/perturbaciones soportadas por la entrada de control  $v$  pertenecen al conjunto  $\mathcal{W}_2 = \{w : |g_1(x, t)| \leq \varrho_1 |\phi_1(s)|, \left| \frac{d}{dt} g_2(x, t) \right| \leq \varrho_2 |\phi_2(s)|\}$ , con constantes conocidas  $\varrho_1, \varrho_2 \geq 0$ . Además, el sistema (8) con el controlador (16) y las perturbaciones  $w \in \mathcal{W}_2$ , es extendido a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -s_1(x_1, x_2) + s, \\ \dot{s} &= -k_1\phi_1(s) + \varsigma + g_1(x_1, x_2, s, t), \\ \dot{\varsigma} &= -k_2\phi_2(s) + \frac{d}{dt} g_2(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (17)$$

*Teorema 2:* La ley de control (7) y  $v$  como en (16), obliga a toda trayectoria de (6) a moverse de cualquier c.i. a la superficie de deslizamiento y permanecer en ella  $\forall w \in \mathcal{W}_2$ . Además, la variedad  $s = 0$  es *uniformemente exactamente estable en tiempo finito con respecto a c.i.*  $(t_0, x_0)$  y es alcanzada antes de

$$T_{stc} = (6/\kappa_3)\mu_{\min}^{-\frac{1}{6}} + (2/\kappa_1)\mu_{\min}^{\frac{1}{2}}, \quad (18)$$

donde  $\kappa_3, \kappa_1$  son constantes positivas que dependen de la selección  $k_1$  y  $k_2$ , y  $\mu_{\min} = (\kappa_1/\kappa_3)^{3/2}$ .

Toda trayectoria alcanzará la superficie de deslizamiento antes de un tiempo que esta acotado uniformemente acotado por una constante.

## V. PRUEBA DEL TEOREMA 2

Considere la siguiente función continua

$$W(s, \varsigma) = V_1(\zeta) + V_2(s, \varsigma), \quad (19)$$

como candidata a función de Lyapunov. La función  $V_1(\zeta) = \zeta^T P \zeta$  es cuadrática en el vector  $\zeta = [\phi_1(s) \ \varsigma]^T$  y  $P = P^T > 0$  es un matriz simétrica positiva definida, la cual es solución a la Desigualdad Matricial Lineal (DML)

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + R + \epsilon I & PB \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

donde  $R = (\theta_1 \varrho_1^2 + \theta_2 \varrho_2^2) C^T C$ ,  $C = [1 \ 0]^T$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$  y  $\epsilon > 0$ . La función  $V_2$  es como en (13) tomando  $(x_1, x_2)$  por  $(s, \varsigma)$  con  $q = 3/2$  y  $\delta$  siendo una constante positiva que satisface

$$\begin{aligned} \delta &> (4/27k_2)^{\frac{1}{3}}, \\ 7\delta k_2(k_1 - \varrho_1) &> 4(3)^{\frac{3}{2}} \varrho_2^{\frac{7}{3}} \delta^{\frac{7}{4}} + (k_1 + \varrho_1)^{\frac{7}{3}} + 4(k_2 + \varrho_2)^{\frac{7}{6}}, \end{aligned} \quad (22)$$

El siguiente resultado muestra que el subsistema  $(s, \zeta)$  de (17) es robusto contra incertidumbres/perturbaciones  $w \in \mathcal{W}_2$ , cuando las ganancias  $(k_1, k_2)$  y  $\delta$  son elegidas apropiadamente.

*Proposición 1:* La función (19) es una *función estricta y robusta de Lyapunov* para el subsistema  $(s, \varsigma)$  de (17). Más aún, la derivada  $\dot{W}$  de la función de Lyapunov tomada a lo largo de las trayectorias del subsistema satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{W}(s, \varsigma) \leq -\kappa_1 W^{\frac{1}{2}}(s, \varsigma) - \kappa_3 W^{\frac{7}{6}}(s, \varsigma), \quad (23)$$

donde  $\kappa_1 = \mu_1^2 \epsilon / 2(\lambda_{\max}\{P\} + C_2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\kappa_3 = (1/2)^{\frac{1}{4}} v_{\min} C_3 / (\lambda_{\max}\{P\} + C_2)^{\frac{7}{6}}$ , constantes positivas que dependen de las ganancias  $k_1, k_2$  y  $\delta$ .

*Demostración:* Como  $w \in \mathcal{W}_2$ , la derivada de  $V_2$  satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -|\phi_1(s)|^{-\frac{1}{3}} \phi_1'(s) \{2\delta k_2(k_1 - g_1)|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} \\ &\quad - 2g_2\delta|\phi_1(s)|^{\frac{4}{3}}\varsigma - \frac{2}{3}(k_1 + g_1)\phi_1(s)|\varsigma|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(\varsigma) \\ &\quad - \frac{4}{3}(k_2 + g_2)|\phi_1(s)|^2|\varsigma|^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}|\varsigma|^{\frac{7}{3}}\}. \end{aligned}$$

Usando siguientes desigualdades derivadas del Lema (1)

$$\begin{aligned} |\phi_1(s)|^{\frac{4}{3}}|\varsigma| &\leq 4\gamma_1^{\frac{7}{3}}|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}}/7 + 3\gamma_1^{-\frac{7}{3}}|\varsigma|^{\frac{7}{3}}/7, \forall \gamma_1 > 0, \\ |\phi_1(s)||\varsigma|^{\frac{4}{3}} &\leq 3\gamma_2^{\frac{7}{3}}|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}}/7 + 4\gamma_2^{-\frac{7}{3}}|\varsigma|^{\frac{7}{3}}/7, \forall \gamma_2 = \tilde{k}_1^{\frac{4}{3}} > 0, \\ |\phi_1(s)|^2|\varsigma|^{\frac{1}{3}} &\leq 6\gamma_3^{\frac{7}{3}}|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}}/7 + \gamma_3^{-7}|\varsigma|^{\frac{7}{3}}/7, \forall \gamma_3 = \tilde{k}_2^{\frac{1}{3}} > 0, \end{aligned}$$

con  $\tilde{k}_1 = (k_1 + \varrho_1)$ ,  $\tilde{k}_2 = (k_2 + \varrho_2)$ , se obtiene

$$\dot{V}_2(s, \varsigma) \leq -v_1(s) \left( \psi_1|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} + \psi_2|\varsigma|^{\frac{7}{3}} \right)$$

donde  $v_1(s) = |\phi_1(s)|^{-\frac{1}{3}} \phi_1'(s)$ ,  $\psi_1 = 2(\Upsilon_1 - 4\varrho_2\delta\gamma_1^{\frac{7}{3}}/7)$ ,  $\psi_2 = 2(1 - 9\varrho_2\delta\gamma_1^{-\frac{7}{3}})/21$ ,  $\Upsilon_1 = \delta k_2(k_1 - \varrho_1) - (k_1 + \varrho_1)^{\frac{7}{3}}/7 - 4(k_2 + \varrho_2)^{\frac{7}{6}}/7$  y  $\gamma_1$  siempre existe si y solo si satisface  $(7\Upsilon_1/8\varrho_2\delta)^{\frac{4}{7}} > \gamma_1 > (9\varrho_2\delta)^{\frac{3}{7}}$ . Para que  $\dot{V}_2$  sea negativa definida, se requiere que  $\psi_1, \psi_2 > 0$ , lo cual siempre posible si (22) se satisfacen. Note que  $\forall s \in \mathcal{R}$ , la función  $v_1(s) > 0$  tiene un mínimo y es  $v_{\min} = 3\mu_1^{\frac{2}{3}}/2$  (ver Apéndice A). Entonces,

$$\dot{V}_2(s, \varsigma) \leq -v_{\min} C_3 \left( |\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} + |\varsigma|^{\frac{7}{3}} \right)$$

donde  $C_3 = 2(1 - 9\varrho_2\delta/y_m)/21$  and  $y_m = \gamma_1^{\frac{7}{3}}$  es la raíz real positiva de  $3\varrho_2\delta + 7(\Upsilon_1 - 1/21)y_m = 4\varrho_2\delta y_m^{\frac{7}{3}}$ . Además, se satisface  $(1/2)^{\frac{1}{4}} (|\phi_1(s)|^2 + |\varsigma|^2)^{\frac{7}{6}} \leq (|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} + |\varsigma|^{\frac{7}{3}})$  (ver Apéndice A). Finalmente, con esta desigualdad y usando (25), se concluye que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -(1/2)^{\frac{1}{4}} v_{\min} C_3 (|\phi_1(s)|^2 + |\varsigma|^2)^{\frac{7}{6}} \\ &\leq -(1/2)^{\frac{1}{4}} v_{\min} C_3 (\|\zeta\|_2)^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, con ayuda del vector  $\zeta$ , el subsistema  $(s, \zeta)$  puede escribirse como

$$\dot{\zeta} = \phi_1'(s) (A\zeta + B\tilde{\rho}),$$

con  $A$  y  $B$  definidas en (21) y  $\tilde{\rho}^T x(t, \zeta) = [g_1(x_1, s, t) \ \frac{d}{dt}g_2(x_1, t)/\phi_1'(s)]_{s=\phi^{-1}(\zeta)}$ . Para tomar en cuenta una gran variedad de incertidumbres/perturbaciones, se asume que las componentes del término  $\tilde{\rho}(t, \zeta)$  satisfacen la condición de sector (para  $i = 1, 2, \forall t \geq 0$  y  $\forall \zeta \in \mathcal{R}^2$ )

$$\omega_i(\tilde{\rho}_i, \zeta) = -\tilde{\rho}_i^2(t, \zeta) + \varrho_i^2 \zeta_i^2 = \varpi_i^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \varpi_i \geq 0$$

donde  $\varpi_i^T = [\tilde{\rho}_i \ \zeta_i]^T$ ,  $R_i = \varrho_i^2 C^T C$  y  $C$  es como en (21). Con lo anterior, se deduce que cualquier incertidumbre/perturbación  $w \in \mathcal{W}_2$  tiene una representación en condición de sector en las coordenadas  $\zeta$ , es decir, que en coordenadas originales,  $|\tilde{\rho}_i(t, \zeta)| \leq \varrho_i |\phi_i|$ , es equivalente a  $|\tilde{\rho}_i(t, \zeta)| \leq \varrho_i |\zeta_i|$ , con  $\varrho_i > 0$ , en las coordenada  $\zeta$ . Entonces,  $\omega(\tilde{\rho}, \zeta) = \theta_1 \omega_1(\tilde{\rho}_1, \zeta) + \theta_2 \omega_2(\tilde{\rho}_2, \zeta) \geq 0, \forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$ , o form cuadrática

$$\omega(\tilde{\rho}, \zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}(t, \zeta) \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Theta & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}(t, \zeta) \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad (24)$$

con  $\Theta$  y  $R$  como en (21). Finalmente,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} \\ &\leq \phi_1' \left\{ \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} + \omega(\tilde{\rho}, \zeta) \right\} \\ &= \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + R & PB \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para que  $\dot{V}_1 \leq -\phi_1' \epsilon \|\zeta\|_2^2$ , se requiere la solubilidad de la DML (20). Aplicando la siguiente desigualdad,  $\lambda_{\min}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta\|_2^2$ , donde  $\|\zeta\|_2^2 = \phi_1^2(s) + \varsigma^2 = \mu_1^2 |s| + 2\mu_1 \mu_3 |s|^2 + \mu_3^2 |s|^3 + \varsigma_2^2$  es la norma

Euclídeana de  $\zeta$ , se obtiene que  $(\mu_1 |s|^{\frac{1}{2}})^{-1} \leq (\|\zeta\|_2)^{-1}$ . Como  $\phi'_1 = \frac{\mu_1}{2|s|^{\frac{1}{2}}} + \frac{3\mu_3}{2}|s|^{\frac{1}{2}}$ , inmediatamente se tiene que

$$\dot{V}_1 \leq -\phi'_1(s) \epsilon \|\zeta\|_2^2 \leq -\frac{1}{2}\mu_1^2 \epsilon \|\zeta\|_2 - \frac{3}{2}\mu_3 \epsilon |s|^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_2^2.$$

Gracias a que  $\dot{V}_1(\zeta)$  y  $\dot{V}_2(s, \zeta)$  son negativas definidas,

$$\dot{W}(s, \zeta) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq -\mu_1^2 \frac{1}{2} \epsilon \|\zeta\|_2^{\frac{1}{2}} - (1/2)^{\frac{1}{4}} v_{\min} C_3 (\|\zeta\|_2)^{\frac{7}{3}}.$$

Además como cada función satisface  $\lambda_{\min}\{P\}\|\zeta\|_2^2 \leq V_1(\zeta) \leq \lambda_{\max}\{P\}\|\zeta\|_2^2$  y  $C_1\|\zeta\|_2^2 \leq V_2(s, \zeta) \leq C_2\|\zeta\|_2^2$ , la función  $W(s, \zeta)$  puede ser acotada por arriba como  $W(s, \zeta) \leq (\lambda_{\max}\{P\} + C_2)\|\zeta\|_2^2$ , lo cual permite obtener (23). ■

Es claro, que las trayectorias convergen en tiempo finito a  $s = 0$ . De la Proposición 1 es fácil estimar el tiempo de convergencia. Desde que,  $W$  satisface tanto  $\dot{W}(s, \zeta) \leq -\kappa_1 W^{\frac{1}{2}}(s, \zeta)$  como  $\dot{W}(s, \zeta) \leq -\kappa_3 W^{\frac{7}{6}}(s, \zeta)$ , el valor de  $W$  esta por debajo de la solución de ambas desigualdades. Entonces,

$$W(t) \leq \min \left\{ \left( W_0^{\frac{1}{2}} - \kappa_1 t/2 \right)^2, \left( W_0^{-\frac{1}{6}} + \kappa_3 t/6 \right)^{-6} \right\},$$

con  $W_0 = W(s(x_0), \zeta(x_0))$ . Para estimar el tiempo de convergencia, primero, se calcula el tiempo que tarda una trayectoria iniciada en la c.i.  $x_0$  en un nivel de energía  $W_0$  en llegar al conjunto de nivel  $W(s, \zeta) = \mu_{ss}$  (para alguna  $0 < \mu_{ss} < W_0$ ). Después, se calcula el tiempo que tarda la trayectoria en llegar al punto ( $s=0$ ) cuando esta inicio en el conjunto de nivel  $W = \mu_{ss}$ . El tiempo total que tarda la trayectoria iniciada en  $x_0$  al punto  $s = 0$  se estima como

$$T(x_0, \mu_{ss}) = \frac{6}{\kappa_3} \left( \mu_{ss}^{-\frac{1}{6}} - W_0^{-\frac{1}{6}} \right) + \frac{2}{\kappa_1} \mu_{ss}^{\frac{1}{2}}.$$

El tiempo de convergencia  $T(x_0, \mu_{ss})$  esta uniformemente acotado por arriba por (18). La expresión (18) alcanza un mínimo en  $\mu_{\min} = (\kappa_1/\kappa_3)^{3/2}$ , por lo que la mejor estimación del tiempo de convergencia esta dada por (18).

## VI. EJEMPLO ACADEMICO

Considere el siguiente modelo en el espacio de estados

$$\dot{x} = Ax + b(u + w(t)), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$w(t) = 0,5 \sin(2t) + 0,1 \cos(5t) + \int_0^t z dt$ , donde  $z = x_2 + x_1 + |x_1|^{\frac{3}{2}}$ , sin pérdida de generalidad se consideran todos los estados medibles. Para simulaciones,  $\mu_1, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0,5$ , y se asume que el termino de perturbación  $w(t)$  es acotado como

$$|g_1(x_1, s, t)| \leq \varrho_1 |\phi_1(s)|, \quad \left| \frac{d}{dt} g_2(x_1, t) \right| \leq \varrho_2 |\phi_2(s)|,$$

donde  $\varrho_1 = 0, \varrho_2 \geq 2$ . Cuando  $\varrho_1 = 0$ , las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  se eligen dentro del conjunto  $\kappa = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 | k_2 > \varrho_2, k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \varrho_2^2\}$ , (Moreno, 2010). Para la simulación se han elegido  $k_1^2 = 2k_2, k_2 = 8, x(0) = [2,5 \ 5]$  y

el tiempo de muestreo constante  $\tau = 0,0005$ . La Fig. 1 muestra una comparación del controlador (16) propuesto en este trabajo con el controlador Super-Twisting clásico (CSTC). El CCST solo admite Lipschitz continuas acotadas por lo que no puede compensar perturbaciones que crecen en función de los estados. El CEU si puede compensar cierta clase de perturbaciones crecientes y además, brinda convergencia exacta de los estados. Finalmente, como se muestra en la Fig. 2, el tiempo de convergencia de las trayectorias a la superficie aplicando el CEU esta uniformemente acotado por una constante. Los pasos para estimar del tiempo de convergencia son: 1) Hallar  $P = P^T > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que la LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + R + \epsilon I & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} < 0$$

se satisfaga con

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo numéricamente (usando *Matlab LMI Toolbox*) la LMI,

$$P = \begin{bmatrix} 2,8042 & -0,5250 \\ -0,5250 & 0,5923 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 0,5697,$$

$\lambda_{\min}\{P\} = 0,4741, \lambda_{\max}\{P\} = 2,9225$ .

2) Calcular las constantes  $C_2, C_3$ . Tomando  $\delta = k_1^{\frac{4}{3}} = (4)^{\frac{4}{3}}, \gamma_M = (11,5549)^{\frac{2}{3}} = 5,1111, C_2 = 95,3021$ . Y considerando  $\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{4}, C_3 = 0,3869$ . La cota del tiempo de convergencia es  $T_{max} = 201,6238$ .

## VII. CONCLUSIONES

Se ha propuesto una superficie de deslizamiento no lineal que presenta la propiedad de convergencia uniforme, cuando las trayectorias del sistema estan sobre la superficie, convergen a una vecindad del origen en un tiempo finito independiente de las c.i.. El CEU es absolutamente continuo y brinda convergencia exacta y uniforme de las trayectorias a la superficie de deslizamiento para cierta clase de incertidumbres/perturbaciones. La superficie de deslizamiento y

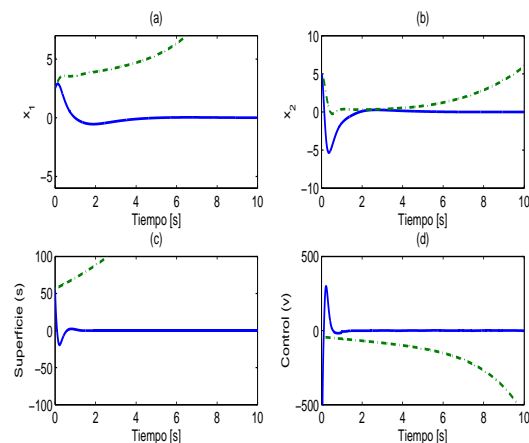


Figura 1. CEU (azul), CCST(verde) .

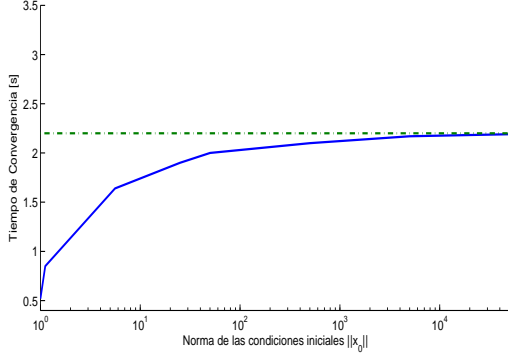


Figura 2. Tiempo de convergencia a  $s = 0$ .

el controlador garantizan *convergencia exacta y uniforme* de todas las trayectorias del sistema.

### VIII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero del CONACyT, grant 56819 y 51244, Project 132125 y CVU 267513; PAPIIT-UNAM, grant 17211 y IN117610, y FONCICYT project 93302.

### REFERENCIAS

- Bandyopadhyay, B., Deepak, F. & Kim, K.S. (2009) Sliding Mode Control Using Novel Sliding Surfaces, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 392, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 136 p.
- Bartoszewicz, A. & Nowacka-Leverton, A. (2009) Time-Varying Sliding-Modes for Second and Third Order Systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 382, Springer, Heidelberg, 200 p.
- Cruz Zavala, E., Moreno, J.A. & Fridman, (2010a) Uniform Second-Order Sliding Mode Observer for Mechanical Systems, *11th International Workshop on Variable Structure Systems*, Mexico City, 14-19.
- Cruz Zavala, E., Moreno, J.A. & Fridman, L.(2010b) Uniform Robust Exact Differentiator, *49th IEEE Conference on Decision and Control*, 102 – 107 .
- Davila, A.,Moreno, J.A. & Fridman, L. (2010) Variable Gains Super-Twisting Algorithm: A Lyapunov Based Design, *American Control Conference, ACC2010* ,968 – 973.
- Filippov, A.F. (1988). Differential equations with discontinuous righthand side. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands. 304 p.
- Hardy, G.H.; Littlewood, J.E.; P'olya, G. Inequalities. London, Cambridge University Press, 1951.
- Hung, J.Y., Gao,W. & Hung, J.C. (1993) Variable structure control: A survey, *IEEE Transaction on Ind. Electronics*, **40** (1), 2–22.
- Khalil, H.K. (2002). Nonlinear Systems. Third ed. Prentice–Hall. Upsaddle River, New Jersey.750 p.
- Levant, A.(1993) Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control Technique. *International Journal of Control*, 58(6), 1993, 1247-1263.
- Levant, A. (2007) Construction Principles of 2-sliding mode design, *Automatica*, (43), 576–586.
- Moreno, J.A., (2009) A Linear Framework for the Robust Stability Analysis of a Generalized Super-Twisting Algorithm. *6th International Conference on Electrical Engineering*. CCE 2009, pp.12-17.
- Moreno, J.A. (2010) Lyapunov Approach for Analysis and Design of Second Order Sliding Mode Algorithms, *11th International Workshop on Variable Structure Systems*, 121–149.
- Utkin, V.I. (1992) Sliding Modes in Control and Optimization , Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

### APÉNDICE A

*Lema 1:* (Moreno, 2010) Para cada número real  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $p > 1$ ,  $q > 1$ , con  $1/p + 1/q = 1$  la siguiente desigualdad se satisface  $ab \leq c^p a^p/p + c^{-q} b^q/q$ .

Hay que mostrar que  $V_2(s, \varsigma)$  es positiva definida. Del Lema 1, definiendo  $\gamma_{00}$  y  $\gamma_{01}$  como constantes positivas que satisfacen  $|\phi_1(x_1)|^{1/q} |x_2|^{2q-1} \leq \frac{\gamma_{0i}^{2q}}{2q} |\phi_1(x_1)|^2 + ((2q-1)/2q)\gamma_{0i}^{-2q/(2q-1)} |x_2|^2$ ,  $\forall \gamma_{0i} > 0$ ,  $i = 0, 1$ , la función  $V_2$  puede ser acotada por

$$\alpha_1(\gamma_{00})|\phi_1(x_1)|^2 + \alpha_2(\gamma_{00})|x_2|^2 \leq V_2(x_1, x_2) \leq \alpha_2(\gamma_{01})|\phi_1(x_1)|^2 + \alpha_4(\gamma_{01})|x_2|^2,$$

donde  $\alpha_1(\gamma_{00}) = (\delta k_2 - \gamma_{00}^{2q}/2q)$ ,  $\alpha_2(\gamma_{00}) = (\delta - (2q-1)\gamma_{00}^{-2q/2q-1}/2q)$ ,  $\alpha_3(\gamma_{01}) = (\delta k_2 + \gamma_{01}^{2q}/2q)$  y  $\alpha_4(\gamma_{01}) = (\delta + (2q-1)\gamma_{01}^{-2q/(2q-1)}/2q)$ . Además,  $V_2(s, \varsigma)$  es positiva definida si y solo si  $\alpha_1(\gamma_{00}) > 0$  and  $\alpha_2(\gamma_{00}) > 0$ , lo cual es posible si  $\delta$  satisface (14). Más aun,

$$C_1 \|\zeta\|_2^2 = C_1 (|\phi_1(x_1)|^2 + |x_2|^2) \leq V_2(x_1, x_2) \leq C_2 (|\phi_1(x_1)|^2 + |x_2|^2) = C_2 \|\zeta\|_2^2, \quad (25)$$

donde  $C_1 = (\delta k_2 - \gamma_m^{2q}/2q)$  y  $C_2 = (\delta k_2 + \gamma_M^{2q}/2q)$  son constantes positivas, y  $y = \gamma_m^{2q/(2q-1)}$  es la raíz real positiva de  $(2q-1)/2q + \delta(k_2-1)y = y^{2q}/2q$ , y  $y = \gamma_M^{2q/(2q-1)}$  es la raíz positiva de  $(2q-1)/2q + \delta(1-k_2)y = y^{2q}/2q$ . La derivada de  $V_2$  con respecto al tiempo a lo largo de las trayectorias de (11) satisface

$$\dot{V}_2 \leq -v_1(x_1) \left( |\psi_1 \phi_1(x_1)|^{\frac{3q-1}{q}} + \psi_2 |x_2|^{\frac{3q-1}{q}} \right),$$

donde  $v_1(x_1) = |\phi_1(x_1)|^{(1-q)/q} \phi_1'(x_1)$ ,  $\psi_1 = 2\delta k_2 k_1 - n_0 k_1^{(2q-1)/q} + 2n_1 k_2^{(q-1)/2q}$ ,  $\psi_2 = [1 - (1/c_2 + 1/c_3)]/q$ ,  $n_0 = [c_2(2q-1)/(3q-1)]^{\frac{2q-1}{q}}/(3q-1)$ ,

$$n_1 = (2q-1)[c_3(2q-1)/(3q-1)(q-1)]^{\frac{q-1}{2q}}/(3q-1)$$

y  $c_2 c_3 > c_2 + c_3$ . Note que  $v_1(x_1) > 0$  y  $\forall x_1$ ,  $\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} v(x_1) = q\mu_3^{1/q} = v_{\min}$  y  $\lim_{|x_1| \rightarrow 0} v(x_1) = \infty$ .  $\dot{V}_2 < 0$  si  $\psi_1 > 0$  y  $\psi_2 > 0$ . Definiendo  $C_3 = \min\{\psi_1, \psi_2\}$ , se llega a  $\dot{V}_2(x_1, x_2) \leq -v_{\min} C_3 (|\phi_1(x_1)|^{\frac{3q-1}{q}} + |x_2|^{\frac{3q-1}{q}})$  Usando la siguiente desigualdad (ver (Hardy y Littlewood, 1951))

$$(\alpha|x_1|^s + (1-\alpha)|x_2|^s)^{\frac{1}{s}} \leq (\alpha|x_1|^r + (1-\alpha)|x_2|^r)^{\frac{1}{r}}, \quad (26)$$

$0 \leq \alpha \leq 1 \forall x \in R^2$ ,  $s < r$ , se obtiene que

$$(1/2)^{\frac{q-1}{2(3q-1)}} (|\phi_1(x_1)|^2 + |x_2|^2)^{\frac{3q-1}{2q}} \leq (|\phi_1(x_1)|^{\frac{3q-1}{q}} + |x_2|^{\frac{3q-1}{q}})^{\frac{q}{3q-1}},$$

substituyendo lo anterior en  $\dot{V}_2$ ,

$$\dot{V}_2(x_1, x_2) \leq -(1/2)^{\frac{q-1}{2q}} v_{\min} C_3 (|\phi_1(x_1)|^2 + |x_2|^2)^{\frac{3q-1}{2q}} \leq -(1/2)^{\frac{q-1}{2q}} v_{\min} C_3 (\|\zeta\|_2)^{\frac{3q-1}{q}}$$

Finalmente, utilizando la expresión (25), se concluye que la derivada es negativa definida y satisface (15).