

# Análisis de patinado en el apoyo de un robot bípedo de 5-gdl

J. A. Vázquez y M. Velasco-Villa  
CINVESTAV-IPN, Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Sección de Mecatrónica, A.P. 14-740, 07000, México D.F., México.  
Email: {javazquez,velasco}@cinvestav.mx

**Resumen**—En los análisis de los problemas de locomoción bípeda es común considerar hipótesis específicas para evaluar una estrategia de control particular. Una de ellas es la condición de no patinado, que implica que los puntos o superficies de contacto con el suelo no poseen una velocidad tangencial relativa. Aunque en situaciones prácticas esta dinámica puede ser despreciable, el patinado depende de las características de fricción en el punto de contacto. Este trabajo se enfoca en el análisis de la dinámica de patinado del punto de soporte de un robot bípedo con contacto puntual con el suelo. Se desarrollan algunas expresiones analíticas para determinar las condiciones del fenómeno de patinado al considerar un grado de libertad adicional en el extremo de la pata de apoyo.

## I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de locomoción bípeda han sido estudiados desde diferentes perspectivas, existen trabajos que se enfocan fundamentalmente en el modelado de robots bípedos; en la generación de trayectorias de referencia para el ciclo de marcha o en técnicas de estabilidad basadas en enfoques como Lyapunov o Poincaré; así mismo, se considera el problema de diseños mecánicos para lograr ciertas características de movilidad. Por ejemplo, en (Grizzle et al., 2001), (Plestan et al., 2003), (Morris and Grizzle, 2005) el sistema se modela considerando los efectos de los impulsos en el impacto de fin de paso y se prueba la estabilidad del lazo cerrado vía mapas de Poincaré; en (Miura and Shimoyama, 1984) el modelo de un robot bípedo se desarrolla en dos planos y se obtiene una retroalimentación bajo la aproximación de un péndulo invertido. La estabilidad mediante técnicas de Lyapunov es evaluada en (Chemori and Loria, 2002) considerando el ciclo de marcha en fase de simple soporte, donde el doble soporte representa una perturbación externa. Algunas técnicas para lograr estabilidad consideran estrategias de contacto superficial como el punto de momento cero (ZMP) o el centro de presión (CoP) como en (Goswami, 1999), (Sardain and Bessonnet, 2004), (Djoudi and Chevallereau, 2005).

También es común la consideración de hipótesis que permitan simplificar un análisis particular. En general, estas aproximaciones son válidas bajo la consideración de ambientes de trabajo específicos y toman en cuenta aspectos que van desde características de un mecanismo hasta aspectos referentes a la dinámica de un sistema. Una hipótesis común considera una interacción con la superficie de tal manera que no existe velocidad relativa entre el robot y el punto de contacto, tanto en la dirección tangencial como en la normal. Sin embargo, existen trabajos que involucran

estos fenómenos en términos más realistas. En (Silva and Machado, 2004) el contacto de una pata con la superficie es modelado como un sistema no lineal tipo masa-resorte en ambas direcciones, produciendo una dinámica interna que considera una velocidad relativa. En (Kajita et al., 2004) el contacto superficial con el suelo en el ciclo de marcha de un robot bípedo se analiza bajo un ambiente de baja fricción.

Una forma diferente de considerar la dinámica tangencial en el punto de contacto de la pata de soporte, consiste en la incorporación de un grado de libertad adicional que permite este tipo de movimiento, este enfoque es considerado en este trabajo. La velocidad tangencial se caracteriza en términos de un modelo de fricción y consecuentemente de la velocidad de referencia considerada para lograr un ciclo de marcha específico.

El resto del trabajo se organiza como sigue: en la Sección II se describe el modelo dinámico del robot bípedo así como las principales hipótesis consideradas. La incorporación de un modelo de fricción se presenta en la Sección III, donde se analiza la dinámica resultante mediante la solución de un par de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica transitoria y estacionaria del sistema en lazo cerrado. Se considera también en esta sección la fase instantánea de doble soporte cuando se asume un patinado nulo del punto de impacto al final del paso y cuando existe un eventual patinado del mismo punto. En ambos casos, la dinámica resultante se evalúa como condición inicial para el siguiente paso. Los resultados son mostrados a través de simulaciones numéricas en la Sección IV y finalmente se presentan algunas conclusiones generales en la Sección V.

## II. CLASE DE ROBOT BÍPEDO SUB ACTUADO

El robot bípedo analizado en este trabajo consiste en cuatro eslabones conectados por el mismo número de uniones articulares. Se considera además, un grado de libertad adicional prismático y no actuado en el punto de contacto de la pata apoyo caracterizando así un sistema subactuado. Como consideraciones preliminares, se tiene que: *i*) el robot evoluciona en la fase de simple soporte, el doble soporte es instantáneo y puede ser tratado como una perturbación externa; *ii*) en el impacto, las fuerzas actuantes se asumen impulsivas y determinan la condición de patinado del punto de impacto; *iii*) la dinámica del robot se define en el plano sagital con contacto puntual con el suelo; *iv*) no existe rebote ni penetración en el suelo en la dirección normal, sólo se consideran una dinámica tangencial.

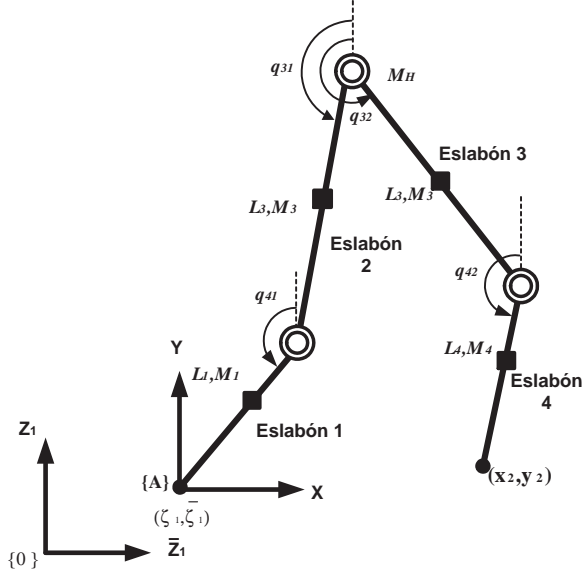


Figura 1: Descripción general del robot bípodo

El modelo dinámico se obtiene mediante la formulación de Euler-Lagrange (Spong and Vidyasagar, 1989), resultando la representación,

$$D_e(q_e)\ddot{q}_e + C_e(q_e, \dot{q}_e)\dot{q}_e + G_e(q) = B_e\tau + \delta F_{ext}, \quad (1)$$

donde  $q_e = [q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, \zeta_1, \bar{\zeta}_1]^T$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $D_e(q_e), C_e(q_e, \dot{q}_e) \in R^{6 \times 6}$  son la matriz de Inercia y de Coriolis respectivamente, mientras que  $G_e \in R^{6 \times 6}$  es el vector de gravedad.  $B_e \in R^{6 \times 6}$  es la matriz de entrada y  $\delta F_{ext}$  representa las fuerzas externas.

La Figura 1 describe la configuración del robot. Llevando al robot al suelo, esto es, haciendo  $\bar{\zeta}_1 = 0$  es posible reducir el modelo (1) para obtener la dinámica de simple soporte como,

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B\tau + F_{ext}, \quad (2)$$

donde,  $q = [q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, \zeta_1]^T$  y  $F_{ext}$  representa la fuerza debida a la fricción en el punto de contacto de la pata de apoyo. Las matrices involucradas en (2) están dadas como,

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 c_{q_1} & k_1 c_{q_2} & k_2 c_{q_3} & b_1 c_{q_{31}} \\ a_2 c_{q_1} & k_3 & a_3 c_{q_4} & k_5 c_{q_5} & b_2 c_{q_{32}} \\ k_1 c_{q_2} & a_3 c_{q_4} & k_4 & -k_6 c_{q_6} & b_3 c_{q_{41}} \\ k_2 c_{q_3} & k_5 c_{q_5} & -k_6 c_{q_6} & \frac{k_6}{2} & b_4 c_{q_{42}} \\ b_1 c_{q_{31}} & b_2 c_{q_{32}} & b_3 c_{q_{41}} & b_4 c_{q_{42}} & M_T \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 s_{q_1} \dot{q}_{32} & -k_1 s_{q_2} \dot{q}_{41} & -k_2 s_{q_3} \dot{q}_{42} & 0 \\ a_2 s_{q_1} \dot{q}_{31} & 0 & -a_3 s_{q_4} \dot{q}_{41} & -k_5 s_{q_5} \dot{q}_{42} & 0 \\ k_1 s_{q_2} \dot{q}_{31} & a_3 s_{q_4} \dot{q}_{32} & 0 & k_6 s_{q_6} \dot{q}_{42} & 0 \\ k_2 s_{q_3} \dot{q}_{31} & k_5 s_{q_5} \dot{q}_{32} & -k_6 s_{q_6} \dot{q}_{41} & 0 & 0 \\ -b_1 s_{q_{31}} \dot{q}_{31} & -b_2 s_{q_{32}} \dot{q}_{32} & -b_3 s_{q_{41}} \dot{q}_{41} & -b_4 s_{q_{42}} \dot{q}_{42} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 s_{q_{31}} \\ g_2 s_{q_{32}} \\ g_3 s_{q_{41}} \\ g_4 s_{q_{42}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{f}_{ext} \end{bmatrix}$$

donde,

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{32} - q_{31}, & q_2 &= q_{41} - q_{31}, & q_3 &= q_{42} - q_{31} \\ q_4 &= q_{41} - q_{32}, & q_5 &= q_{42} - q_{32}, & q_6 &= q_{42} - q_{41}, \end{aligned} \quad (3)$$

y  $M_T = 2M_H + 2M_3 + 2M_4$ ,  $c(\cdot) = \cos(\cdot)$  y  $s(\cdot) = \sin(\cdot)$  para ciertas constantes  $b_i, k_i$  y  $a_i \in R$ . Considerando las coordenadas actuadas  $q_A = [q_{31}, q_{32}, q_{32}, q_{42}]$  y las no actuadas  $q_{NA} = \zeta_1$ , el sistema (2) se reescribe como,

$$D_{11}\ddot{q}_A + D_{12}\ddot{q}_{NA} + h_1 + G_1 = Bu \quad (4a)$$

$$D_{21}\ddot{q}_A + D_{22}\ddot{q}_{NA} + h_2 = -\hat{f}_{ext} \quad (4b)$$

donde  $\hat{f}_{ext}$  representa la fuerza de fricción y  $h_1 = C_{11}\dot{q}_A$ ,  $h_2 = C_{21}\dot{q}_A$ . Además,  $C_{11} \in R^{4 \times 4}$ ,  $C_{21} \in R^{1 \times 4}$ ,  $D_{11} \in R^{4 \times 4}$ ,  $D_{21} = D_{12}^T \in R^{1 \times 4}$ ,  $B \in R^{4 \times 4}$  y  $D_{22} \in R$ .

## II-A. Linealización parcial

Para tratar el sistema subactuado (4) y simplificar su análisis se propone inicialmente una linealización parcial del sistema considerando la retroalimentación,

$$Bu = -D_{12}D_{22}^{-1}\{h_2 + \hat{f}_{ext}\} + h_1 + G_1 + \bar{D}v, \quad (5)$$

donde  $\bar{D} = D_{11} - D_{12}D_{22}^{-1}D_{21}$  y siendo  $v$  una nueva señal de entrada. El sistema en lazo cerrado (4)-(5) resulta,

$$\ddot{q}_A = v \quad (6a)$$

$$D_{21}v + D_{22}\ddot{q}_{NA} + h_2 + \hat{f}_{ext} = 0. \quad (6b)$$

El sistema (6) es resultado de la llamada ‘‘collocated linearization’’ (Spong, 1994), que se refiere a una retroalimentación que linealiza al subsistema asociado con las coordenadas actuadas.

Para representar el sistema en el espacio de estados, se define,

$$z_1 = q_A, \quad z_2 = \dot{q}_A, \quad \zeta_1 = q_{NA}, \quad \zeta_2 = \dot{q}_{NA},$$

por lo que, (6) se reescribe como,

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (7a)$$

$$\dot{z}_2 = v$$

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2 \quad (7b)$$

$$\dot{\zeta}_2 = D_{22}^{-1}[-D_{21}v - h_2 - \hat{f}_{ext}],$$

donde el subsistema  $z = [z_1^T, z_2^T]^T$  representa la dinámica articular, lineal y actuada, y el subsistema  $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2]^T$  determina la evolución de la dinámica de patinado. Nótese que en la ecuación (7), la nueva entrada de control  $v$  aparece en ambos subsistemas  $z$  y  $\zeta$ . Esto complica altamente el diseño de un controlador para el sistema completo por lo que se requiere reescribir (7) en una forma particular de tal manera que las coordenadas no actuadas se puedan desacoplar con respecto a la entrada  $v$ .

## II-B. Desacoplamiento de la entrada de control

El subsistema  $\zeta$  dado en (7) se puede desacoplar con respecto a  $v$  considerando la transformación definida globalmente (Olfati-Saber, 2000),

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= z_1 \\ \sigma_2 &= z_2 \\ \phi_1 &= \zeta_1 + \gamma(z_1) \\ \phi_2 &= D_{22}\zeta_2 + D_{21}z_2\end{aligned}\quad (8)$$

donde  $\gamma(z_1) = \int D_{22}^{-1}D_{21}dz_1$  corresponde a la posición del centro de masa  $x_{CM}(t)$  del robot en el eje  $x$  en un tiempo  $t$  con respecto al punto de apoyo en el marco de referencia  $\{A\}$  (ver Figura 1); por lo tanto, la nueva coordenada  $\phi_1$  define la posición del centro de masa con respecto al marco inercial  $\{0\}$ . Por otra parte,  $\phi_2$  corresponde a  $\phi_1$  multiplicada por  $D_{22}^{-1}$ . La dinámica del sistema (7) se expresa en las coordenadas (8) como,

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 \\ \dot{\sigma}_2 &= v \\ \dot{\phi}_1 &= D_{22}^{-1}\phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= -\hat{f}_{ext}(D_{22}^{-1}[\phi_2 - D_{21}(\sigma_1)\sigma_2]).\end{aligned}\quad (9)$$

El análisis de la evolución del sistema, dada una trayectoria de referencia articular  $q_A^d$  se puede efectuar en términos de las coordenadas del error,

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \sigma_1 - q_A^d \\ \delta_2 &= \sigma_2 - \dot{q}_A^d \\ \omega &= v - \ddot{q}_A^d.\end{aligned}$$

Bajo estas condiciones, el sistema (9) toma la forma,

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= \delta_2 \\ \dot{\delta}_2 &= \omega \\ \dot{\phi}_1 &= D_{22}^{-1}\phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= -\hat{f}_{ext}(D_{22}^{-1}[\phi_2 - D_{21}(\delta_1 + q_A^d)[\delta_2 + \dot{q}_A^d]]).\end{aligned}\quad (10)$$

## III. CONTROL DEL CICLO DE CAMINADO BAJO LA INFLUENCIA DE FRICCIÓN VISCOSA

El término  $\hat{f}_{ext}$  en los desarrollos anteriores describe la fuerza de fricción en el punto de apoyo. En este trabajo ésta fuerza se describe mediante un modelo de fricción viscosa debido a su relación lineal con la velocidad de patinado:  $\hat{f}_{ext} = k_v\zeta_2$ , donde  $k_v$  es el coeficiente de viscosidad. Con esta consideración, el sistema (10) se convierte en,

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= \delta_2 \\ \dot{\delta}_2 &= \omega\end{aligned}\quad (11a)$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= D_{22}^{-1}\phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= -k_v D_{22}^{-1}\phi_2 + k_v D_{22}^{-1}D_{21}(\delta_1 + q_A^d)[\delta_2 + \dot{q}_A^d].\end{aligned}\quad (11b)$$

Nótese que el subsistema  $\delta$  dado en (11a) es un doble integrador que puede ser fácilmente estabilizado mediante una retroalimentación específica  $\omega$ .

## III-A. Convergencia en tiempo finito

Debido a la naturaleza de la dinámica del ciclo de marcha, que implica una función de reseteo para definir el inicio de cada paso es necesario asegurar la convergencia del error de seguimiento antes de la finalización del paso en curso. Estrategias de control en tiempo finito han sido ya implementadas para diferentes clases de robots bípedos (Grizzle et al., 2001), (Plestan et al., 2003). En este trabajo se considera la retroalimentación usada en (Grizzle et al., 2001) y definida inicialmente en (Bhat and Bernstein, 1998) para un sistema de doble integrador. La retroalimentación está dada por,

$$v = \frac{1}{\epsilon} [-\text{sign}(\epsilon\delta_2)|\epsilon\delta_2|^\alpha - \text{sign}(v)|v|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}], \quad (12)$$

donde,

$$v = \delta_1 + \frac{1}{2-\alpha} \text{sign}(\epsilon\delta_2)|\epsilon\delta_2|^{2-\alpha},$$

para,

$$\alpha \in (0, 1) \text{ y } \epsilon > 0.$$

La ecuación (12) corresponde a una retroalimentación continua que produce un sistema en lazo cerrado globalmente estable en tiempo finito lo cual es mostrado en (Bhat and Bernstein, 1998) mediante la metodología de Lyapunov.

La tasa de convergencia del subsistema (11a) determina la evolución del término  $k_v D_{22}^{-1}D_{21}(\delta_1 + q_A^d)[\delta_2 + \dot{q}_A^d]$  en el subsistema  $\phi$  (11b). Para analizar este efecto, la evolución del subsistema  $\phi$  se desglosa en dos partes; la respuesta en estado estacionario donde  $t \geq t_c$  y la respuesta transitoria, donde  $\delta$  tiene un comportamiento desconocido pero acotado.

## III-B. Fase de simple soporte: Estado estacionario

Considérese primero el caso mas simple donde el sistema en lazo cerrado (11a) es tal que  $\delta = 0$  para  $t \geq t_c$ . Esto hace que el subsistema  $\phi$  tome la forma,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= D_{22}^{-1}\phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= -k_v D_{22}^{-1}\phi_2 + k_v D_{22}^{-1}D_{21}(q_A^d)\dot{q}_A^d.\end{aligned}\quad (13)$$

Resolviendo la segunda ecuación de (13) para  $t_c \leq t \leq t_p$ , donde  $t_p$  es el tiempo de finalización del paso, se obtiene,

$$\begin{aligned}\phi_2 &= e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_c)}\phi_2(t_c) + e^{-k_v D_{22}^{-1}t} \left[ D_{21}^d \dot{q}_A^d e^{k_v D_{22}^{-1}t} \Big|_{t_c}^t \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_c}^t [C_{21}^d \dot{q}_A^d + D_{21}^d \ddot{q}_A^d] d\tau \right].\end{aligned}\quad (14)$$

De la ecuación de (4b) y el modelo de fricción viscosa, el término dentro de la integral de (14) se puede escribir en términos de las trayectorias deseadas como,

$$C_{21}^d \dot{q}_A^d + D_{21}^d \ddot{q}_A^d = -k_v \zeta_2^d - D_{22} \dot{\zeta}_2^d. \quad (15)$$

Recuérdese que la coordenada no actuada no es controlable y tiene un comportamiento que depende de la dinámica articular. Sin embargo, siempre es posible definir una trayectoria deseada tal que  $\zeta_2^d = 0$  y  $\dot{\zeta}_2^d = 0$ . De esta

manera, el lado derecho de (15) es nulo y la ecuación (14) se re escribe como,

$$\phi_2(t) = e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_c)} \phi_2(t_c) + D_{21}^d(t) \dot{q}_A^d(t) - e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_c)} D_{21}^d(t_c) \dot{q}_A^d(t_c). \quad (16)$$

En las coordenadas originales la ecuación anterior se puede reescribir en la forma,

$$\zeta_2(t) = e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_c)} \zeta_2(t_c). \quad (17)$$

La ecuación (17) implica que a partir de un tiempo inicial  $t_c$ ,  $\zeta_2(t)$  disminuirá exponencialmente con el tiempo, dado un coeficiente de viscosidad  $k_v$ . Como era de esperarse, el principal factor para determinar la condición de patinado, es el parámetro de fricción. La evolución del desplazamiento real de patinado resulta,

$$\zeta_1(t) = \zeta_1(t_c) - \frac{1}{k_v} D_{22} \zeta_2(t_c) \left[ e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_c)} - 1 \right], \quad (18)$$

el cual puede ser pequeño mientras  $k_v$  sea grande. Las ecuaciones (17) y (18) son válidas sólo para  $t_c \leq t \leq t_p$ , donde el subsistema (11a) ha convergido al origen. Sin embargo, es necesario analizar la dinámica del patinado cuando el error  $\delta(t) = [\delta_1^T(t), \delta_2^T(t)]^T$  es diferente de cero, esto es, antes de  $t_c$ .

### III-C. Fase de Simple soporte: Dinámica transitoria

La evolución de  $\phi_2(t)$  para  $t_0 \leq t < t_c$  puede analizarse de forma similar al caso anterior, obteniéndose inicialmente,

$$\phi_2(t) = e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_0)} \phi_2(t_0) + k_v D_{22}^{-1} e^{-k_v D_{22}^{-1}t} \rho(\tau) \quad (19)$$

donde,

$$\rho(\tau) = \int_{t_0}^t e^{k_v D_{22}^{-1}\tau} D_{21} (\delta_1(\tau) + q_A^d(\tau)) [\delta_2(\tau) + \dot{q}_A^d(\tau)] d\tau.$$

Nótese que esta vez el término dentro de la integral no puede eliminarse. Sin embargo es posible verificar que,

- i)  $\|D_{21}\| \leq \|D\|$ , donde  $D = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]$
- ii)  $\delta_2(t) \leq \Delta_2$
- iii)  $\dot{q}_A^d \leq \Theta_d$ .

La cota  $\Delta_2$  es una consecuencia de las propiedades de estabilidad de la fase del simple soporte. Además, por la naturaleza del impacto, el error de velocidad  $\delta_2$  crece en el momento del mismo debido a la discontinuidad generada; sin embargo, ésta no implica una dinámica no acotada y  $\Delta_2$  puede definirse siempre.  $\Theta_d$  es una cota superior de la referencia articular en velocidad y puede siempre ser definida. Por lo tanto a partir de (19) se tiene que,

$$\phi_2(t) \leq e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_0)} \phi_2(t_0) + k_v D_{22}^{-1} e^{-k_v D_{22}^{-1}t} \bar{\rho}(\tau) \quad (20)$$

donde

$$\bar{\rho}(\tau) = [D\Delta_2 + D\Theta_d] \int_{t_0}^t e^{k_v D_{22}^{-1}\tau} d\tau,$$

esto es,

$$\phi_2(t) \leq e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_0)} \phi_2(t_0) + \Lambda \left[ 1 - e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_0)} \right] \quad (21)$$

con  $\Lambda = D [\Delta_2 + \Theta_d]$ . De esta manera la cota superior de  $\phi_2$  depende fundamentalmente de las propiedades dadas en (III-C). Por lo tanto, mientras la velocidad crece, se espera que el patinado también lo haga. En coordenadas originales, y considerando que el robot bípedo inicia en reposo (i.e.  $\phi_2(0) = 0$ ) se tiene,

$$\begin{aligned} \zeta_2(t) &\leq -D_{22}^{-1} D_{21}(q_A) \dot{q}_A + D_{22}^{-1} \Lambda \left[ 1 - e^{-k_v D_{22}^{-1}t} \right] \\ &\leq D_{22}^{-1} \Lambda \left[ 1 - e^{-k_v D_{22}^{-1}t} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Esto garantiza que el patinado antes de  $t_c$  no crece indefinidamente y por lo tanto,  $\zeta_2$  en  $t_c$  eventualmente desaparecerá.

### III-D. Doble soporte: Dinámica del impacto

Para caracterizar el ciclo de marcha, cada fase de simple soporte es definida por condiciones iniciales de  $\sigma_1$  y  $\zeta_1$  a través de una función de reseteo, las cuales dependen del intercambio de coordenadas de tal manera que la pata de apoyo se convierte en la pata libre y viceversa; y de la dinámica resultante del fenómeno de impacto. Estos dos eventos definen la fase de doble soporte.

En este trabajo se considera un doble soporte instantáneo, por lo que está caracterizado sólo por una discontinuidad en velocidad y por las fuerzas impulsivas generadas en el impacto. La colisión de la pata viajera con el piso es modelada mediante la formulación algebraica dada en (Hurmuzlu and Marghitu, 1994), donde se define que el impacto es gobernado por la ley de conservación de momento angular y lineal como,

$$D_e(\bar{q}_e) [\dot{\bar{q}}_e^+ - \dot{\bar{q}}_e^-] = P = E^T F, \quad (23)$$

donde  $P$  es el impulso que provoca la discontinuidad y  $F = [F_t, F_N]^T$  son las fuerzas impulsivas tangencial y normal respectivamente en el punto de impacto. Además  $\bar{q}_e = [q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, \zeta_1, 0]^T$  y  $E$  es el Jacobiano definido como,

$$E = \frac{\partial P_2}{\partial \bar{q}_e}, \quad (24)$$

donde  $P_2 = [P_{2x}, P_{2y}]^T$  es la posición del extremo de la pata que impacta con respecto al marco de referencia  $\{0\}$ . Para obtener una única solución de (23) para  $\dot{\bar{q}}_e^+$  y  $F$ , se requiere una restricción adicional. Con éste fin, se considera inicialmente que en el impacto no existe rebote ni patinado, esto es,

$$E \dot{\bar{q}}_e^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

y que junto con (23) se obtiene,

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_e^+ \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_e & -E^T \\ E & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_e \dot{\bar{q}}_e^- \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

La solución de (26) equivale a la invertibilidad de la matriz involucrada lo cual siempre se puede garantizar debido a que  $D_e$  es definida positiva y  $E$  tiene rango completo.

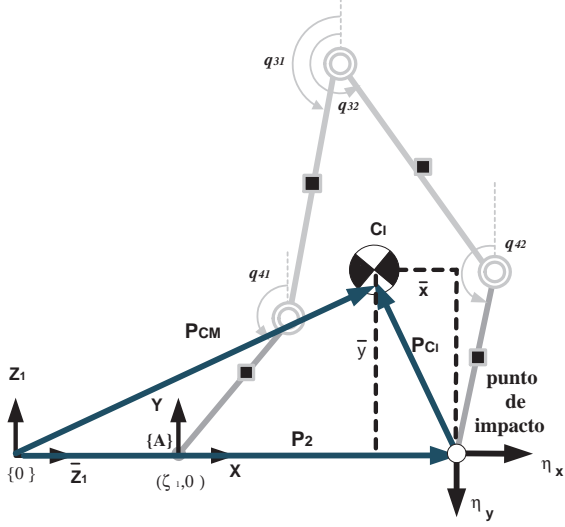


Figura 2: Velocidades relativas en el impacto

Una vez que  $\dot{q}_e^+$  es conocida, considerando que la posición durante el impacto permanece sin cambio, el ciclo de marcha evoluciona de acuerdo a la función de reseteo,

$$x^+ = \Delta(x^-), \quad (27)$$

donde  $x = [\bar{q}_e^T, \dot{\bar{q}}_e^T]^T$ . El mapeo  $\Delta$  se evalúa primero con el cálculo de las velocidades post impacto y luego con el intercambio de coordenadas, que representa el intercambio de patas. Este caso ha sido ampliamente considerado y es válido cuando la relación de Coulomb es tal que  $F_t/F_N \leq \mu$  para un coeficiente de fricción viscosa  $\mu$  dado. Si embargo, para considerar la dinámica de  $\zeta_1$ , se asume que eventualmente  $F_t/F_N \not\leq \mu$ .

### III-E. Caso no ideal: Condición de patinado

Si la velocidad de patinado en el impacto no es nula, es posible modificar (25) de la forma (Vazquez and Velasco-Villa, 2010),

$$E\dot{\bar{q}}_e^+ = \begin{bmatrix} \eta_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

donde  $\eta_x$  es la velocidad de patinado.

Con el fin de resolver la ecuación (28) considérese el robot (1) con  $\bar{q}_e$ , como un cuerpo rígido que impacta con el suelo. Entonces, de manera aproximada, las velocidades en el punto de impacto se expresan entonces como (Wang, 1986),

$$\begin{aligned} \eta_x &= V_x^+ + \bar{y}\omega \\ \eta_y &= V_y^+ - \bar{x}\omega \end{aligned} \quad (29)$$

donde  $\eta_y = 0$  es la velocidad normal, mientras  $V_x^+$  y  $V_y^+$  son las componentes de velocidad del centro de masa  $C_I$  con respecto al punto de impacto.  $P_{C_I} = (\bar{x}, \bar{y})$  define la posición de  $C_I$  con respecto al mismo punto y  $\omega$  es la velocidad angular al impacto. La Figura 2 describe este caso.

La posición del centro de masa  $P_{CM}$  con respecto al marco inercial  $\{0\}$  está dado por,

$$P_{CM} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 + \gamma \\ -D_{22}^{-1}D_{21}\hat{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

con  $\hat{\varepsilon} = [1, 1, 1, 1]^T$ ; por lo que su posición con respecto al punto de impacto se define como,

$$P_{C_I} = P_{CM} - P_2 = \begin{bmatrix} \gamma - P_{2x} \\ -D_{22}^{-1}D_{21}\hat{\varepsilon} - P_{2y} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

y su velocidad en la forma,

$$\frac{dP_{C_I}}{dt} = \begin{bmatrix} V_x^+ \\ V_y^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} - \frac{\partial P_{2x}}{\partial q_A} \dot{q}_A^+ \\ -D_{22}^{-1}C_{21}\hat{\varepsilon} - \frac{\partial P_{2y}}{\partial q_A} \dot{q}_A^+ \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Considerando (29), (32) y (31) se obtiene una expresión para  $\eta_x$  como,

$$\eta_x = \xi \dot{q}_A^+, \quad (33)$$

donde,

$$\xi = \bar{\eta} [D_{22}^{-1}\bar{C} + \frac{\partial P_{2y}}{\partial q_A}] + D_{22}^{-1}D_{21} + \frac{\partial P_{2x}}{\partial q_A},$$

con,

$$\begin{aligned} \bar{C} &= [ -b_1s_{31} \quad -b_2s_{32} \quad -b_3s_{41} \quad -b_4s_{42} ] \\ \bar{\eta} &= \frac{[D_{22}^{-1}D_{21}\hat{\varepsilon} + P_{2y}]}{\gamma - P_{2x}}. \end{aligned}$$

Nótese que la eventual velocidad de patinado resulta proporcional a las velocidades post impacto  $\dot{q}_A^+$ . La ecuación (28), puede reescribirse como,

$$E\dot{\bar{q}}_e^+ = \begin{bmatrix} [\xi, 0, 0] \dot{q}_A^+ \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Por lo que la solución para  $\dot{\bar{q}}_e^+$  y  $F$  del par (23)-(34) se expresa como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{q}}_e^+ \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_e & -E^T \\ E - \nu & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_e \dot{\bar{q}}_e^- \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

donde  $\nu = [[\xi, 0, 0], 0_{2 \times 6}]^T$ ; y nuevamente el mapeo de reseteo toma la forma (27) para obtener las condiciones iniciales para un nuevo paso.

### III-F. Efecto de la velocidad de impacto en el soporte

Dada la duración instantánea del doble soporte, la velocidad de patinado en el impacto se convierte en la velocidad inicial de patinado en el punto de apoyo del nuevo paso, lo cual es modelado por (21) en forma general. De esta manera, en coordenadas originales, la ecuación (21) toma la forma,

$$\begin{aligned} \zeta_2(t) &\leq e^{-k_v D_{22}^{-1}(t-t_0)} [D_{22}\zeta_2(t_0) + D_{21}(t_0)\dot{q}_A(t_0)] \\ &\quad - D_{22}^{-1}D_{21}(q_A)\dot{q}_A + D_{22}^{-1}\Lambda [1 - e^{-k_v D_{22}^{-1}t}], \end{aligned} \quad (36)$$

donde  $t_0$  es el tiempo inicial de cada nuevo paso que puede iniciar con un patinado no nulo. En general, la fricción puede evitar un patinado considerable al considerar un coeficiente de viscosidad alto. Si éste no es el caso, una alternativa consiste en proponer una referencia en velocidad suficientemente lenta.



#### IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

Considérese una trayectoria de referencia con un paso de longitud  $l = 10\text{cm}$ , una elevación máxima de  $h = 4\text{cm}$  de la pata libre y una referencia constante de la cadera en el eje vertical. A través de la cinemática inversa, es posible obtener las correspondientes referencias articulares. Se considera un coeficiente de fricción de Coulomb, de tal manera que existe impacto con patinado, esto es,  $\eta_x \neq 0$ .

La retroalimentación usada permite obtener el desempeño mostrado en la Figura 3 para las posiciones articulares y en la Figura 4 para las velocidades articulares. Las simulaciones se desarrollan durante 3 segundos que corresponden a tres pasos del robot.

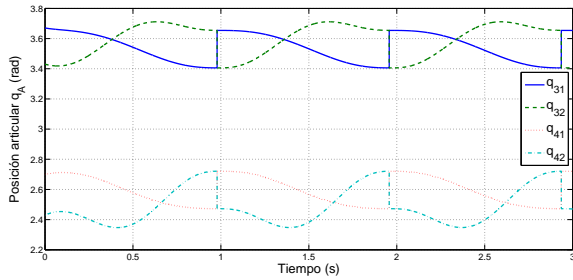


Figura 3: Articular positions

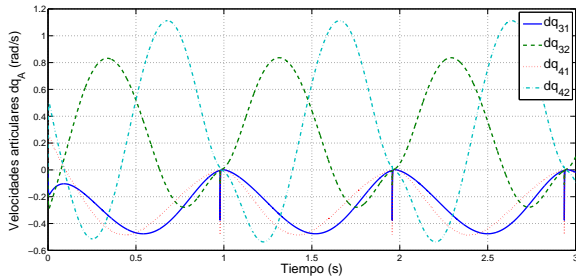


Figura 4: Articular velocities

Durante la evolución del robot, la dinámica de patinado del punto de apoyo sufre el efecto de la inercia generada, combinado con las características de la superficie de trabajo. Considerando un coeficiente de viscosidad  $k_v = 500$ , el robot tiene un desplazamiento tangencial en el apoyo, como se muestra en la Figura 5 con el perfil de velocidad mostrado en la Figura 6. Nótese que el primer paso, en que el robot comienza del reposo, evoluciona de manera diferente a los demás pasos en los que la condición inicial de patinado no es nula debido al patinado inducido por el impacto previo. Esta velocidad sin embargo, converge a una vecindad del origen como se muestra en la misma figura.

Los torques aplicados para seguir las trayectorias deseadas se muestran en la Figura 7.

Finalmente la evolución de los errores de posición y velocidad se muestran en las Figuras 8 y 9, respectivamente.

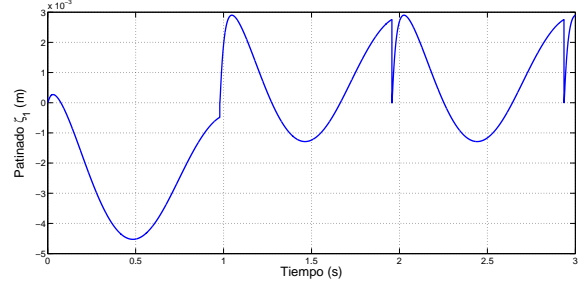


Figura 5: Desplazamiento del punto de apoyo

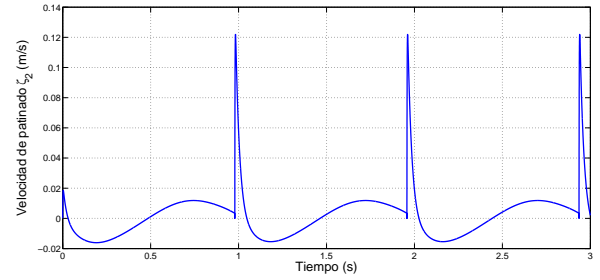


Figura 6: Velocidad de desplazamiento del punto de apoyo

#### V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha considerado una dinámica generalmente despreciada, el patinado en el punto de apoyo de un robot bípedo durante la fase de simple soporte del ciclo de marcha. Se ha caracterizado la dinámica de patinado del punto de apoyo en términos del coeficiente de fricción de la pata de apoyo con el piso. Es importante mencionar el hecho de que el fenómeno de patinado, que se refleja en un desplazamiento de todo el sistema a lo largo del eje horizontal, no es compensado de tal manera que se logre la referencia cartesiana por lo que esto representa un error en la posición final en el eje  $x$ . La estrategia de control considera la convergencia de los errores articulares al origen sin tomar en cuenta el patinado del sistema completo.

#### REFERENCIAS

- Bhat, S. and Bernstein, D. (1998). Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(5): 678–682.
- Chemori, A. and Loria, A. (2002). Control of a planar five link underactuated biped robot on a complete walking cycle, *IEEE Conf. on Dec. and Ctrl.*, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 2056–2061.
- Djoudi, D. and Chevallereau, C. (2005). Stability analysis of a walk of a biped robot with control of the zmp, *Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Alberta, Canada.
- Goswami, A. (1999). Postural stability of biped robots and the foot rotation indicator (fri) point, *Int. Journal of Robotics Research* **18**(6): 523–533.
- Grizzle, J. W., Abba, G. and Plestan, F. (2001). Asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects, *IEEE Tran. Automatic Control* **46**(1): 51–64.
- Hurmuzlu, Y. and Marghitu, D. B. (1994). Rigid body collisions of planar kinematic chains with multiple contact points, *The Int. J. Robotics Research* **13**(1): 82–92.

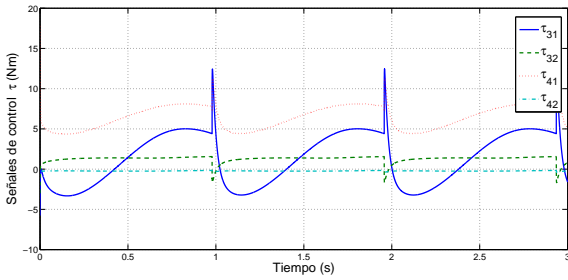


Figura 7: Torques aplicados en las uniones actuadas

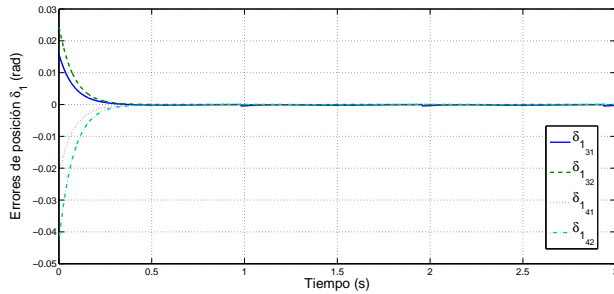


Figura 8: Errores de posición

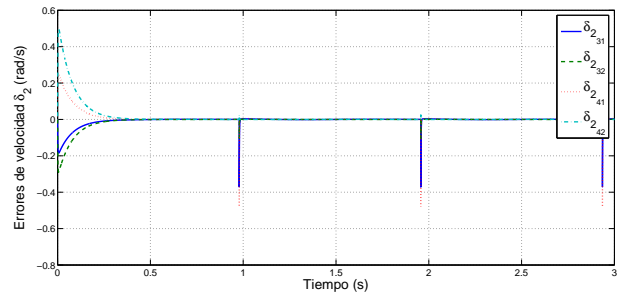


Figura 9: Errores de velocidad

- Kajita, S., Kaneko, K., Harada, K., Kanehiro, F., Fujiwara, K. and Hirukawa, H. (2004). Biped walking on a low friction floor, *Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Sendai, Japan.
- Miura, H. and Shimoyama, I. (1984). Dynamic walk of a biped, *Int. Journal of Robotics Research* **3**(2): 60–74.
- Morris, B. and Grizzle, J. W. (2005). A restricted poincare map for determining exponentially stable periodic orbits in systems with impulse effects: Application to bipedal robots, *44<sup>th</sup> IEEE Conf. on Dec. and Ctrl.*, pp. 4199–4206.
- Olfati-Saber, R. (2000). Cascade normal forms for underactuated mechanical systems, *IEEE Conf. on Dec. and Ctrl.*, Sydney, Australia, pp. 2162–2167.
- Plestan, F., Grizzle, J. W., Westervelt, E. and Abba, G. (2003). Stable walking of a 7-dof biped robot, *IEEE Tran. Robotics and Automation* **19**(4): 653–668.
- Sardain, P. and Bessonnet, G. (2004). Forces acting on a biped robot. center of pressure-zero moment point, *IEEE Tran. Sys. Man and Cybernetics-Part A; systems and humans* **34**(5): 630–637.
- Silva, F. and Machado, J. T. (2004). Towards force interaction control of biped walking robots, *IEEE Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, Sendai, Japan, pp. 2568–2573.
- Spong, M. (1994). The control of underactuated mechanical systems, *First International Conference on Mechatronics*, Mexico City, Mexico.
- Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*, John Wiler and Sons, USA.
- Vazquez, J. A. and Velasco-Villa, M. (2010). Approximate slipping effects analysis and compensation on a biped robot, *Int. Conf. on Electrical Engineering Science and Automatic Control*, Tuxtla Gutierrez, Mexico, pp. 464–469.
- Wang, Y. (1986). On impact dynamics of robotics operations, *Internal report*, Department of Mechanical Engineering and The Robotics Institute Carnegie-Mellon University.