

Algoritmo Recursivo Estimador de Parámetros en Tiempo Finito

Eder Guzmán Jaime A. Moreno

Coordinación Eléctrica y Computación, Instituto de Ingeniería,
Universidad Nacional Autónoma de México, 04510 México D.F., Mexico

Email: EGuzmanB@ii.unam.mx, JMorenoP@ii.unam.mx

Resumen—Se introduce un algoritmo recursivo para estimación de parámetros, el cual converge en tiempo finito. El nuevo algoritmo incluye como caso especial el algoritmo Recursivo Cuadrático Lineal, y es una generalización del Algoritmo Super-Twisting (AST), un algoritmo por modos deslizantes de segundo orden para sistemas variantes en el tiempo.

Palabras clave: Estimador de parámetros, modos deslizantes, tiempo finito, Super-Twisting.

I. INTRODUCCIÓN

Las propiedades de estabilidad del sistema lineal no autónomo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A(t)x_1 + B(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= C(t)x_1\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $A(t)$, $B(t)$ y $C(t)$ son matrices de funciones acotadas continuas a tramos, han jugado un papel fundamental dentro del control adaptable clásico (Narendra y Annaswamy, 1989), (Sastry y Bodson, 1989), (Marino y Tomei, 1995), específicamente en la estimación de parámetros o problemas de observadores adaptables. Básicamente, si $A(t)$ es una matriz asintóticamente estable, el origen $x = 0$ del sistema (1) puede hacerse uniforme y asintóticamente estable seleccionando adecuadamente la matriz $C(t)$ si (y sólo si) una condición de excitación persistente es satisfecha para $B(t)$. El principal objetivo en este documento es mostrar que, restringiéndonos al caso donde $n_1 = 1$, y bajo las mismas hipótesis que para (1), el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A(t)\phi_1(x_1) + B(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= C(t)\phi_2(x_1),\end{aligned}\quad (2)$$

con

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1) &= \mu|x_1|^{1/2}\text{sign}(x_1) + \mu_2x_1 \\ \phi_2(x_1) &= \frac{\mu_1^2}{2}\text{sign}(x_1) + \frac{3}{2}\mu_1\mu_2|x_1|^{1/2}\text{sign}(x_1) + \mu_2^2x_1,\end{aligned}$$

y $\mu_1 > 0$, $\mu_2 \geq 0$ constantes arbitrarias no negativas, tiene a $x = 0$ como un punto de equilibrio global estable en tiempo finito cuando el sistema (1) tiene $x = 0$ como un punto de equilibrio global uniforme y asintóticamente estable. Note que cuando $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ el caso lineal es recuperado. Puesto que la parte derecha de (2) es discontinua, sus soluciones son todas trayectorias en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). Note que en el caso invariante

en el tiempo de dimensión dos, i.e. $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, y $A(t), B(t), C(t)$ constantes, el algoritmo (2) corresponde al Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG) introducido en (Moreno, 2009), el cual generaliza el Algoritmo Super-Twisting (AST) (generado cuando $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$), un algoritmo por modos deslizantes de segundo orden propuesto originalmente en (Levant, 1993). Estos algoritmos tienen una convergencia y propiedades de robustez notables, ya que convergen en tiempo finito y son insensibles a perturbaciones no desvanecientes. Por sus características han encontrado numerosas aplicaciones, entre otras, como diferenciadores exactos (Levant, 1998; Levant, 2003), controladores por retroalimentación (Levant, 2003) y observadores (Davila *et al.*, 2008). En (Davila *et al.*, 2006; M'Sirdi *et al.*, 2008) el AST es usado como estimador de parámetros en sistemas mecánicos. Sin embargo, la señal de inyección de salida filtrada linealmente del AST es usada para obtener el regresor, del cual un algoritmo Recursivo Cuadrático Lineal estándar identifica los parámetros asintóticamente. Otros métodos para estimar parámetros que usan modos deslizantes de primer orden, también se basan en la reconstrucción de señales de control equivalente (Xu *et al.*, 2003), generando algoritmos de reconstrucción asintótica. La estimación de parámetros en tiempo finito puede ser realizada por el algoritmo lineal no recursivo Estimador por Mínimos Cuadrados (Adetola y Guay, 2008; Chen *et al.*, 2010). El punto de vista presentado aquí es diferente, porque (2) puede ser visto como una versión recursiva no lineal del algoritmo de Mínimos Cuadrados, donde los términos de inyección no lineal mejoran la convergencia (en tiempo finito) y las propiedades de estabilidad robusta. El documento es organizado como sigue. En la siguiente sección algunos resultados preliminares sobre las propiedades de (1) son repasados y el resultado principal sobre (2) es establecido y probado usando argumentos de Lyapunov. En la sección III la aplicación del resultado principal a problemas de estimación de parámetros es presentada. En la sección IV se presenta un ejemplo ilustrativo y las conclusiones.

II. CONVERGENCIA DEL ALGORITMO EN TIEMPO FINITO

II-A. Estabilidad del Algoritmo Lineal

Para el sistema lineal variante en el tiempo (1) los siguientes resultados fueron establecidos originalmente en

(Morgan y Narendra, 1977; Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Marino y Tomei, 1995, Teorema 2 y corolario 1).

Teorema 1: Sea $A(t)$ una matriz uniforme y asintóticamente estable de $n_1 \times n_1$ de funciones acotadas continuas a tramos. Sea $P(t)$ una matriz simétrica positiva definida de funciones acotadas y continuas tal que $\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$ es negativa definida. Sea $B(t)$ una matriz de funciones acotadas continuas a tramos de $n_1 \times n_2$. Asuma que existe constantes positivas T_0, ε_0 y δ_0 , con un $t_2 \in [t, t + T_0]$ tal que para cada vector unidad $w \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$\left\| \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2 + \delta_0} B(\tau)w \, d\tau \right\| \geq \varepsilon_0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (3)$$

Entonces el sistema (1) con $C(t) = -B^T(t)P(t)$ es Uniforme y Asintóticamente Estable (UAE). Además, si $B(t)$ es suave y $|B(t)|$ es uniformemente acotada, (3) es equivalente a

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \|B(\tau)w\| \, d\tau \geq \varepsilon_0, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4)$$

para $t_0 \in \mathbb{R}_+$, y constantes positivas T_0 y ε_0 , y todos los vectores unitarios $w \in \mathbb{R}^{n_2}$.

La condición (4) es la definición clásica de la condición de *Excitación Persistente (PE)* para la matriz $B(t)$ (Narendra y Annaswamy, 1989).

Observación 1: El resultado previo puede ser generalizado en diferentes formas.

1. En (4) en lugar de requerir que $B(t)$ sea suave y que $|B(t)|$ sea acotada, se puede hacer de alguna manera una suposición menos restrictiva, que los componentes de $B(t)$ estén contenidos en el conjunto PS^* , el conjunto de todas las funciones suaves a tramos $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$, que son uniformemente acotadas, cuyas derivadas son uniformemente acotadas (donde están definidas), y para los cuales los intervalos donde g es suave no se desvanecen a cero. Por ejemplo, una función g definida como constante sobre los intervalos (a_i, a_{i+1}) donde $a_{i+1} - a_i$ es acotada por debajo como $i \rightarrow \infty$ está en PS^* (ver (Moreno, 2009; Narendra y Annaswamy, 1989)).
2. El Teorema 1 permanece válido para $C(t) = -\Lambda B^T(t)P(t)$, donde $\Lambda = \Lambda^T > 0$ es una matriz arbitraria, constante, simétrica y positiva definida, de $n_2 \times n_2$. Esto puede ser mostrado haciendo el cambio de variables $\Lambda = L^T L$, y aplicando el Teorema 1 al sistema transformado (ver (Marino y Tomei, 1995, Lema B.2.3))

III. ESTABILIDAD EN TIEMPO FINITO PARA EL ALGORITMO NO LINEAL

El principal resultado de este documento es la siguiente afirmación sobre el sistema (2)

Teorema 2: Considere el sistema (2) con $n_1 = 1$, y $\mu_1 \geq 0$. Asuma que las condiciones del Teorema 1 son satisfechas, tal que el sistema (1) es Uniforme Asintóticamente

Estable (UAE). Entonces cada trayectoria de (2) converge al origen $x = 0$ en Tiempo Finito.

Demostración: Note primero que $x = 0$ es un punto de equilibrio, que (2) es una inclusión diferencial $\dot{x} \in f(t, x)$, y $0 \in f(t, 0)$ para todo $t \geq t_0$. Ya que se asume que el sistema (1) es UAE entonces existe una función de Lyapunov cuadrática (Khalil, 2002)

$$\begin{aligned} V_L &= x^T \Pi(\tau)x \\ \dot{\Pi}(\tau) &= -\mathcal{A}^T(\tau)\Pi(\tau) - \Pi(\tau)\mathcal{A}(\tau) - \tilde{\Omega}(\tau) \quad (5) \\ \mathcal{A}(\tau) &= \begin{bmatrix} A(\tau) & B(\tau) \\ C(\tau) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $\Pi(\tau) = \Pi^T(\tau)$, positiva definida y acotada, $\tilde{\Omega}(\tau)$ positiva definida y $\mathcal{A}(\tau)$ es el sistema matriz del sistema (1), i.e.

$$\alpha_1 \mathbb{I} \leq \Pi(\tau) \leq \alpha_2 \mathbb{I}, \quad \tilde{\Omega}(\tau) \geq \alpha_3 \mathbb{I}, \quad (6)$$

para algunas constantes positivas α_1, α_2 y α_3 y para toda $\tau \geq 0$. Definiendo la transformación en tiempo $\tau(t)$, tal que

$$\frac{d\tau}{dt} = \tau'(t) = \phi'_1(x_1(t)), \quad (7)$$

tiene una inversa $t = t(\tau)$, se sigue de (Filippov, 1988) (Teorema 2, Sección 9), que existe una matriz $\Upsilon(t) = \Pi(\tau(t))$ positiva definida y acotada, y $\Omega(t) = \tilde{\Omega}(\tau(t))$ tal que (ver (5)) satisfacen

$$\frac{d\Upsilon(t)}{dt} = -\phi'_1(x_1(t)) [\mathcal{A}^T(t)\Upsilon(t) + \Upsilon(t)\mathcal{A}(t) + \Omega(t)], \quad (8)$$

i.e. cada solución de (8) se obtiene a través de una transformación en tiempo de una solución de (5) (Filippov, 1988). Considere la función

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \zeta^T \Upsilon(t) \zeta, \\ \zeta^T &= [\zeta_1 \quad \zeta_2^T] = [\phi_1(x_1) \quad x_2^T] \end{aligned}$$

como una candidata a función de Lyapunov para el sistema (2), con $\Upsilon(t)$ tomada de (8). $V(t, x)$ es continua y continuamente diferenciable en todas partes en \mathbb{R}^{1+n_2} , excepto en el conjunto

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1+n_2} | x_1 = 0\} \quad (9)$$

donde es no Lipschitz continua. Note que

$$\begin{aligned} \phi_2(x_1) &= \phi'_1(x_1)\phi_1(x_1) \\ \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} \phi'_1(x_1)(A(t)\phi_1(x_1) + B(t)x_2) \\ C(t)\phi_2(x_1) \end{bmatrix} \\ &= \phi'_1(x_1)\mathcal{A}(t)\zeta, \end{aligned}$$

donde la derivada es definida. La derivada temporal de $V(t, x)$ está dada por

$$\dot{V} = \zeta^T \{ \dot{\Upsilon}(t) + \phi'_1(x_1)\mathcal{A}^T(t)\Upsilon(t) + \phi'_1(x_1)\Upsilon(t)\mathcal{A}(t) \} \zeta,$$

en los puntos donde $V(t, x)$ es diferenciable, i.e. para todos los puntos excepto los dados en el conjunto $\{x_1 = 0\}$. Esto

implica que

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= -\phi_1'(x_1)\zeta^T\Omega(t)\zeta \\ &= -\left(\mu_1\frac{1}{2|x_1|^{1/2}} + \mu_2\right)\zeta^T\Omega(t)\zeta.\end{aligned}$$

ya que

$$|x_1|^{1/2} \leq \frac{1}{\mu_1} \|\zeta\|_2$$

donde

$$\|\zeta\|_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^T \zeta_2 = \mu_1^2|x_1| + 2\mu_1\mu_2|x_1|^{3/2} + \mu_2^2x_1^2 + \|x_2\|_2^2$$

es la norma Euclidiana de ζ , y usando las desigualdades (6), se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &\leq -\left(\frac{\mu_1^2}{2}\alpha_3\|\zeta\|_2 + \mu_2\alpha_3\|\zeta\|_2^2\right) \\ &\leq -\frac{\mu_1^2\alpha_3}{2\alpha_2^{1/2}}V^{1/2}(t,x) - \frac{\mu_2\alpha_3}{\alpha_2}V(t,x).\end{aligned}$$

Recordando que esta expresi3n es la derivada de $V(t,x)$ cuando la trayectoria $\varphi(t,t_0,x_0)$ del sistema (2) est1 fuera de el conjunto $\mathcal{L} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^{1+n_2} | x_1 = 0\}$, esto indica que es negativa definida en \mathcal{L}^c , el complemento de \mathcal{L} . Para permanecer en el conjunto \mathcal{L} por un intervalo de tiempo, es necesario que $x_1(t) = 0$ y $B(t)x_2 = 0$ durante ese intervalo, as1 que $x(t)$ permanece constante. De la condici3n de EP (4) se sigue que la condici3n $B(t)x_2(t) = 0$ no puede ser satisfecha durante cualquier intervalo $t \in [t, t+T_0]$, as1 que la trayectoria $\varphi(t,t_0,x_0)$ no puede permanecer en el conjunto \mathcal{L} por largo tiempo, y, usando argumentos est1ndar (Narendra y Annaswamy, 1989; Marino y Tomei, 1995), se entiende que $V(t,\varphi(t,t_0,x_0))$ es decreciente. Se sigue del teorema de Zubov (Poznyak, 2008, (Teorema 20.2, p. 568)), que el origen es asint3ticamente estable. Note que $V(t,\varphi(t,t_0,x_0))$ es Absolutamente Continua, y que es por lo tanto la integral de su derivada (Bogachev, 2007), entonces

$$\begin{aligned}V(t,\varphi(t,t_0,x_0)) - V(t_0,x_0) &= \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau,\varphi(\tau,t_0,x_0))d\tau \\ &\leq -\frac{\mu_1^2\alpha_3}{2\alpha_2^{1/2}} \int_{t_0}^t V^{1/2}(\tau,\varphi(\tau,t_0,x_0))d\tau\end{aligned}$$

La desigualdad de Bihari (Poznyak, 2008)(p. 509) implica que

$$V(t,\varphi(t,t_0,x_0)) \geq \left(V^{1/2}(t_0,x_0) - \frac{\mu_1^2\alpha_3}{4\alpha_2^{1/2}}(t-t_0)\right)^2,$$

tal que $V(t,\varphi(t,t_0,x_0))$, y tambi3n $\varphi(t,t_0,x_0)$, convergen a cero en un tiempo finito menor que

$$T(t_0,x_0) = \frac{4\alpha_2^{1/2}}{\mu_1^2\alpha_3}V^{1/2}(t_0,x_0). \quad \square$$

Es interesante notar que el algoritmo (2) incluye como caso especial (cuando $\mu_1 = 0$) el algoritmo lineal (1), de tal forma que la implementaci3n es simple. Se entiende que la adici3n de los t3rminos no lineales en (2), discontinuos o no localmente Lipzchitz, fuerzan la convergencia en tiempo

finito. Puesto que las constantes positivas μ_1 y μ_2 pueden ser elegidas a voluntad del dise1ador, y representan el peso de las t3rminos no lineales y lineales en el algoritmo (2), es posible seleccionar un algoritmo ‘‘m1s’’ no lineal o ‘‘m1s’’ lineal.

El tiempo de convergencia finito de la trayectoria puede, en principio, ser estimado por medio de la expresi3n

$$T(t_0,x_0) = \frac{4\alpha_2^{1/2}}{\mu_1^2\alpha_3}V^{1/2}(t_0,x_0)$$

obtenida en la prueba. Sin embargo, es dif1cil en la pr1ctica calcular los valores de α_2 y α_3 , porque dependen de los valores T_0 y ε_0 de la condici3n (4), i.e. la condici3n de EP. Comparado con algoritmos cl1sicos estimadores de par1metros basados en modos deslizantes (Davila *et al.*, 2006; M’Sirdi *et al.*, 2008), donde el control equivalente o se1ales de inyecci3n son reconstruidos y usadas como regresor, y la estimaci3n param3trica es asint3tica, el algoritmo propuesto no tiene una se1al de inyecci3n de alta frecuencia (chattering) y su convergencia es en tiempo finito.

III-A. Acotamiento y Robustez del Algoritmo No Lineal

Es una propiedad importante del algoritmo (1), y es simple mostrar, que es uniformemente estable, aun cuando $B(t)$ no cumple con la condici3n de EP. Esto implica que el estado permanece acotado. La misma propiedad es satisfecha por el algoritmo no lineal (2).

Teorema 3: Considere el sistema (2) con $n_1 = 1, n_2 \geq 1$. Asuma que las condiciones del Teorema 1 son satisfechas, excepto la condici3n (3). Entonces el origen de (2) es uniformemente estable.

Demostraci3n Considere la funci3n

$$W(t,x) = \Delta(t)\phi_1^2(x_1) + x_2^T x_2,$$

$\Delta(t) = P(\tau(t))$, la transformaci3n en el tiempo $\tau(t)$ ha sido introducida en la demostraci3n del Teorema 2 y $P(t)$ es dada en el Teorema 1, en la candidata a funci3n de Lyapunov para el sistema (2). $W(t,x)$ es continua y continuamente diferenciable en todas partes en \mathbb{R}^{1+n_2} , excepto sobre el conjunto $\mathcal{L} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^{1+n_2} | x_1 = 0\}$, donde es no Lipschitz. La derivada de $W(t,x)$ esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{W}(t,x) &= [\dot{\Delta}(t) + 2\phi_1'(x_1)\Delta(t)A(t)]\phi_1^2(x_1) \\ &\quad + 2\phi_1'\phi_1(x_1)[\Delta(t)B(t) + C^T(t)]x_2 \\ &= [\dot{\Delta}(t) + 2\phi_1'(x_1)\Delta(t)A(t)]\phi_1^2(x_1),\end{aligned}$$

por la definici3n de $C(t)$. Usando los mismos argumentos que en la demostraci3n del Teorema 2 se sigue que $\dot{\Delta}(t) + 2\phi_1'(x_1)\Delta(t)A(t) = -\phi_1'(x_1)\tilde{Q}(t)$, con $\tilde{Q}(t)$ dada en el Teorema 1 y $\tilde{Q}(t) = Q(\tau(t))$, tal que

$$\dot{W}(t,x) = -\phi_1'(x_1) = \tilde{Q}(t)\phi_1^2(x_1) \leq 0.$$

Recordando que esta expresi3n es la derivada de $W(t,x)$ cuando la trayectoria $\varphi(t,t_0,x_0)$ del sistema (2) est1n fuera

del conjunto $\mathcal{L} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1+n_2} | x_1 = 0\}$, esto indica que es negativa semidefinida en \mathcal{L}^c , el complemento de \mathcal{L} . Si $\varphi(t, t_0, x_0)$ permanece en \mathcal{L} por un intervalo de tiempo, entonces durante este intervalo de tiempo $B(t)x_2 = 0$, y por lo tanto $\dot{x}_2 = 0$, y $\dot{x}_1 = 0$. Esto implica que durante ese intervalo de tiempo $\dot{W}(t, x) = 0$. Entonces se concluye que $\dot{W}(t, x) \leq 0$ para todo tiempo, y por lo tanto el origen del sistema (2) es uniformemente estable. \square

Finalmente, de forma similar es posible mostrar que, cuando la condición de EP es satisfecha, el sistema (2) es Entrada Estados Estable (EEE), esto es, para el sistema perturbado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A(t)x_1 + B(t)x_2 + \delta_1(t) \\ \dot{x}_2 &= C(t)x_1 + \delta_2(t)\end{aligned}\quad (10)$$

cuando $\delta_1(t)$ y $\delta_2(t)$ son acotadas, entonces las trayectorias convergen a un vecindario del origen (Khalil, 2002). Esto muestra la robustez del algoritmo a perturbaciones acotadas o incertidumbres.

IV. APLICACIÓN AL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Varios problemas en control adaptable pueden ser convertidos a la forma (1) (Narendra y Annaswamy, 1989). En este documento se considera una formulación del problema de identificación de parámetros. Considere un sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{y} = \Gamma(t)\theta \quad (11)$$

donde y es una señal medible, $\Gamma(t)$ es un vector conocido de funciones acotadas continuas a tramos, y θ es un vector de parámetros constantes desconocidos a ser identificados. Nos restringimos al caso donde y es una variable escalar. El objetivo es estimar θ en tiempo finito siempre que $y(t)$ y $\Gamma(t)$ son conocidas, y $\Gamma(t)$ cumple la condición de EP (4). Debido a la estructura de (2) un estimador de parámetros en tiempo finito queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}} &= -k_1\phi_1(e_y) + \Gamma(t)\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -k_2\phi_2(e_y)\Gamma^T(t),\end{aligned}\quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_1(e_y) &= \mu_1|e_y|^{1/2}\text{sign}(e_y) + \mu_2e_y, \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \\ \phi_2(e_y) &= \frac{\mu_1^2}{2}\text{sign}(e_y) + \frac{3}{2}\mu_1\mu_2|e_y|^{1/2}\text{sign}(e_y) + \mu_2^2e_y,\end{aligned}$$

$e_y = \hat{y} - y$ es el error de estimación de la salida. $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ son constantes escalares positivas a ser diseñadas y $\hat{\theta}$ es el vector de estimación de parámetros. Definiendo el error de estimación de parámetros como $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$ la dinámica del error de estimación puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{e}_y &= -k_1\phi_1(e_y) + \Gamma(t)e_\theta \\ \dot{e}_\theta &= -k_2\phi_2(e_y)\Gamma^T(t),\end{aligned}\quad (13)$$

que tiene la misma estructura que (2). El Teorema 2 implica que para cualquier valor positivo de $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$, y si

$\Gamma(t)$ cumple con la condición de EP, entonces ambos errores e_y y e_θ convergen a cero en tiempo finito.

V. EJEMPLO

Se presenta un ejemplo para ilustrar la aplicación y el desempeño del algoritmo propuesto. Considere la dinámica del péndulo simple

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (14a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}u - \frac{Mgl}{J}\sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 \quad (14b)$$

donde x_1 es el ángulo entre el péndulo y la vertical, x_2 es la velocidad del ángulo, M es la masa del péndulo, g es la fuerza de gravedad, l es la longitud de la cuerda que sostiene la masa puntual y $J = Ml^2$ es la inercia de la masa. Asuma que ambos estados son medidos y que $\theta = \left[-\frac{V_s}{J} \quad -\frac{Mgl}{J} \quad \frac{1}{J}\right]$ es el vector de parámetros desconocidos. El estimador de parámetros propuesto es

$$\dot{\hat{x}}_2 = k_1\phi_1(e_{x_2}) + \Gamma\hat{\theta} \quad (15a)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -k_2\phi_2(e_{x_2})\Gamma^T \quad (15b)$$

donde $e_{x_2} = \hat{x}_2 - x_2$ es el error en el estado, $\Gamma = \begin{bmatrix} x_2 & \sin(x_1) & u \end{bmatrix}$ es el regresor, $\hat{\theta} = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{V}_s}{J} & -\frac{M\hat{g}l}{J} & \frac{1}{J} \end{bmatrix}$ es el vector de parámetros desconocidos, $\phi_1(\cdot)$ y $\phi_2(\cdot)$ son dados como en (2). Para la simulación se eligieron los siguientes valores para los parámetros, $M = 1,1$, $g = 9,815$, $l = 0,9$, $J = Ml^2 = 0,891$ y $V_s = 0,18$. El comportamiento del (clásico) algoritmo lineal (1), con $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 10$, es comparado con el comportamiento del nuevo algoritmo no lineal (2), con $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $\mu_1 = 3$ y $\mu_2 = 10$. La señal de entrada fue seleccionada como una suma de señales senoidales $u = \text{sen}(t) + \text{sen}(5t) + \text{sen}(10t)$. La entrada u se obtuvo experimentalmente, para hacer que el vector Γ tuviera al menos 2 frecuencias diferentes. En la Fig. 1 se muestra la convergencia de ambos algoritmos, el lineal y el no lineal, al valor real del parámetro $\hat{\theta}_1 = -\frac{\hat{V}_s}{J}$. De la misma forma, en las Fig. 2 y 3 se muestra la convergencia de los parámetros $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ a sus valores reales.

Consideremos una vez más el sistema (14), pero ahora los estados x_1 y x_2 estarán contaminados con ruido. Se considera el mismo error de estado e_{x_2} , regresor Γ y vector de parámetros constantes desconocidos θ . En el ejemplo anterior la diferencia era que para el algoritmo lineal $\mu_1 = 0$, mientras que para el algoritmo no lineal este parámetro era distinto de cero, obviamente al contaminar los estados con ruido el alta ganancia generada por la parte no lineal amplifica el ruido. Con el objetivo de hacer la comparación más justa, se aumentará la ganancia del algoritmo lineal para que la velocidad de convergencia de ambos algoritmos sea semejante, es decir las ganancias para el algoritmo no lineal permanecerán idénticas al algoritmo anterior, mientras que a la ganancia μ_2 del algoritmo lineal se le asignará el valor

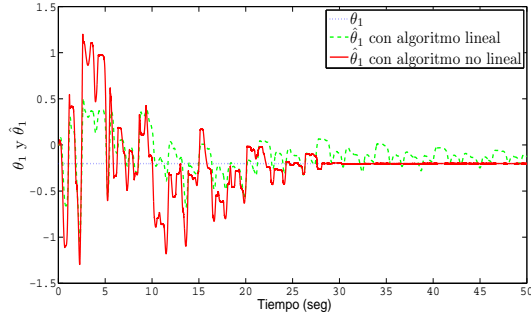


Figura 1: Estimación del parámetro θ_1 sin ruido.

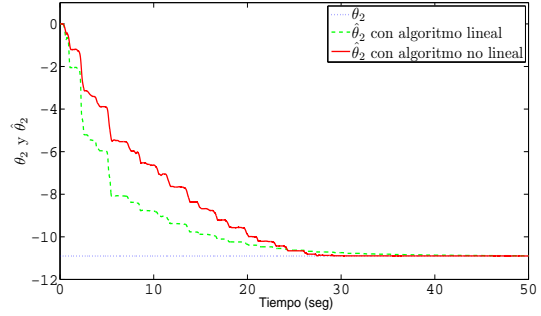


Figura 4: Estimación del parámetro θ_2 aumentando la ganancia μ_2 en el algoritmo lineal.

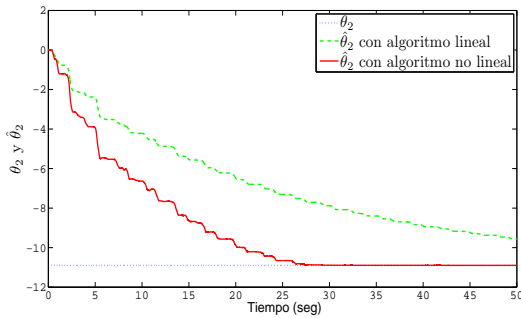


Figura 2: Estimación del parámetro θ_2 sin ruido.

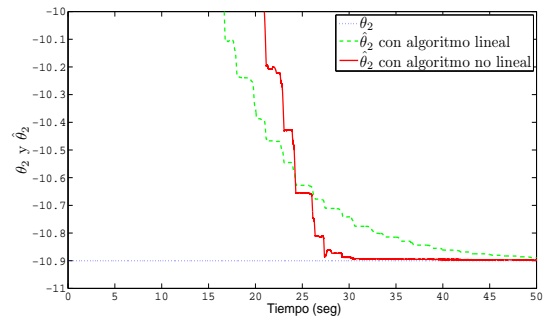


Figura 5: Acercamiento de la estimación del parámetro θ_2 aumentando la ganancia μ_2 en el algoritmo lineal.

de 50. En la Fig. 4 se muestra la estimación del parámetro θ_2 sin ruido (se omiten los otros 2 parámetros ya que este es el más representativo), se puede ver que el estimador lineal converge más rápido que el no lineal en un principio, pero debido a la convergencia en tiempo finito, la velocidad del estimador lineal se ve superada al final, esto último se ve de forma más clara en la Fig. 5. En la Fig. 6 se muestra la estimación de parámetros cuando las mediciones de los estados x_1 y x_2 tienen ruido. Se puede ver que el algoritmo no lineal es más afectado por el ruido a pesar de que el algoritmo no lineal converge más rápido cuando el ruido está ausente. Cabe señalar que la señal de ruido

tiene una amplitud aproximada de 0,06, el cual representa el 10% del valor de la amplitud máxima de la señal x_2 . En la tabla I se puede ver una comparación de los valores promedio y de los valores pico de las señales obtenidas con el algoritmo lineal y el no lineal, sobre el intervalo de 60 a 80 segundos, que es donde se ha considerado el estado estable de la estimación. En dicha tabla se puede ver que el valor promedio del algoritmo no lineal es mejor, esto se ve acentuado cuando parámetro es relativamente grande, como lo muestra el valor promedio del parámetro $\hat{\theta}_2$. Por otro lado el valor pico alrededor del valor promedio es menor en el algoritmo no lineal en todos los casos.

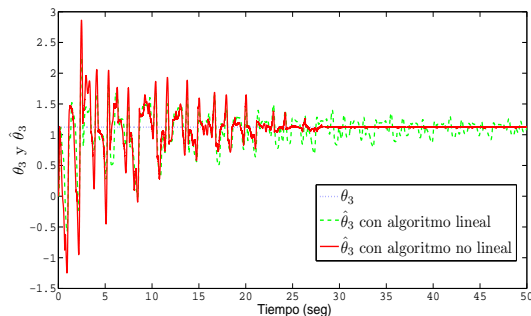


Figura 3: Estimación del parámetro θ_3 sin ruido.

Algoritmo	Valor promedio	Valor máximo
θ_1	-0.202	0
lineal $\hat{\theta}_1$	-0.2747	1.6431
no lineal $\hat{\theta}_1$	-0.1577	0.3883
θ_2	-10.9005	0
lineal $\hat{\theta}_2$	-3.4629	0.8087
no lineal $\hat{\theta}_2$	-7.7071	0.1822
θ_3	1.1224	0
lineal $\hat{\theta}_3$	1.0980	2.0576
no lineal $\hat{\theta}_3$	1.1084	0.5349

TABLA I: Tabla comparativa de algoritmos con ruido

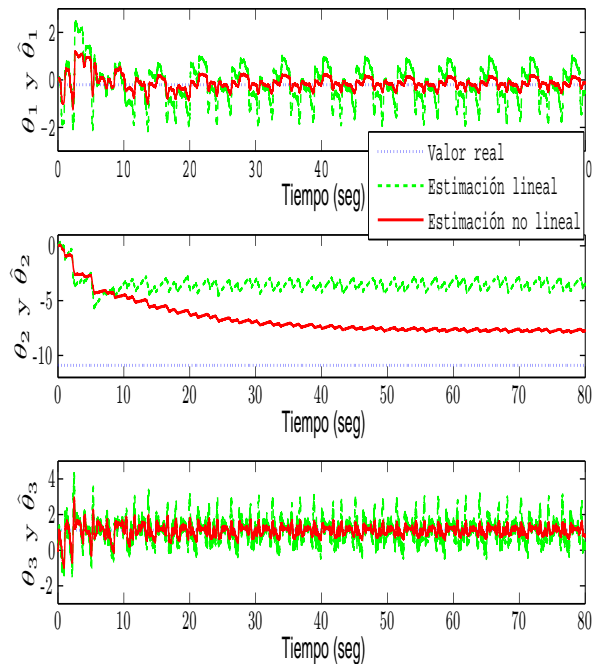


Figura 6: Estimación de parámetros con ruido.

VI. CONCLUSIONES

En este documento se presenta un nuevo algoritmo recursivo para estimar parámetros (constantes) en tiempo finito. Este algoritmo es una generalización de algoritmo Recursivo Cuadrático Lineal clásico, y se obtiene adicionando algunos términos no lineales y discontinuos a los lineales, tal que el algoritmo es capaz de converger en tiempo finito. Se muestra que si el regresor es de Excitación Persistente la convergencia en tiempo finito es alcanzada, y si la condición de EP está ausente el algoritmo mantiene estabilidad uniforme, i.e. la estimación paramétrica no diverge. Además, la robustez del algoritmo cuando perturbaciones acotadas están presentes es asegurada. Comparado con algoritmos previos para estimación de parámetros en tiempo finito es más simple de implementar y entender, puesto que incluye como caso especial el algoritmo clásico. En el ejemplo se puede ver que las ganancias del algoritmo lineal y no lineal se combinan para obtener un mejor desempeño del algoritmo no lineal bajo la presencia de ruido. Como trabajo a futuro se pretende hacer la comparación con otros algoritmos, para probar el desempeño de la propuesta presentada en este artículo.

VII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen atentamente el soporte financiero de CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), Project 51244 y CVU 270200, y Programa de Apoyo a

Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PA-PIIT) UNAM, beca IN117610.

REFERENCIAS

- Adetola, V. y M. Guay (2008). Finite-time parameter estimation in adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(3), 807–811.
- Bogachev, V. I. (2007). *Measure Theory*. Vol. I Berlin, Springer-Verlag. 491 p.
- Chen, J., G. Zhang y A. Li (2010). On-line parameter estimation for a class of time-varying continuous systems with bounded disturbances. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* Published on line 2010, DOI:10.1002/acs.1188.
- Davila, J., L. Fridman y A. Levant (2008). Second-order sliding modes observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(11), 1785–1789.
- Davila, J., L. Fridman y L. Poznyak (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control* **79**(10), 1251–1262.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand side*. Kluwer. Dordrech, The Netherlands. 304 p.
- Fridman, L., Moreno, J. A. y Iriarte, R., Eds. (2011). *Sliding Modes after the first decade of the 21th Century*. Cap. Lyapunov Approach for Analysis and Design of Second Order Sliding Mode Algorithms. to appear in 2011.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upsaddle River, New Jersey, 3rd. edition.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control* **58**(6), 1247–1263.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control.. *International Journal of Control* **76**(9/10), 924–941.
- Marino, R. y P. Tomei (1995). *Nonlinear Control Desing; Geometric, Adaptive & Robust*. London, Prentice-Hall.
- Moreno, J. A. (2009). Linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. *2009 6th Int. Conf. on Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE 2009)* pp. 12–17.
- Morgan, A. P. y K. S. Narendra (1977). On the stability of nonautonomous differential equations $\dot{x} = [A + B(t)]x$, with skew symmetric matrix $B(t)$. *SIAM J. Control and Optimization*. **15**(1), 163–176.
- M’Sirdi, N. K., A. Rabhi, L. Fridman, J. Davila y Y. Delanne (2008). Second order sliding mode observer for estimation of vehicle dynamic parameters. *International Journal Vehicle Design* **48**(3/4), 190–207.
- Narendra, K. S. y A. Annaswamy (1989). *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Poznyak, A. S. (2008). *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers*. Vol. 1: Deterministic Techniques.. Amsterdam, Elsevier. 774 p.
- Sastry, S. y M. Bodson (1989). *Adaptive Control Stability, Convergence and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Xu, Jian-Xiun, Yan-Jun Pan y Tong-Heng Lee (2003). A vss identification scheme for time-vaying parameters. *Automatica* **39**(4), 727–734.