

# Identificación de Parámetros No Lineales en Una Clase de Sistemas

Marcos A. González-Olvera \* Yu Tang \*\*

\* Universidad Autónoma de la Ciudad de México - San Lorenzo  
Tezonco. Iztapalapa, México DF. (e-mail:  
marcos.angel.gonzalez@uacm.edu.mx).

\*\* Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería.  
Av. Universidad 3000, Cd. de México (e-mail: tang@unam.mx).

---

## Resumen

En este trabajo presentamos un esquema de identificación para una clase de sistemas con parametrización no lineal. El esquema desarrollado consiste en identificadores en paralelo, cuya combinación estima el vector de parámetros en cada ecuación de estados, los cuales incorporan una parte proporcional y una integral, que tienen características de convergencia y robustez. El esquema además garantiza la estabilidad de la identificación bajo algunas condiciones relativamente simples en las funciones no lineales. Si además se cumple con la condición de excitación persistente, el algoritmo garantiza la convergencia exponencial a cero del error paramétrico. Se muestran ejemplos numéricos para demostrar la efectividad del esquema mostrado.

*Keywords:* Sistemas No Lineales, Identificación No Lineal.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos de los fenómenos a estudiar son de gran importancia en prácticamente cualquier disciplina, ya que a partir de ellos se puede efectuar el análisis del sistema, comprender su funcionamiento, realizar predicciones, e incluso diseñar estrategias de control y observación. Sin embargo, y en particular en el caso de sistemas físicos, aún cuando el modelado del sistema se obtiene siguiendo las restricciones físicas y conociendo las relaciones constitutivas de sus elementos, los valores reales de los parámetros no son siempre cognoscibles o determinados *a priori*. Por lo tanto, es necesario realizar experimentos sobre el sistema para estimar los dichos parámetros y entonces obtener una visión más realista del sistema. Este proceso es usualmente conocido como *identificación paramétrica*, el cual un problema diferente de la *identificación estructural*, el cual representa un problema más complejo, ya que no solo los parámetros deben de ser estimados, sino también deben reconstruirse el tipo de funciones que describen al sistema a partir de mediciones experimentales.

En el caso de sistemas lineales con parametrización lineal, existen en la literatura una gran cantidad de algoritmos y estrategias reportadas, como el método de Mínimos Cuadrados y sus derivados, análisis espectral, algoritmos basados en el gradiente, etcétera. Una revisión de ellos se puede encontrar en el trabajo de Pintelon et al. (2002), así como tutoriales en los libros de texto de Johansson (1993) y Ljung and Ljung (1999). Métodos más avanzados y actuales se pueden encontrar en el trabajo de Ljung (2005). Estas estrategias lineales aún pueden ser empleadas en cierta clase de sistemas no lineales que puedan

ser descritas mediante modelos de Volterra o Wiener, tanto en variables de estado o función de transferencia.

Sin embargo, cuando los sistemas tienen parametrizaciones no lineales (aún para sistemas lineales), los algoritmos tienden a ser más complejos, o solo ser útiles para un subespacio límite. En estos casos se suelen emplear algoritmos basados en el gradiente, pero tienden a ser relativamente lentos, no necesariamente convergentes y, en ciertos casos, inestables, como se puede encontrar en la discusión de Mastorocostas and Theocharis (2002). Para evitar estos problemas, se han desarrollado estrategias computacionales basadas en técnicas evolutivas, como los métodos genéticos (por ejemplo, el reportado por Holland (1992)). Sin embargo, estas estrategias suelen solo trabajar en torno a un grupo de parámetros sub-óptimos, y suelen ser muy demandantes desde el punto de vista computacional, además de que no garantizan la obtención de un mínimo global, sino únicamente local.

En el caso de representaciones mediante variables de estado, sistema con parametrización no lineal han sido un problema que ha ganado atención en los últimos años. En primer lugar, el problema de la representación lineal fue atacado en conjunto con el problema de control en los trabajos basados en control adaptable de Ioannou and Sun (1996); Middleton et al. (2002). Sin embargo, no es poco común el encontrar que la condición de excitación persistente es un problema a resolver en conjunto, dado que el control estabiliza al sistema y ya no se encuentra excitado, lo que en muchas ocasiones evita la convergencia paramétrica. En trabajos más recientes, como los llevados a cabo por Astolfi and Ortega (2003); Qu et al. (2006); Tyukin et al. (2007), se discuten algunos casos

de parametrización no lineal y las estrategias de control adaptable.

Algunas aproximaciones han considerado modelos de Hammerstein y Wiener igualmente, pero en ambos casos se considera que las no linealidades se encuentran concentradas solo en la señal de entrada o de salida como funciones estáticas, mientras que la dinámica del sistema permanece lineal, asumiendo la medición del estado. Esto claramente restringe en gran medida la clase de sistemas a identificar. De este modo, se han propuesto redes neuronales dinámicas y sistemas difusos para realizar la identificación estructural de las no linealidades de un sistema, como lo han reportado en sus trabajos Poznyak et al. (2006); Lin (1996); Mastorocostas and Theocharis (2002); Yu and Li (2004). En estos trabajos, las funciones desconocidas son aproximadas por estructuras no lineales en las cuales los parámetros a encontrar, si bien pueden ser no lineales, por lo general son identificados siguiendo una estrategia de linealización en los parámetros (en vez de en los estados). En consecuencia, se aplican métodos lineales tales como algoritmos elipsoidales o filtros de Kalman para determinar los valores que mejor logren aproximar a dichas funciones desconocidas.

Otros métodos han considerado aplicaciones de control donde se propone el empleo de observadores adaptables en diversas clases de sistemas no lineales, como lo han desarrollado Cho and Rajamani (2002); Zhang (2002); Besançon (2000). Sin embargo, en estos casos los parámetros continúan apareciendo en forma lineal en la ecuación de estados.

En este trabajo presentamos un algoritmo de identificación para una clase de sistemas no lineales en el cual los parámetros pueden aparecer en forma no lineal en las ecuaciones de estado. Se propone un algoritmo que incorpora identificadores que corren en paralelo para la estimación de los parámetros no lineales en cada ecuación de estado. El algoritmo de estimación consiste en una parte integral y una proporcional, siguiendo la idea de sus propiedades de robustez y convergencia mostradas previamente en los trabajos de Astolfi and Ortega (2003); Qu et al. (2006); Tyukin et al. (2007). Bajo condiciones relativamente sencillas en las funciones no lineales (como asegurar que las funciones donde se desee llevar a cabo la identificación sean monótonicamente crecientes o decrecientes en una parametrización lineal), se garantiza la estabilidad del algoritmo. Adicionalmente, se demuestra que el error de identificación de parámetros converge exponencialmente a cero bajo la condición de excitación persistente. Se muestran resultados numéricos para ilustrar la efectividad del algoritmo.

Este trabajo se divide en cinco secciones. En la Sección 2 se muestra el problema a atacar, así como el tipo de sistemas a estudiar. En la Sección 3 se presenta el algoritmo de identificación, así como la demostración de la estabilidad y convergencia del mismo. Para ilustrar el desempeño del algoritmo se muestran ejemplos numéricos en la Sección 4, finalizando con las Conclusiones y trabajo futuro en la Sección 5.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considérese el sistema no lineal de una-entrada-una-salida

$$\dot{\mathbf{x}} = \bar{f}(\mathbf{x}, u, \theta) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estados, y  $\theta \in \mathfrak{R}^{n_p}$  es el vector de parámetros desconocidos del sistema, donde las funciones  $\bar{f} : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^{n_p} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  son suaves en sus argumentos. El principal objetivo es el diseñar un esquema de identificación, así como las condiciones bajo las cuales el valor estimado  $\hat{\theta}$  converge asintóticamente a  $\theta$ , suponiendo que se tiene acceso a la medición completa del vector de estados.

Con el fin de simplificar el análisis del sistema, consideremos que se puede reescribir (1) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \Lambda \mathbf{x} + \bar{f}(\mathbf{x}, u, \theta) - \Lambda \mathbf{x}, \\ &\triangleq \Lambda \mathbf{x} + f(\mathbf{x}, u, \theta), \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$ ,  $\lambda_i < 0$ ,  $\forall i$  es una matriz de diseño. De esta forma, la ecuación de estados se reescribe como

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + f_i(\mathbf{x}, u, \theta). \quad (3)$$

Consideremos que el sistema no lineal pertenece a una clase de sistemas tal que satisface la siguiente suposición:

*Assumption 1.* La función  $f_i(\mathbf{x}, u, \theta)$  puede ser expresada y descompuesta en la forma

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}, u, \theta) &= f_{i,0}(\mathbf{x}, u) + f_{i,1}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,1}^T(\mathbf{x}, u)\theta_{i,1}) \\ &\quad + f_{i,2}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,2}^T(\mathbf{x}, u)\theta_{i,2}) + \dots \\ &\quad + f_{i,n_i}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,n_i}^T(\mathbf{x}, u)\theta_{i,n_i}) \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\varphi_{ij}(\mathbf{x}, u)$ ,  $\theta_{i,j} \in \mathfrak{R}^{n_{i,j}}$ . Existen funciones conocidas  $\alpha_{i,j}(\mathbf{x}, u) \in \mathfrak{R}^{n_{i,j}}$  tales que

$$\begin{aligned} &(-1)^{l_{i,j}} \alpha_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) (\theta_{i,j}^1 - \theta_{i,j}^2) \times, \\ &(f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T \theta_{i,j}^1) - f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T \theta_{i,j}^2)) > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

para  $\theta_{i,j}^1 \neq \theta_{i,j}^2$ , y  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $\theta = [\theta_{1,1}^T \dots \theta_{1,n_1}^T \dots \theta_{n,1}^T \dots \theta_{n,n_n}^T]$ . Nótese que  $l_{i,j} = 0$  si la función es monótonicamente creciente en su argumento  $\varphi_{i,j}^T \theta_{i,j}$ , y  $l_{i,j} = 1$  si es decreciente.

En otras palabras, la suposición anterior indica que la clase de sistemas a ser identificado puede ser escrito en una forma tal que, en primer lugar, una parte conocida sea separada aditivamente de las funciones con parámetros desconocidos. En segundo lugar, que las no linealidades cuyos parámetros sean desconocidos puedan ser descompuestas en la forma de una combinación lineal de funciones no lineales de los parámetros.

## 3. ESQUEMA DE IDENTIFICACIÓN

Con el fin de obtener un algoritmo para determinar los parámetros desconocidos  $\theta$ , denótese con  $\hat{\theta}_{i,j}$  el valor estimado de  $\theta_{i,j}$ . El algoritmo de identificación y las condiciones para la estabilidad y convergencia se indican en el siguiente teorema:

*Theorem 1.* Considérese el sistema (2) con estados medibles tal que satisface la Suposición 1. Entonces, el algoritmo desacoplado de estimación de parámetros

$$\hat{\theta}_{i,j} = \hat{\theta}_{i,j}^P + \hat{\theta}_{i,j}^I \quad (6)$$

$$\hat{\theta}_{i,j}^P = (-1)^{l_{i,j}+1} \Gamma_{i,j} \tilde{x}_{i,j} \alpha_{i,j}(\mathbf{x}, u) \quad (7)$$

$$\hat{\theta}_{i,j}^I = (-1)^{l_{i,j}} \lambda_i \Gamma_{i,j} \tilde{x}_{i,j} \alpha_{i,j}(\mathbf{x}, u) \quad (8)$$

con la matriz de ganancias  $\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^T > 0$ , garantiza que todas las señales permanecen acotadas, donde el estado *descompuesto* se define como

$$z_{i,j} = w_{i,j} x_i, \quad w_{i,j} \geq 0, \quad \sum_i w_{i,j} = 1. \quad (9)$$

Se establece entonces un observador para dicho estado *descompuesto*

$$\dot{\hat{z}}_{i,j} = \lambda_i \hat{z}_{i,j} + f_{i,j}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}), \quad (10)$$

donde  $\tilde{z}_{i,j} = \hat{z}_{i,j} - z_{i,j}$ .

Aún más, si  $\alpha_{i,j}(t) = \alpha_{i,j}(\mathbf{x}(t), u(t))$  cumple con la condición de excitación persistente, *i.e.*

$$\int_t^{t+L} \alpha_{i,j}(\tau) \alpha_{i,j}^T(\tau) d\tau \geq \delta I \quad (11)$$

para algún  $L, \delta > 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{i,j}(t) \rightarrow \theta_{i,j}$ .

*Proof.* A partir de la Suposición 1, y considerando la ecuación de estados (2) para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + f_{i,0}(\mathbf{x}, u) + \sum_{j=1}^{n_i} f_{i,j}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,j}^T \theta_{i,j}). \quad (12)$$

Defínase la *descomposición* del estado dada por (10), donde

$$z_{i,j} = w_{i,j} x_i, \quad (13)$$

y  $w_{i,j} = w_{i,j} \geq 0, \sum_i w_{i,j} = 1$ .

Defínase la dinámica de cada estado  $z_{i,j}$  en la forma

$$\dot{z}_{i,j} = \lambda_i z_{i,j} + f_{i,j}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \theta_{i,j}). \quad (14)$$

Constrúyase un observador para cada estado  $z_{i,j}$  con los parámetros identificados  $\hat{\theta}_{i,j}$

$$\dot{\hat{z}}_{i,j} = \lambda_i \hat{z}_{i,j} + f_{i,j}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}). \quad (15)$$

De esta forma, la dinámicas del error para cada estado  $\tilde{z}_i = \hat{z}_i - z_i$  se obtiene de las dos ecuaciones anteriores

$$\dot{\tilde{z}}_{i,j} = \lambda_i \tilde{z}_{i,j} + f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}) - f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \theta_{i,j}), \quad (16)$$

donde, con abuso de notación,

$$f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}) = f_{i,j}(\mathbf{x}, u, \varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}).$$

Definimos ahora el vector de parámetros  $\tilde{\theta}_{i,j} = \hat{\theta}_{i,j} - \theta_{i,j}$ . Entonces, la derivada con respecto del tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}_{i,j} &= \dot{\hat{\theta}}_{i,j}^P + \dot{\hat{\theta}}_{i,j}^I \\ &= \dot{\hat{\theta}}_{i,j}^P + \frac{\partial \hat{\theta}_{i,j}^P}{\partial \tilde{z}_{i,j}} (\lambda_i \tilde{z}_{i,j} + f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}) \\ &\quad - f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \theta_{i,j})). \end{aligned}$$

La Suposición 1 denota que las funciones  $f_{i,j}$  deben ser crecientes o decrecientes. Sin pérdida de generalidad y con fines de presentación, denotamos el caso de funciones crecientes  $f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u))$ , *i.e.*  $l_{i,j} = 0$ . En este caso, elegimos  $\dot{\hat{\theta}}_{i,j}^I = -\lambda \frac{\partial \hat{\theta}_{i,j}^P}{\partial \tilde{z}_{i,j}} \tilde{z}_{i,j}$ . La dinámica del error de parámetros es

$$\dot{\tilde{\theta}}_{i,j} = \frac{\partial \hat{\theta}_{i,j}^P}{\partial \tilde{z}_{i,j}} \left( f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}) - f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \theta_{i,j}) \right). \quad (17)$$

De esta forma, el algoritmo de estimación de parámetros se da en términos de la derivada parcial de  $\hat{\theta}_{i,j}^P(\tilde{z}_{i,j})$ , la cual da libertad de diseño, con el fin de cumplir con determinados requisitos de convergencia del algoritmo o robustez. En (7) se da una de las opciones posibles. Con esta elección, la parte integral está dada por (8), con lo que la dinámica del error de estimación es

$$\dot{\tilde{\theta}}_{i,j} = -\Gamma_{i,j} \alpha_{i,j} \left( f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \hat{\theta}_{i,j}) - f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \theta_{i,j}) \right). \quad (18)$$

En este caso particular, establecemos  $\alpha_{i,j}(\mathbf{x}, u) = \varphi_{i,j}(\mathbf{x}, u)$ , y considérese la función positiva definida

$$V_{i,j} = \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{i,j}^T \Gamma_{i,j}^{-1} \tilde{\theta}_{i,j}. \quad (19)$$

De esta forma, junto con la dinámica del error de estimación

$$\dot{V}_{i,j} = -\tilde{\theta}_{i,j}^T \varphi_{i,j}^T \left( f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T \hat{\theta}_{i,j}) - f_{i,j}(\varphi_{i,j}^T \theta_{i,j}) \right) < 0 \quad (20)$$

Por lo tanto, para cada  $\tilde{\theta}_{i,j} \in L_\infty$ . Integrando (19), se concluye que  $\tilde{\theta}_{i,j} \in L_2$ .

Ahora, si consideramos la función candidata de Lyapunov

$$V(x) = \sum_i \sum_j V_{i,j}, \quad (21)$$

como  $\dot{V} = \sum \frac{\partial V}{\partial \tilde{\theta}_{i,j}} \dot{\tilde{\theta}}_{i,j}$ , concluimos que  $\dot{V} < 0$ , given (19).

Finalmente, considérese la dinámica del error de estimación (18), la cual bajo la Suposición 1 puede escribirse como

$$\dot{\tilde{\theta}}_{i,j} = -\epsilon \Gamma_{i,j} \phi_{i,j}(\mathbf{x}, u) \phi_{i,j}^T(\mathbf{x}, u) \tilde{\theta}_{i,j}, \quad (22)$$

para algún  $\epsilon > 0$ . Por lo tanto, bajo la condición de excitación persistente (11), el error de estimación tiende exponencialmente a cero (Ioannou and Sun (1996)). Por lo tanto, dado que la dinámica del error de estados tiene una estabilidad asintótica bajo una perturbación  $L_2$ , entonces el error es también asintóticamente convergente a cero (Khalil (2002)).

◇

*Nota 1.* Nótese que en el desarrollo del algoritmo es necesario definir una descomposición de los estados dado por la (10). Por simplicidad y claridad, los pesos se eligen como constantes. Sin embargo, en algunas aplicaciones puede ser conveniente emplearlos como funciones de los estados o de funciones externas conocidas, siempre y cuando cumplan con la condición (13). Esto provee de mayor flexibilidad en aplicaciones en las que se requiera identificar sistemas no lineales de orden mayor con múltiples vectores de parámetros desconocidos, o incluso estructuras de identificación neuro-difusas, como se ilustra en la siguiente sección.

*Nota 2.* Como se indica en la prueba del Teorema 1, el algoritmo de estimación se da en términos de una

derivada parcial  $\frac{\partial \hat{\theta}_{i,j}^P}{\partial z_{i,j}}$ , lo cual provee al diseñador con un mayor grado de libertad en el caso de requerir cumplir con determinadas condiciones de convergencia o robustez (considerando que las perturbaciones o el ruido del sistema se consideren en (1), aunque se muestra una elección en particular en (7)).

#### 4. EJEMPLOS

Con el fin de mostrar la efectividad del algoritmo de identificación presentado, se muestra su aplicación en dos sistemas no lineales. El primero de ellos consiste en un modelo simple de fricción no lineal, donde los parámetros desconocidos aparecen tanto de manera lineal como no lineal. El segundo toma una estructura más compleja, dada por una red neuronal dinámica, donde todos los parámetros aparecen de forma no lineal.

##### 4.1 Modelo de fricción no lineal

En este ejemplo consideramos un modelo mecánico simple con fricción no lineal con parametrización tanto lineal como no lineal. El sistema mecánico es un sistema simple masa-amortiguador con fricción no lineal y ganancia desconocida del actuador:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m}\sigma(\theta_1 x_1) + \frac{\theta_2}{m}u(t) \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Se consideran como los parámetros del sistema  $b = 1 \left[\frac{Ns}{m}\right]$ ,  $m = 2 \text{ kg}$ , mientras que la función no lineal se define como  $\sigma(\theta_1 x_1) = \tan^{-1}(\theta_1 x_1)$ . El sistema es excitado mediante una función  $u(t) = 0,5 \sin(20t)[V]$ , y los valores de los parámetros nominales  $\theta_1 = 2,5 \left[\frac{s}{m}\right]$  and  $\theta_2 = 3 \left[\frac{N}{V}\right]$ . Para aplicar (6), (7) y (8), modificamos la representación del sistema mediante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \underbrace{(-\lambda_1 x_1)}_{f_{1,0}} + \underbrace{\left(-\frac{b}{m}\sigma(\theta_1 x_1)\right)}_{f_{1,1}} + \underbrace{\frac{\theta_2}{m}u}_{f_{1,2}} \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + \underbrace{(-\lambda_2 x_2 + x_1)}_{f_{2,0}} \end{aligned}$$

Entonces, el *sistema identificado* es

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \lambda_1 \hat{x}_1 + f_{1,0} + f_{1,1} + f_{1,2} \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \lambda_2 \hat{x}_2 + f_{2,0}. \end{aligned}$$

Para fines de simulación y presentación, el algoritmo se implementa empleando  $\lambda_1 = \lambda_2 = -20$ ,  $\Gamma_{i,j} = 10^4 I_{2 \times 2}$ ,  $w_{i,j} = \frac{1}{3}$ ,  $i = 1, 2$  y  $j = 1, 2, 3$ . Los resultados se muestran en la Fig. 1, donde se puede observar que los valores identificados de los parámetros convergen en forma asintótica a sus valores nominales.

##### 4.2 Red neuronal dinámica de una sola capa

En este ejemplo el algoritmo se prueba en la identificación de una red neuronal dinámica. En comparación con su contraparte estática, las redes neuronales dinámicas se describen mediante un sistema no lineal dinámico basado en neuronas. Un buen estudio sobre algunas

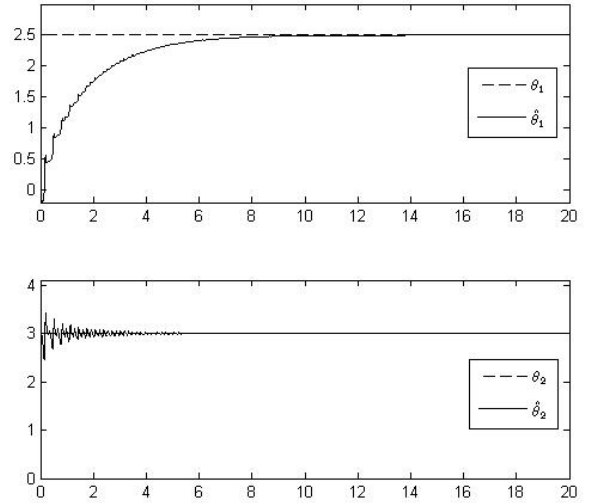


Figura 1. Resultados de identificación: Sistema mecánico

de las estructuras basadas en este tipo de estrategias se puede encontrar en el libro Nelles (2001), mientras que algunas estructuras recientes han sido desarrolladas por Yu and Li (2004); Poznyak et al. (2001); Narendra and Parthasarathy (1990); Juang (2002); Mastorocostas and Theocharis (2002); Gonzalez-Olvera and Tang (2010). En este caso, la red neuro-difusa es definida por funciones de neuronas gaussianas mostradas en la Fig. 2, y cada ecuación de estados posee tanto una parte lineal como dinámica no lineal provista por la red neuronal en la segunda capa, definida como:

$${}_{1,1}O_{2,1} = e^{-\theta_{1,1,1}(x_1 - 0,5)^2} \quad (24)$$

$${}_{1,1}O_{2,2} = e^{-\theta_{1,2,1}x_2^2} \quad (25)$$

$${}_{1,1}O_{2,3} = e^{-\theta_{1,2,1}x_1^2} \quad (26)$$

$${}_{1,2}O_{2,4} = e^{-\theta_{1,2,2}(x_2 + 0,5)^2} \quad (27)$$

$${}_{1,2}O_{2,5} = e^{-\theta_{2,1,1}x_1^2} \quad (28)$$

$${}_{1,2}O_{2,6} = e^{-\theta_{2,1,2}(x_2 + 0,4)^2} \quad (29)$$

La tercer capa se define como una neurona multiplicativa,

$${}_{2}O_{3,i} = {}_{1}O_{2,i} \cdot {}_{1}O_{2,i+3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (30)$$

La última se define como una neurona aditiva, en la cual

$${}_{3}O_{4,1} = \lambda_1 x_1 + u + {}_{2}O_{3,1} + {}_{2}O_{3,2}, \quad (31)$$

$${}_{3}O_{4,2} = \lambda_2 x_2 + u + {}_{2}O_{3,3}. \quad (32)$$

La red neuronal dinámica se define con los valores  $\theta_{1,1} = [1, 3, 1]^T$ ,  $\theta_{1,2} = [1, 1, 0, 6]^T$ ,  $\theta_{2,1} = [1, 5, 0, 8]^T$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$  y  $\Gamma_{i,j} = 5 \cdot 10^3 I_{2 \times 2}$ ,  $\forall i, j$ . Nótese que para este ejemplo, todos los parámetros aparecen de forma no lineal. Para el proceso de identificación, la red es excitada por una señal pseudoaleatoria con potencia 2, con tiempo de muestreo de 0,1 ms. Los valores iniciales para todos los valores identificados se establecen en cero.

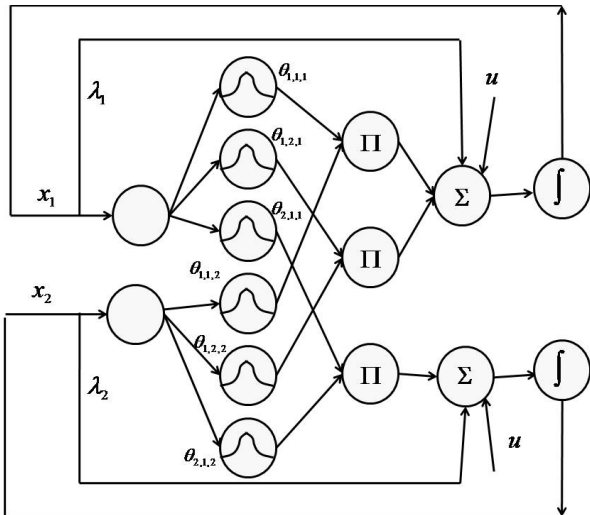


Figura 2. Red Neuronal Dinámica

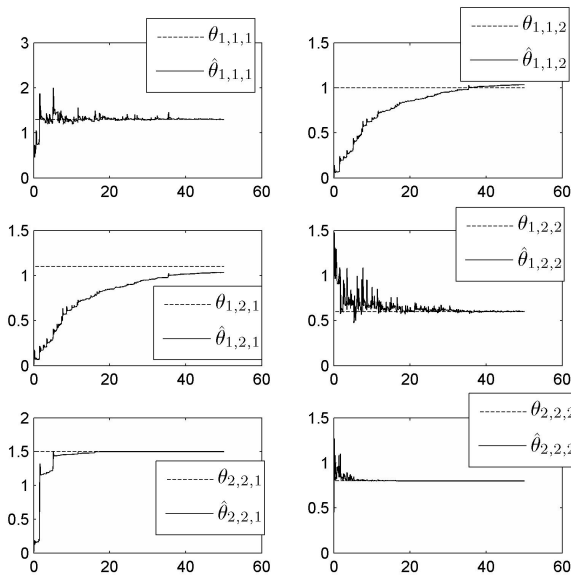


Figura 3. Resultados de identificación: Red Neuronal Dinámica

Se muestran los resultados de simulación en la Fig. 3, donde se aprecia que durante el proceso de identificación todos los parámetros tienden a sus valores reales. Nótese que no es necesario realizar proceso alguno de linealización paramétrica y que el algoritmo aprovecha la estructura no lineal del sistema para el entrenamiento de los mismos, y que bajo una condición de excitación persistente se logra determinar el mínimo global, no local.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un esquema novedoso de identificación paramétrica de una clase de sistemas no lineales con parametrización no lineal, donde se debe satisfacer la condición de ser crecientes o decrecientes en el argumento, el cual puede a su vez ser una parametrización lineal del vector de parámetros desconocidos. El algoritmo propuesto considera una descomposición doble, tanto del

vector de parámetros identificados como de la ecuación de estados, lo que permite incorporar identificadores en paralelo desacoplados, el cual se demuestra ser asintóticamente estable. Se proveen dos ejemplos numéricos para demostrar la efectividad del algoritmo propuesto y se discuten algunas de sus aplicaciones.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Los autores desean agradecer por su apoyo a los proyectos financiados por el Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal ICyTDF, a través del proyecto PIUTE10-141, a CONACyT mediante el proyecto 129800, y al proyecto PAPIIT-UNAM IN120009.

## REFERENCIAS

- Astolfi, A. and Ortega, R. (2003). Immersion and invariance- A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4), 590–606.
- Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & control letters*, 41(4), 271–280.
- Cho, Y. and Rajamani, R. (2002). A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(4), 534–537.
- Gonzalez-Olvera, M. and Tang, Y. (2010). Black-box identification of a class of nonlinear systems by a recurrent neurofuzzy network. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 21(4), 672–679.
- Holland, J. (1992). *Adaptation in natural and artificial systems*.
- Ioannou, P. and Sun, J. (1996). *Robust adaptive control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Johansson, R. (1993). *System Modeling and Identification*. Prentice Hall Information and System Sciences. Prentice Hall, 1st edition.
- Juang, C.F. (2002). A tsk-type recurrent fuzzy network for dynamic systems processing by neural network and genetic algorithms. *IEEE Transactions of Fuzzy Systems*, 10(2), 155–170.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- Lin, C.T. (1996). *Neural Fuzzy Systems: a neuro-fuzzy synergism to intelligent systems*. Prentice Hall, 1st edition.
- Ljung, L. (2005). State of the art in linear system identification: Time and frequency domain methods. In *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, volume 1, 650–660. IEEE.
- Ljung, L. and Ljung, E. (1999). *System identification: theory for the user*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ.
- Mastorocostas, P.A. and Theocharis, J.B. (2002). A recurrent fuzzy-neural model for dynamic system identification. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 32(2), 176–190.
- Middleton, R., Goodwin, G., Hill, D., and Mayne, D. (2002). Design issues in adaptive control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 33(1), 50–58.
- Narendra, K. and Parthasarathy, K. (1990). Identification and control of dynamical systems using neural networks. *IEEE Tras. Neural Networks*, 1, 4–27.

- Nelles, O. (2001). *Nonlinear System Identification*. Springer, Berlin.
- Pintelon, R., Guillaume, P., Rolain, Y., Schoukens, J., and Van Hamme, H. (2002). Parametric identification of transfer functions in the frequency domain: a survey. In *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, 557–566. IEEE.
- Poznyak, A., Poznyak, T., and Chairez, I. (2006). Dynamic neural observers and their application for identification and purification of water by ozone. *Automation and Remote Control*, 67(6), 887–899.
- Poznyak, A., Sanchez, E., and Yu, W. (2001). *Differential Neural Networks for Robust Nonlinear Control: Identification, State Estimation and Trajectory Tracking*. World Scientific.
- Qu, Z., Hull, R., and Wang, J. (2006). Globally stabilizing adaptive control design for nonlinearly-parameterized systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(6), 1073–1079.
- Tyukin, I., Prokhorov, D., and van Leeuwen, C. (2007). Adaptation and parameter estimation in systems with unstable target dynamics and nonlinear parametrization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(9), 1543–1559.
- Yu, W. and Li, X. (2004). Fuzzy identification using fuzzy neural network. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 12(3).
- Zhang, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear-time-varying systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(3), 525–529.