

Aproximación mediante Método de Tustin para Diagnóstico de Fallas en Sistemas Muestreados

A. C. Tovar Luna, E. Alcorta García
Posgrado en Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Universidad Autónoma de Nuevo León, México
Apdo. Postal 140-F, Cd. Universitaria, CP 66451
alcrisnova@gmail.com, efrain.alcortagr@uanl.edu.mx

Resumen—Las técnicas de detección y localización de fallas frecuentemente utilizan modelos discretos equivalentes para el diseño e implementación, aún y cuando el sistema a ser supervisado sea de tiempo continuo; debido a esto, se presenta una reducción de la localizabilidad de fallas debido al acoplamiento provocado por la discretización. En este trabajo se presenta un método alternativo para el diagnóstico de fallas, usando sólo los datos muestreados de entrada-salida y el modelo original del sistema, con el cual no se observa el problema antes mencionado. Se utiliza un ejemplo para mostrar las ventajas del método propuesto.

Palabras clave: sistemas muestreados, diagnóstico de fallas, desacoplo, falla.

I. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el diagnóstico de fallas ha formado parte importante de los sistemas de seguridad de los procesos industriales ya que eleva la confiabilidad de éstos, como se puede apreciar en (Basseville y I. Nikiforov, 1993; Gertler, 1998; Chen y Patton, 1999; Blanke *et al.*, 2006; Isermann, 2006; Ding, 2008; Cruz Victoria *et al.*, 2008). Estas técnicas pueden utilizar muestras de datos gracias a las facilidades tecnológicas de la actualidad, aunque el sistema analizado trabaje en tiempo continuo.

Como está descrito en (Izadi *et al.*, 2005), los esquemas de diagnóstico para sistemas muestreados usan para el diseño, ya sea el modelo de tiempo continuo haciendo implementación en tiempo discreto o bien, un diseño basado en un equivalente discreto del sistema bajo supervisión (Chen y Francis, 1995).

El diagnóstico de fallas de sistemas muestreados fue considerado primero en (Viswanadham y Minto, 1990), cuyo enfoque de solución usa un espacio de paridad considerando sólo fallas de actuador y de sensor.

Recientemente se han introducido métodos *directos* que toman en cuenta el efecto de las fallas o perturbaciones entre los instantes de muestreo (Zhang y Ding, 2008). Por ejemplo, en (Zhang *et al.*, 2001) y (Zhang *et al.*, 2003) se introdujo un operador para describir el comportamiento entre instantes de muestreo y se presentó una solución óptima utilizando espacio de paridad. La propuesta de (Zhang *et al.*, 2002a) es utilizar optimización H_∞ .

El caso de sistemas muestreados con retardos de tiempo ha sido estudiado en (Zhang *et al.*, 2002b) usando también el espacio de paridad. Un enfoque de identificación de subespacio basado en integración numérica fue propuesto en (Li *et al.*, 2003). (Izadi *et al.*, 2005) considera una interesante norma invariante de discretización para detección de fallas en sistemas muestreados. Filtros de detección de fallas para sistemas con muestreo múltiple se proponen en (Zhong *et al.*, 2006). En (Izadi *et al.*, 2006) se considera un enfoque alternativo de optimización H_∞ para detección de fallas en sistemas muestreados.

Un enfoque libre del modelo para detección de fallas de sistemas continuos a sistemas muestreados ha sido propuesto en (Zhang y Ding, 2007). (Izadi *et al.*, 2008) estudia un método basado en el espacio de paridad para sistemas muestreados irregularmente. Como se reconoce en (Zhang y Ding, 2008), los enfoques directos basados en el modelo discreto considerados, tienen localizabilidad reducida con respecto a la localización del modelo en tiempo continuo. Dos excepciones son los métodos dados en (Li *et al.*, 2003) y (Zhang y Ding, 2007), en los cuales la localizabilidad es similar al modelo de tiempo continuo correspondiente. De cualquier forma, en ambos casos se requieren aproximaciones numéricas.

En este trabajo se presenta un método indirecto alternativo para el diagnóstico de fallas, usando sólo los datos muestreados de entrada-salida y el modelo original del sistema, con el cual no se observa una reducción de la localizabilidad de las fallas. Utilizamos un sistema equivalente discreto y desacoplamos éste para obtener subsistemas sensibles a una sola falla; para mostrar las ventajas del método, se utiliza un ejemplo.

La estructura de este trabajo está conformada por una sección (sección II) que aclara y describe la naturaleza del problema estudiado; en la sección III se desarrolla el método de solución propuesto. También se presenta un ejemplo de aplicación en la sección IV y se muestra la conclusión en la sección V.

II. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las técnicas de diagnóstico de fallas para sistemas muestreados existentes suelen basarse en discretizaciones de sistemas continuos; esto provoca que el número de fallas que pueden aislarse con el modelo muestreado sea menor que el que se puede aislar si se considera el modelo continuo correspondiente.

Considerando un modelo en espacio de estados para un sistema lineal continuo invariante en el tiempo y con fallas aditivas dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E_d d(t) + E_f f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + F_d d(t) + F_f f(t), \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida, $u \in \mathbb{R}^p$ el vector de entrada, $f \in \mathbb{R}^s$ el vector de fallas y $d \in \mathbb{R}^v$ el vector de perturbaciones.

El sistema equivalente en tiempo discreto resulta en:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) + \bar{d}(t) + \bar{f}(t) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + F_d d(k) + F_f f(k) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\quad (2)$$

donde T_s es el período de muestreo y:

$$A_d = e^{AT_s} \quad (3)$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B d\tau \quad (4)$$

$$\bar{f}(t) = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau} E_f f(kT_s + \tau) d\tau \quad (5)$$

$$\bar{d}(t) = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau} E_d d(kT_s + \tau) d\tau \quad (6)$$

además, se supone que la entrada es invariante al período de muestreo ($u(kT_s + \tau) = u(k)$ para $0 < \tau \leq T_s$). Note que los términos $\bar{f}(t)$ y $\bar{d}(t)$ (dados por (5) y (6)) envuelven una convolución y cada término del vector resultante depende en general de las fallas $f(t)$ y perturbaciones $d(t)$ respectivamente.

Como se puntualiza en (Zhang y Ding, 2008), en los sistemas muestreados hay una diferencia importante entre $u(t)$ y $f(t)$. Debido al convertidor D/A, $u(t)$ es una señal constante por tramos; la influencia de $u(t)$ sobre $y(t)$ es conocida y por ello puede ser completamente compensada en la generación residual. En cambio, $f(t)$ y $d(t)$ son señales continuas desconocidas; entonces, la clave es estudiar la influencia de éstas sobre la señal de salida muestreada en tiempo discreto $y(k)$ y sus señales residuales $r(k)$. Además, existe un acoplamiento entre las fallas en el modelo en tiempo discreto con respecto al modelo en tiempo continuo.

Observe que si una falla es de tipo escalón, el término (5) podría simplificarse resultando en

$$\bar{f}(t) = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau} E_f d\tau f(kT_s) \quad (7)$$

bajo el supuesto de que la falla ocurre al tiempo $t = kT_s$. Si no es así, la relación (7) sólo es una aproximación para el tiempo en el que ocurre la falla; ésto es válido también para las perturbaciones $d(t)$ tipo escalón.

La idea consiste en usar la aproximación de la derivada (transformada bilineal) para encontrar el equivalente discreto del sistema descrito en (5), en cuyo caso el acoplamiento de las fallas mediante la convolución no ocurre, permitiendo desacoplarlas.

III. SOLUCIÓN PROPUESTA

El concepto principal que proponemos es implementar una discretización aproximada al sistema representado en la ecuación (5) utilizando el *Método de Tustin* (transformación bilineal), ya que éste preserva la estabilidad del modelo continuo para $T_s > 0$ (ver (Dabroom y Khalil, 1999)) y no existe acoplamiento de fallas.

III-A. Algoritmo propuesto

El esquema propuesto se resume en el siguiente algoritmo:

Esquema de Diseño para Diagnóstico de Fallas en Sistemas Muestreados

1. Obtener un sistema equivalente discreto usando la **aproximación de Tustin (transformación bilineal)**.
2. Usando una técnica inspirada en el diseño de observadores para el desacoplamiento de perturbaciones (ver (Hou y Müller, 1994)), obtener un conjunto de subsistemas, los cuales son cada uno, sensible a una falla en particular.
3. Usar alguna técnica de diseño residual basada en el modelo para cada subsistema.
4. Diseñar una evaluación residual (función de evaluación y umbral) para cada subsistema en tiempo discreto.

Considerando el sistema (1), su transformada de Laplace está dada por:

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s) + E_d D(s) + E_f F(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) + F_d D(s) + F_f F(s)\end{aligned}\quad (8)$$

Ahora sustituimos en la ecuación (8), como en (Franklin et al., 1992), la aproximación de s de acuerdo al *Método de Tustin*:

$$s \leftarrow \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (9)$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}X(s) &= AX(s) + BU(s) + E_f F(s) + E_d D(s) \\ (z-1)X(s) &= \frac{AT_s}{2}(z+1)X(s) + \frac{BT_s}{2}(z+1)U(s) \\ &\quad + \frac{E_f T_s}{2}(z+1)F(s) \\ &\quad + \frac{E_d T_s}{2}(z+1)D(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) + F_f F(s) + F_d D(s)\end{aligned}$$

La ecuación en el dominio del tiempo para el estado es:

$$\begin{aligned} x(k+1) - x(k) &= \frac{AT_s}{2}(x(k+1) + x(k)) \\ &+ \frac{BT_s}{2}(u(k+1) + u(k)) \\ &+ \frac{E_f T_s}{2}(f(k+1) + f(k)) \\ &+ \frac{E_d T_s}{2}(d(k+1) + d(k)) \end{aligned}$$

Definiendo todos los términos de $k+1$ como $w(k+1)$, el sistema resulta en:

$$\begin{aligned} w(k+1) &= \Phi w(k) + \Gamma u(k) + \Sigma_f f(k) + \Sigma_d d(k) \quad (10) \\ y(k) &= Hw(k) + Ju(k) + \Theta_f f(k) + \Theta_d d(k) \quad (11) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi &:= \left(I + \frac{AT_s}{2} \right) \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1}, \\ \Gamma &:= \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1} B \sqrt{T_s}, \\ \Sigma_f &:= \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1} E_f \sqrt{T_s}, \\ \Sigma_d &:= \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1} E_d \sqrt{T_s}, \\ H &:= \sqrt{T_s} C \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1}, \\ J &:= D + C \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1} \frac{BT_s}{2}, \\ \Theta_f &:= F_f + C \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1} \frac{E_f T_s}{2}, \\ \Theta_d &:= F_d + C \left(I - \frac{AT_s}{2} \right)^{-1} \frac{E_d T_s}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(k+1) &:= x(k+1) - \frac{AT_s}{2}x(k+1) - \frac{BT_s}{2}u(k+1) \\ &- \frac{E_f T_s}{2}f(k+1) - \frac{E_d T_s}{2}d(k+1) \end{aligned}$$

En seguida, usamos alguna técnica de desacoplamiento para obtener cada uno de los subsistemas sensibles a la falla o perturbación, según sea el caso. La técnica que utilizamos está basada en el trabajo propuesto en (Hou y Müller, 1994), con la cual es posible desacoplar fallas que se presenten en la salida pero haciendo las modificaciones necesarias para aplicarse al diagnóstico de fallas.

Con la finalidad de mostrar la forma de hacer el desacoplamiento, se considera que $d(t)$ (propuesta en (Hou y Müller, 1994)) contiene también fallas y se desea obtener un subsistema desacoplado de $f(t)$ y sensible a $d(t)$. El punto de inicio es obtener una representación de $f(t)$. Tomando el sistema de las ecuaciones (10) y (11), de acuerdo a la teoría de matrices (Ben-Israel y Greville, 2003), la solución

generalizada de $f(k)$ para (11) es:

$$\begin{aligned} f(k) &= \Theta_f^- (y(k) - Hw(k) - Ju(k) - \Theta_d d(k)) \\ &+ (I_s - \Theta_f^- \Theta_f) \tilde{f}(k) \end{aligned} \quad (12)$$

donde Θ_f^- es una matriz inversa generalizada de Θ_f satisfaciendo $\Theta_f \Theta_f^- \Theta_f = \Theta_f$; $\tilde{f}(k)$ puede considerarse un nuevo vector de fallas de dimensión q , I_s es una matriz identidad de dimensión s .

Sustituyendo (12) en la ecuación (10) resulta:

$$\begin{aligned} w(k+1) &= (\Phi - \Sigma_f \Theta_f^- H)w(k) + (\Gamma - \Sigma_f \Theta_f^- J)u(k) \\ &+ (\Sigma_d - \Sigma_f \Theta_f^- \Theta_d)d(k) + \Sigma_f \Theta_f^- y(k) \\ &+ \Sigma_f (I_s - \Theta_f^- \Theta_f) \tilde{f}(k) \end{aligned} \quad (13)$$

Premultiplicando la ecuación (11) por $(I_m - \Theta_f \Theta_f^-)$:

$$\bar{y}(k) = \bar{C}w(k) + \bar{D}u(k) + \bar{F}_d d(k) \quad (14)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{C} &= (I_m - \Theta_f \Theta_f^-)H, & \bar{D} &= (I_m - \Theta_f \Theta_f^-)J, \\ \bar{F}_d &= (I_m - \Theta_f \Theta_f^-)\Theta_d, & \bar{y}(k) &= (I_m - \Theta_f \Theta_f^-)y \end{aligned}$$

I_m es una matriz identidad de dimensión m . La ecuación (14) describe una nueva matriz de salida libre de fallas.

Ahora, premultiplicando (13) por \bar{C} se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{y}(k+1) &= \bar{C}(\Phi - \Sigma_f \Theta_f^- H)w(k) \\ &+ \bar{C}(\Gamma - \Sigma_f \Theta_f^- J)u(k) + \bar{C}\Sigma_f \Theta_f^- y(k) \\ &+ \bar{C}(\Sigma_d - \Sigma_f \Theta_f^- \Theta_d)d(k) \\ &+ \bar{C}\Sigma_f (I_s - \Theta_f^- \Theta_f) \tilde{f}(k) \end{aligned} \quad (15)$$

La solución $\tilde{f}(k)$ para (15) está dada por

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= [\bar{C}\Sigma_f (I_s - \Theta_f^- \Theta_f)]^{-1} [\bar{y}(k+1) \\ &- \bar{C}(\Phi - \Sigma_f \Theta_f^- H)w(k) - \bar{C}(\Gamma - \Sigma_f \Theta_f^- J)u(k) \\ &- \bar{C}\Sigma_f \Theta_f^- y(k) - \bar{C}(\Sigma_d - \Sigma_f \Theta_f^- \Theta_d)d(k)] \\ &+ \{I_s - [\bar{C}\Sigma_f (I_s - \Theta_f^- \Theta_f)]^{-1} [\bar{C}\Sigma_f (I_s \\ &- \Theta_f^- \Theta_f)]\} \hat{f}(k) \end{aligned} \quad (16)$$

donde $\hat{f}(k)$ es un nuevo vector de fallas. Sustituyendo (16) en la ecuación (13) resulta

$$\begin{aligned} w(k+1) &= \bar{A}w(k) + (I_n - \bar{B}\bar{C})(\Gamma - \Sigma_f \Theta_f^- J)u(k) \\ &+ (I_n - \bar{B}\bar{C})\Sigma_f \Theta_f^- y(k) \\ &+ (I_n - \bar{B}\bar{C})(\Sigma_d - \Sigma_f \Theta_f^- \Theta_d)d(k) \\ &+ \bar{B}(I_m - \Theta_f \Theta_f^-)y(k+1) \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (I_n - \bar{B}\bar{C})(\Phi - \Sigma_f \Theta_f^- H), \\ \bar{B} &= \Sigma_f (I_s - \Theta_f^- \Theta_f) [\bar{C}\Sigma_f (I_s - \Theta_f^- \Theta_f)]^{-1} \\ \text{con} & \quad (I_n - \bar{B}\bar{C})\Sigma_f (I_s - \Theta_f^- \Theta_f) = 0 \end{aligned}$$

Así, el sistema con fallas desacopladas está dado por:

$$\begin{aligned} w(k+1) &= \bar{A}w(k) + (I_n - \bar{B}\bar{C})(\Gamma - \Sigma_f \Theta_f^- J)u(k) \\ &\quad + (I_n - \bar{B}\bar{C})\Sigma_f \Theta_f^- y(k) \\ &\quad + (I_n - \bar{B}\bar{C})(\Sigma_d - \Sigma_f \Theta_f^- \Theta_d)d(k) \\ &\quad + \bar{B}(I_m - \Theta_f \Theta_f^-)y(k+1) \\ \bar{y}(k) &= \bar{C}w(k) + \bar{D}u(k) + \bar{F}_d d(k) \end{aligned} \quad (18)$$

La ecuación $(I_n - \bar{B}\bar{C})\Sigma_f(I_s - \Theta_f^- \Theta_f) = 0$ representa una condición de existencia del desacoplamiento, si no se cumple, $\hat{f}(k)$ debe volver a iterarse con el mismo procedimiento hasta que la condición se cumpla (y sea posible desacoplar) o se haga imposible el procedimiento (desacoplamiento imposible). Para la detectabilidad de fallas se requiere que el sistema (18) sea de salida controlable, (ver (Chen, 1984)); de forma alternativa, una condición suficiente es que el estado sea completamente observable.

Después, se utiliza una técnica de diseño y evaluación residual ya sea basada en el modelo o en la técnica de espacio de paridad, para cada subsistema.

Una desventaja de este método es que no en todos los casos es posible desacoplar las fallas, esto también depende del período de muestreo considerado; sin embargo, las operaciones utilizadas son sencillas.

IV. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para mostrar las ventajas de la aproximación para detección y localización de fallas en sistemas muestreados propuesta en este trabajo, se considera el sistema descrito en (Qiu *et al.*, 2009), el cual aparece con frecuencia como ejemplo en los trabajos relacionados con diagnóstico de sistemas muestreados.

Dado el modelo de una planta en la forma (1) con:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; E_d = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ E_f &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ F_d &= F_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Para mostrar de forma gráfica los resultados obtenidos con este método y poder compararlo con lo que se obtuvo en (Qiu *et al.*, 2009), se considera $u(t)$ como un escalón unitario, $d(t)$ ruido blanco con varianza de 1 y $f(t)$ una señal tipo escalón de amplitud 10 que ocurre en el tiempo $t = 60s$. El período de muestreo es $T_s = 0.0018s$.

Si se desea utilizar por ejemplo un período de muestreo $T_s = 0,0019s$, el sistema no cumple con las condiciones necesarias de existencia, lo que representa una desventaja del método de Tustin.

IV-A. Subsistemas desacoplados

Haciendo una transformación del sistema (1) para obtener un sistema de la forma (10)–(11) con las matrices (19),

obtenemos:

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 0.9982 & 0.0089 \\ 0 & 0.9964 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.0424 & 1.904 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.0424 \end{bmatrix}, \\ \Gamma = \Sigma_f &= \begin{bmatrix} 1.904 \times 10^{-4} \\ 0.0424 \end{bmatrix}, J = \Theta_f = \begin{bmatrix} 4.039 \times 10^{-6} \\ 8.9833 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\ \Sigma_d &= \begin{bmatrix} 0.0044 \\ 0.0424 \end{bmatrix}, \Theta_d = \begin{bmatrix} 9.3958 \times 10^{-5} \\ 8.9838 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1. Subsistema robusto a $d(t)$

Ahora, aplicando la técnica de desacoplamiento descrita en la sección III resultando un sistema de la forma 18, definimos otra transformación dada por:

$$z(k) = w(k) - \bar{B}(I_m - \Theta_d \Theta_d^-)y(k)$$

lo que deriva en el sistema:

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= -0.9766z_1(k) - 0.1976z_2(k) \\ &\quad + 0.5101y_1(k) + 4.8769y_2(k) \\ &\quad - 0.0042u(k) - 0.0042f(k) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} z_2(k+1) &= -0.2067z_1(k) - 0.9793z_2(k) \\ &\quad + 4.8769y_1(k) + 46.63y_2(k) \\ &\quad + 4.3852 \times 10^{-4}u(k) \\ &\quad + 4.3852 \times 10^{-4}f(k) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(k) &= 0.0419z_1(k) - 4.192 \times 10^{-3}z_2(k) \\ &\quad - 8.8946 \times 10^{-5}u(k) \\ &\quad - 8.8946 \times 10^{-5}f(k) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2(k) &= -4.385 \times 10^{-3}z_1(k) \\ &\quad - 4.385 \times 10^{-4}z_2(k) \\ &\quad + 9.3025 \times 10^{-6}u(k) \\ &\quad + 9.3025 \times 10^{-6}f(k) \end{aligned} \quad (23)$$

Para desacoplar la salida, utilizamos la descomposición en valores singulares de \bar{C} ,

$$U_* S_* V^T = \bar{C}, \quad T = U^T = \begin{bmatrix} -0.9946 & 0.1040 \\ 0.1040 & 0.9946 \end{bmatrix},$$

$$T \cdot \bar{C} = \begin{bmatrix} -0.0422 & 0.0042 \\ 0 & 3.5236 \times 10^{-18} \end{bmatrix},$$

$$T \cdot \bar{D} = \begin{bmatrix} 8.943 \times 10^{-5} \\ -7.6233 \times 10^{-20} \end{bmatrix},$$

$$T \cdot \bar{F}_d = \begin{bmatrix} -4.385 \times 10^{-3} \\ -4.385 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

quedando las nuevas ecuaciones de salida como:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(k) &= -0.0422z_1(k) + 0.0042z_2(k) \\ &\quad + 8.943 \times 10^{-5}u(k) \\ &\quad - 4.385 \times 10^{-3}f(k) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(k) &= -3.5236 \times 10^{-18}z_2(k) \\ &\quad - 7.6233 \times 10^{-20}u(k) \\ &\quad - 4.385 \times 10^{-4}f(k) \end{aligned} \quad (25)$$

usando la ecuación (24):

$$\begin{aligned} z_1(k) = & -23.7201\tilde{y}_1(k) - 0.1z_2(k) \\ & -0.002u(k) \end{aligned} \quad (26)$$

Tomando $z_1(k)$ dada por (26) y sustituyéndola en las ecuaciones (21) y (25) obtenemos el subsistema robusto a $d(t)$:

$$\begin{aligned} z_2(k+1) = & -z_2(k) + 4.903\tilde{y}_1(k) + 4.877y_1(k) \\ & + 46.63y_2(k) + 8.747 \times 10^{-4}u(k) \\ & + 4.385 \times 10^{-4}f(k) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(k) = & -3.5236 \times 10^{-18}z_2(k) \\ & -7.6233 \times 10^{-20}u(k) \\ & + 9.3025 \times 10^{-6}f(k) \end{aligned} \quad (28)$$

que depende sólo de la falla $f(t)$.

La generación residual requiere de trabajo adicional; puede ser mediante observadores, la técnica de espacio de paridad o con filtros de detección de fallas. Para este trabajo se diseña un generador residual en base a observador que resulta en:

$$\begin{aligned} \hat{z}_2(k+1) = & -\hat{z}_2(k) + 4.903\tilde{y}_1(k) + 4.877y_1(k) \\ & + 46.63y_2(k) + 8.747 \times 10^{-4}u(k) \\ & + L_1(\tilde{y}_2(k) - \hat{\tilde{y}}_2(k)) \end{aligned} \quad (29)$$

$$r_1(k) = \tilde{y}_2(k) - \hat{\tilde{y}}_2(k) \quad (30)$$

con

$$\hat{\tilde{y}}_2(k) = -3.5236 \times 10^{-18}\hat{z}_2(k) - 7.6233 \times 10^{-20}u(k)$$

La ganancia del observador L_1 se seleccionó para tener un polo en 0.1

2. Subsistema robusto a $f(t)$

Aplicando otra vez la técnica de desacoplo descrita en la sección III pero ahora despejando la perturbación $d(t)$, resulta un sistema de la forma 18 y definimos otra vez la transformación dada por:

$$z(k) = w(k) - \bar{B}(I_m - \Theta_f \Theta_f^-)y(k)$$

lo que deriva en el sistema:

$$\begin{aligned} z_1(k+1) = & 0.9982z_1(k) - 5.2042 \times 10^{-18}z_2(k) \\ & + 9.5286 \times 10^{-4}y_1(k) + 0.2119y_2(k) \\ & + 0.0042d(k) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} z_2(k+1) = & -0.0089z_1(k) - z_2(k) + 0.2119y_1(k) \\ & + 47.1395y_2(k) \\ & - 1.9057 \times 10^{-5}d(k) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\bar{y}_1(k) = 0.0424z_1(k) + 8.9917 \times 10^{-5}d(k) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_2(k) = & -1.9057 \times 10^{-4}z_1(k) \\ & + 1.4454 \times 10^{-18}z_2(k) \\ & + 3.0659 \times 10^{-20}u(k) \\ & - 4.0426 \times 10^{-7}d(k) \end{aligned} \quad (34)$$

usando la ecuación (34):

$$\begin{aligned} z_2(k) = & 6.9187 \times 10^{17}\bar{y}_2(k) - 1.318 \times 10^{14}z_1(k) \\ & - 0.0212u(k) - 2.7969 \times 10^{11}d(k) \end{aligned} \quad (35)$$

Tomando $z_1(k)$ dada por (35) y sustituyéndola en las ecuaciones (31) y (33) se obtiene el subsistema robusto a $f(t)$:

$$\begin{aligned} z_1(k+1) = & 0.9975z_1(k) - 3.601\bar{y}_2(k) \\ & + 9.5286 \times 10^{-4}y_1(k) + 0.2119y_2(k) \\ & + 1.104 \times 10^{-19}u(k) \\ & + 4.043 \times 10^{-7}d(k) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\bar{y}_1(k) = 0.0424z_1(k) + 4.043 \times 10^{-7}d(k) \quad (37)$$

que depende sólo de la perturbación $d(t)$.

Se diseña también un generador residual en base a observador que resulta en:

$$\begin{aligned} \hat{z}_1(k+1) = & 0.9975\hat{z}_1(k) - 3.601\bar{y}_2(k) \\ & + 9.5286 \times 10^{-4}y_1(k) + 0.2119y_2(k) \\ & + 1.104 \times 10^{-19}u(k) \\ & + L_2(\bar{y}_1(k) - \hat{\bar{y}}_1(k)) \end{aligned} \quad (38)$$

$$r_2(k) = \bar{y}_1(k) - \hat{\bar{y}}_1(k) \quad (39)$$

con

$$\hat{\bar{y}}_1(k) = 0.0424\hat{z}_2(k)$$

La ganancia del observador L_2 se seleccionó para tener un polo en 0.1

IV-B. Resultados de Simulación

En la figura 1 se puede ver el valor absoluto de la respuesta residual dada por las ecuaciones (29)–(30) el cual es sensible a $f(t)$; se obtiene una respuesta con la cual es posible identificar la falla. Como ya se había comentado, se observa oscilación en la señal debido a los métodos de integración utilizados que provocan errores de cálculo.

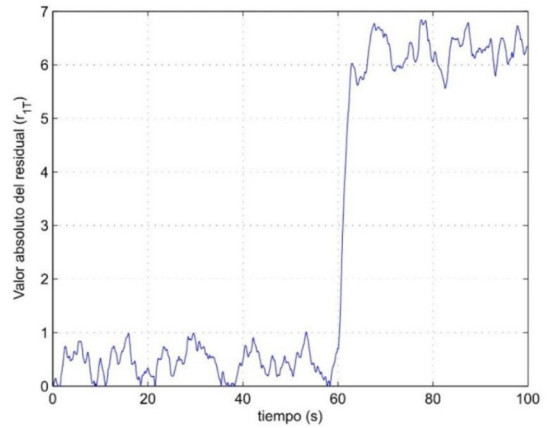


Figura 1. Valor absoluto de residuo 1: sensible a falla $f(t)$ en $t = 60$ s.

La respuesta del residual robusto a $f(t)$ se muestra en la figura 2; se aprecia que este residual es robusto a la falla $f(t)$ que ocurre al tiempo $t = 60$ s.

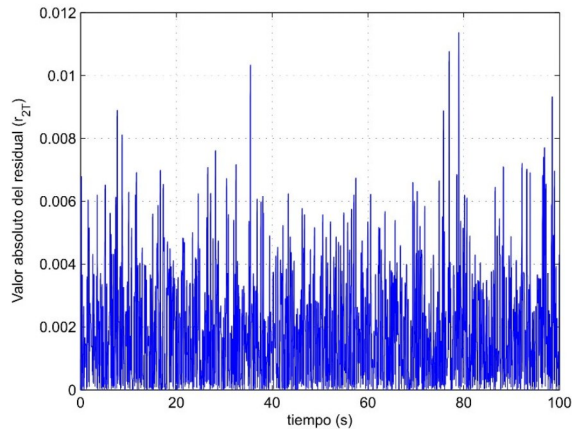


Figura 2. Valor absoluto de residuo 2: robusto a falla $f(t)$ en $t = 60$ s.

V. CONCLUSIÓN

Se consideró el problema de detección y aislamiento de fallas para sistemas muestreados originado en la discretización de un sistema continuo original (pues en general se presenta una reducción de la localizabilidad de fallas). Como solución, se propone un procedimiento basado en una aproximación de la derivada utilizando el método de Tustin así como una variante del método de desacoplamiento de perturbaciones. Este procedimiento relaja las condiciones de existencia del generador de residuos, pues el acoplamiento producido por la convolución es evitado y las condiciones de existencia se reducen a las convencionales para un sistema discreto.

El desacoplo total de las fallas puede verse obstaculizado por una mala selección del período de muestreo considerado, además de los acoplamientos naturales del sistema. Sin embargo, el procedimiento propuesto permite una solución al problema de localizabilidad de fallas en sistemas continuos utilizando muestras garantizando al menos la misma localizabilidad de fallas que la que dispone el sistema continuo. La efectividad del método es mostrado mediante un ejemplo numérico.

VI. AGRADECIMIENTOS

La primer autora agradece el apoyo de CONACYT (330782) para la realización de este trabajo. El segundo autor fue apoyado con el proyecto PAICYT IT287-09 por parte de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

REFERENCIAS

Basseville, M. y I. Nikiforov (1993). *Detection of Abrupt Changes Theory and Applications*. Prentice Hall, Information and System Science Series. New Jersey.

Ben-Israel, Adi y Thomas N.E. Greville (2003). *Generalized Inverses. Theory and Applications*. 2 ed. Springer.

Blanke, M., M. Kinnaert y J. Lunze M. Staroswiecki (2006). *Diagnosis and fault-tolerant control*. 2nd ed. Springer. Berlin Germany.

Chen, C. T. (1984). *Linear Systems Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston.

Chen, J. y R. J. Patton (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer.

Chen, T.W. y B.A. Francis (1995). *Optimal Sampled Data Systems*. Springer.

Cruz Victoria, J. C., R. Martínez Guerra y J. J. Rincón Pasaye (2008). On nonlinear systems diagnosis using differential and algebraic methods. *Journal of the Franklin Institute* **345**, 102–118.

Dabroom, A. M. y H. K. Khalil (1999). Discrete-time implementation of high-gain observers for numerical differentiation. *International Journal of Control* **72**(17), 1523–1537.

Ding, S. X. (2008). *Model-based fault diagnosis techniques*. Springer.

Franklin, G. F., J. D. Powell y M. L. Workman (1992). *Digital control of dynamic systems*. Addison Wesley.

Gertler, J. (1998). *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker. New York.

Hou, M. y P. C. Müller (1994). Disturbance decoupled observer design: A unified viewpoint. *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(6), 1338–1341.

Isermann, R. (2006). *Fault-diagnosis systems: An introduction from fault detection to fault tolerance*. 1 ed. Springer.

Izadi, I., Q. Zhao y T. Chen (2006). An H_∞ approach to fast rate fault detection for multirate sampled-data systems. *Journal of Process Control* **16**, 651–658.

Izadi, I., S. L. Shah y T. Chen (2008). Parity space fault detection based on irregularly sampled data. En: *Proceedings of the American Control Conference*. Washington. pp. 2798–2803.

Izadi, I., T. Chen y Q. Q. Zhao (2005). Norm invariant discretization for sampled-data fault detection. *Automatica* **41**, 1633–1637.

Li, W., H. Raghavan y S. Shah (2003). Subspace identification of continuous time models for process fault detection and isolation. *Journal of Process Control* **13**, 407–421.

Qiu, A., Ch. Wen y B. Jiang (2009). Optimal diagnostic observer for sampled-data systems. En: *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*.

Viswanadham, N. y K. D. Minto (1990). Fault diagnosis in multirate sampled data systems. En: *29th IEEE Conference on Decision and Control*. Honolulu, Hawaii. pp. 3666–3671.

Zhang, P., S. X. Ding, G. Z. Wang, D. H. Zhou y E. L. Ding (2002a). An H_∞ approach to fault detection for sampled-data systems. En: *Proceedings of the American Control Conference*. Anchorage, Alaska. pp. 2196–2201.

Zhang, P., S. X. Ding, G. Z. Wang y D. H. Zhou (2001). An FDI approach for sampled-data systems. En: *Proceedings of the American Control Conference*. VA, USA. pp. 2702–2707.

Zhang, P., S. X. Ding, G. Z. Wang y D. H. Zhou (2002b). Fault detection for uncertain sampled-data systems. En: *Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Shanghai, P. R. China. pp. 2728–2732.

Zhang, P., S. X. Ding, G. Z. Wang y D.H. Zhou (2003). A frequency domain approach to fault detection in sampled-data systems. *Auto* **39**, 1303–1307.

Zhang, P. y S. X. Ding (2007). A model-free approach to fault detection of continuous-time systems based on time domain data. *International Journal of Automation and Computing* **2**(04), 189–194.

Zhang, P. y S. X. Ding (2008). On fault detection in linear discrete-time, periodic, and sampled-data systems. *Journal of Control Science and Engineering* **2008**,–.

Zhong, M.-Y., Ch.F. Ma y Y.-X. Liu (2006). Fast rate fault detection filter for multirate sampled-data systems. *Acta Automatica Sinica* **32**(3), 433–437.