

Control por Modos Deslizantes para un Sistema Mecánico Bajo Contacto con un Sistema Masa-Resorte

Raúl Rascón* Joaquín Alvarez* Luis T. Aguilar**

* *CICESE Research Centre, Electronics and Telecommunication Department, P.O. BOX 434944, San Diego, CA 92143-4944, (emails: rrascon{jqalvar}@cicese.mx).*

** *Instituto Politécnico Nacional, Avenida del parque 1310 Mesa de Otay, Tijuana México 22510 (email: luis.aguilar@ieee.org).*

Resumen

El control de un sistema dinámico con condiciones de impacto es un problema interesante con aplicaciones prácticas. Una dificultad en controlar sistemas sujetos a colisiones es que las ecuaciones de movimiento son diferentes cuando la condición del sistema cambia de movimiento libre a movimiento restringido. En este trabajo se ofrece una alternativa de modelado donde las ecuaciones de movimiento son únicas sin importar la zona de movimiento donde se sitúe el sistema. Se propone un algoritmo de control por modos deslizantes para regular la fuerza ejercida en un resorte, considerándose que la fricción de Coulomb y las perturbaciones no son completamente conocidas. El controlador propuesto se diseña para el sistema general sin importar la zona de movimiento en que se encuentre. Se prueba que el sistema no lineal es asintóticamente estable en forma global y alcanza un error de fuerza igual a cero en estado estacionario.

1. INTRODUCCIÓN

Muchas aplicaciones en la industria involucran sistemas mecánicos que interactúan con el ambiente. Ejemplos de ellos se pueden encontrar en aplicaciones de manufactura automatizada, materiales manejados por robots y aplicaciones espaciales. En estas aplicaciones, un factor importante es poder lograr modelar completamente el sistema y las restricciones.

Anteriormente se han realizado investigaciones en el área de control de robots con restricciones. Muchos de estos trabajos son basados en la suposición de que el sistema mecánico ya se encuentra en contacto con la restricción. Sin embargo, en muchas aplicaciones industriales el sistema mecánico evoluciona en movimiento libre antes de estar en movimiento restrictivo Mansard et al. [2009]. Es ampliamente conocido que la conmutación de movimiento restringido a movimiento libre no presenta dificultades comparado con la conmutación de movimiento libre a movimiento restringido Tornambé [1996], Potini et al. [2006]. Esto se debe a que cuando se presentan impactos entre dos sistemas mecánicos se produce un cambio repentino en el sentido de la velocidad de ambos sistemas. La transición de movimiento libre a movimiento restringido puede generar cambios repentinos en forma de fuerzas impulsivas que afectan a los sistemas mecánicos, para más detalles consultar Brogliato [1999] y sus referencias. En Dupree et al. [2006] se presenta un problema de un robot de 2-gdl que colisiona con un sistema masa-resorte, no se considera fricción ni perturbaciones, facilitándose de esta

manera que se logre demostrar estabilidad del sistema en lazo cerrado.

El problema que se aborda en este documento es regulación de fuerza y posición en un sistema mecánico con fricción viscosa y fricción de Coulomb, el cual está sujeto a perturbaciones externas, donde se pueden presentar impactos. Esto significa que el sistema mecánico colisiona con otro sistema mecánico. Algunos trabajos anteriores de sistemas mecánicos con restricciones se pueden encontrar en Mansard and Khatib [2008], Indri and Tornambé [2001]. Debido a la simplicidad del modelo dinámico, se considera una masa que colisiona con un sistema masa-resorte. Como sensor de fuerza se utiliza un resorte rígido (ver Figura 1).

El sistema mecánico y la restricción se modela como un solo sistema generalizado. Este modelo nos permite desarrollar un solo controlador cuyo propósito es primeramente alcanzar el contacto con la restricción y mantener ese contacto, una vez logrado esto, el control regula la fuerza ejercida sobre un resorte.

Se utiliza la metodología de control por modos deslizantes para resolver el problema de regulación de fuerza en el resorte cuando se tiene contacto con la restricción Utkin [1992]. La principal característica de esta clase de controladores es que nos permite que el modo deslizante ocurra sobre una superficie de conmutación predeterminada, de tal forma que el sistema es gobernado por una sola ecuación deslizante y permanece insensible a cierta clase de perturbaciones y variaciones paramétricas Utkin [1978]. Este tipo de controladores ha sido utilizado exitosamente en control de movimiento de robots manipuladores, ver Sabanovic et al. [2008] y sus referencias. Por otra parte

* L. Aguilar agradece el apoyo financiero otorgado por el CONACYT bajo el registro 127575.

un trabajo de control por modos deslizantes aplicado a robots con restricciones puede ser encontrado en Lian and Lin [1998].

En nuestro caso, se propone un algoritmo de control por modos deslizantes utilizando una superficie deslizante dinámica, la cual es diseñada para regulación de trayectoria. El controlador utiliza mediciones de los errores de posición y velocidades, cuyo propósito es comprimir el resorte sin exceder la fuerza deseada en él. Esto es debido a que un sobretiro en la fuerza del resorte puede generar una pérdida de contacto entre los sistemas mecánicos. Un detalle importante a considerar es que el controlador no necesita mediciones exactas de las fricciones de Coulomb ni de la amplitud de las perturbaciones, solamente sus cotas superiores. Para probar estabilidad del sistema mecánico controlado se utilizan herramientas de funciones cuadráticas, algunas referencias pueden encontrarse en Paden and Sastry [1987], Shevitz and Paden [1994], Kazerooni [1990], Branicky [1998]. Estas herramientas nos permiten que la fuerza en el resorte converja asintóticamente a la referencia deseada, además de probar convergencia en tiempo finito hacia la superficie deslizante. Se confirma la validez del desarrollo teórico a través de simulaciones numéricas.

El resto del contenido es esbozado de la siguiente manera: En la Sección II se presenta el modelo dinámico que describe al sistema mecánico con su restricción. El diseño del controlador por modos deslizantes se presenta en la Sección III. En la Sección IV se presenta el análisis de estabilidad del sistema mecánico en lazo cerrado. En la Sección V se presentan simulaciones numéricas, hechas en MatLab®, finalmente se tienen conclusiones en la Sección VI.

2. MODELO DINÁMICO

El modelo dinámico de la masa m_1 como se muestra en la Figura 1 se puede expresar en coordenadas de espacio de estado como

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + \alpha_1\text{sign}(\dot{x}_1) = u + w_1 \quad (1)$$

donde $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $\ddot{x}_1(t) \in \mathbf{R}$ denotan el desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa m_1 , respectivamente; b_1 es el coeficiente de fricción viscosa y α_1 es el coeficiente de fricción de Coulomb. La masa m_1 esta actuada por la entrada de control $u \in \mathbf{R}$ y $w_1(t) \in \mathbf{R}$ es la perturbación externa desconocida. La amplitud de la fricción de Coulomb y la perturbación se asume que satisfacen

$$\alpha_1 \leq M_1, \quad \sup_t |w_1(t)| \leq N_1 \quad (2)$$

para todo t y unas constantes $M_1 > 0$, $N_1 > 0$. La suposición (2) se establece por razones técnicas que serán claras mas adelante. Las dinámicas del sistema masa-resorte en la Figura 1 en lazo abierto es

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + \alpha_2\text{sign}(\dot{x}_2) + k(x_2 - x_0) = w_2 \quad (3)$$

donde $x_2(t)$, $\dot{x}_2(t)$, $\ddot{x}_2(t) \in \mathbf{R}$ denotan el desplazamiento, velocidad y aceleración de la masa m_2 , respectivamente; $x_0 \in \mathbf{R}$ es la posición en reposo y sin perturbación de la masa m_2 , k es el coeficiente de rigidez del resorte, b_2 es el coeficiente de fricción viscosa y α_2 es el coeficiente de fricción de Coulomb y $w_2(t) \in \mathbf{R}$ es la perturbación externa desconocida. De igual forma que en (2) la amplitud

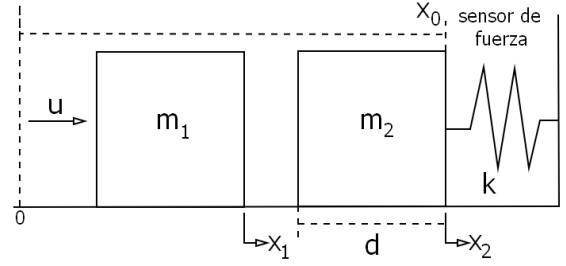


Figura 1. Ejemplo académico de un impacto entre dos sistemas dinámicos.

de la fricción de Coulomb y la perturbación se asume que satisfacen

$$\alpha_2 \leq M_2, \quad \sup_t |w_2(t)| \leq N_2 \quad (4)$$

para todo t y unas constantes $M_2 > 0$, $N_2 > 0$.

Un impacto entre la masa m_1 y la masa m_2 del sistema masa-resorte ocurre cuando $x_1(t) \geq x_2(t) - d$. El impacto genera fuerzas opuestas y de igual magnitud entre la masa m_1 y la masa m_2 . La fuerza de impacto actuando en la masa m_1 y masa m_2 , representada por $F_m(x_1, x_2) \in \mathbf{R}$, se define como

$$F_m = \frac{K}{2}(x_1 - (x_2 - d) + |x_1 - (x_2 - d)|) \quad (5)$$

donde K representa un valor constante de rigidez y d es la longitud horizontal de la masa m_2 .

Basándonos en (1), (3) y (5), el modelo dinámico para el sistema masa-masa-resorte puede ser expresado como

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + \alpha_1\text{sign}(\dot{x}_1) - F_m &= u + w_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + \alpha_2\text{sign}(\dot{x}_2) + k(x_2 - x_0) &= F_m + w_2 \end{aligned} \quad (6)$$

donde la fuerza en el resorte es

$$F = k(x_2(t) - x_0), \quad \forall t. \quad (7)$$

3. DISEÑO DEL CONTROL

El objetivo de control es encontrar un control u , que dependa de la fuerza deseada sobre el resorte F^{**} (a través de la posición deseada x^* y la longitud horizontal d de la masa m_2), los desplazamientos de posición (x_1, x_2) , la posición de referencia x_0 y las velocidades (\dot{x}_1, \dot{x}_2) , tal que el sistema en lazo cerrado satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - x^*| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t) - x^{**}| = 0 \quad (8)$$

donde x^* es la posición deseada de la masa m_1 y $x^{**} = x^* + d$ es la posición deseada de la masa m_2 . Trasladamos el punto de equilibrio de (6) a cero definiendo la siguiente transformación de estado basada en el error de posición:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x^*, \\ \dot{y}_1 &= \dot{x}_1, \\ y_2 &= x_2 - x^{**}, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto el sistema (6) se puede transformar como

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + b_1\dot{y}_1 + \alpha_1\text{sign}(\dot{y}_1) - F_m &= u + w_1 \\ m_2\ddot{y}_2 + b_2\dot{y}_2 + \alpha_2\text{sign}(\dot{y}_2) + k(y_2 + x^{**} - x_0) &= F_m + w_2 \end{aligned} \quad (10)$$

donde F_m se pueden reescribir como

$$F_m = \frac{K}{2}(y_1 - y_2 + |y_1 - y_2|) \quad (11)$$

de igual forma la transformación para F es

$$F = k(y_2 + x^{**} - x_0). \quad (12)$$

Se diseña una ley de control por modos deslizantes para el sistema (10). Se busca que el controlador dirija las trayectorias del sistema hacia la superficie deslizante

$$s = \mu(y_1 + y_2) + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \gamma \int_0^t (F - F^{**} + ky_1) dt \quad (13)$$

donde $F^{**} = k(x^{**} - x_0)$, μ y γ son parámetros positivos. La ley de control que asegura esto esta dada por

$$\begin{aligned} u = & -m_1 \lambda s - m_1 \beta \text{sign}(s) + (b_1 - m_1 \mu) \dot{y}_1 \\ & + \frac{m_1 k}{m_2} (y_2 + x^{**} - x_0) + \left(\frac{b_2 m_1}{m_2} - m_1 \mu \right) \dot{y}_2 \\ & - \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) F_m - m_1 \gamma (F - F^{**} + ky_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Se propone que la ley de control estará actuando en todo tiempo, i.e., cuando la masa esta en movimiento libre o en movimiento restringido (contacto con masa-resorte). Los valores de λ y β son parámetros de ganancia positivos los cuales serán sintonizados para asegurar que el movimiento de las trayectorias se dirija hacia la superficie deslizante. Debido a que la superficie deslizante (13) es una variable dinámica, añadiremos s como otro estado en (10). Esto nos conduce al sistema extendido

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & \frac{F_m}{m_1} + \frac{u}{m_1} - \frac{b_1}{m_1} \dot{y}_1 - \frac{\alpha_1}{m_1} \text{sign}(\dot{y}_1) + \frac{w_1}{m_1} \\ \dot{y}_2 = & -\frac{k(y_2 + x^* - x_0)}{m_2} + \frac{F_m}{m_2} - \frac{b_2}{m_2} \dot{y}_2 - \frac{\alpha_2}{m_2} \text{sign}(\dot{y}_2) \\ & + \frac{w_2}{m_2} \\ \dot{s} = & \mu(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \frac{F_m}{m_1} + \frac{u}{m_1} - \frac{b_1}{m_1} \dot{y}_1 - \frac{\alpha_1}{m_1} \text{sign}(\dot{y}_1) + \frac{w_1}{m_1} \\ & - \frac{k(y_2 + x^{**} - x_0)}{m_2} + \frac{F_m}{m_2} - \frac{b_2}{m_2} \dot{y}_2 - \frac{\alpha_2}{m_2} \text{sign}(\dot{y}_2) \\ & + \frac{w_2}{m_2} + \gamma(F - F^{**} + ky_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Notar que para el sistema (15), la superficie deslizante estará dada por $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$.

4. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Analizaremos en esta sección la estabilidad del sistema en lazo cerrado (15), utilizando el controlador (14) y concluiremos acerca de la estabilidad global.

Sustituyendo (14) en (15), el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 = & -\lambda s - \beta \text{sign}(s) - \mu \dot{y}_1 + \frac{k}{m_2} (y_2 + x^{**} - x_0) \\ & + \left(\frac{b_2}{m_2} - \mu \right) \dot{y}_2 + \frac{F_m}{m_2} - \gamma(\tilde{F} + ky_1) - \frac{\alpha_1}{m_1} \text{sign}(\dot{y}_1) \\ & + \frac{w_1}{m_1} \\ \ddot{y}_2 = & -\frac{k(y_2 + x^{**} - x_0)}{m_2} + \frac{F_m}{m_2} - \frac{b_2}{m_2} \dot{y}_2 - \frac{\alpha_2}{m_2} \text{sign}(\dot{y}_2) \\ & + \frac{w_2}{m_2} \\ \dot{s} = & -\lambda s - \beta \text{sign}(s) - \frac{\alpha_1}{m_1} \text{sign}(\dot{y}_1) - \frac{\alpha_2}{m_2} \text{sign}(\dot{y}_2) \\ & + \frac{w_1}{m_1} + \frac{w_2}{m_2} \end{aligned} \quad (16)$$

donde $\tilde{F} = F - F^{**}$. Ahora, podemos verificar la existencia de modos deslizantes verificando que $s\dot{s} < 0$, a través del siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} s\dot{s} = & s \left(-\lambda s - \beta \text{sign}(s) - \frac{\alpha_1}{m_1} \text{sign}(\dot{y}_1) + \frac{w_1}{m_1} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_2}{m_2} \text{sign}(\dot{y}_2) + \frac{w_2}{m_2} \right) \\ \leq & -\lambda s^2 - \beta |s| + \left(\frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) |s| \\ \leq & -\lambda s^2 - \left(\beta - \left(\frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) |s|. \end{aligned}$$

Concluimos la existencia de modos deslizantes en la superficie $s = \mu(y_1 + y_2) + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \gamma \int_0^t (F - F^{**} + ky_1) dt$ mientras la condición $0 < N_1/m_1 + N_2/m_2 < \beta - M_1/m_1 - M_2/m_2$ permanezca válida.

También podemos demostrar la convergencia en tiempo finito de las trayectorias hacia la superficie $s = 0$ a través de la siguiente función cuadrática

$$V(s) = s^2 \quad (17)$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (16),

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t)) & \leq -2\lambda s^2 - 2 \left(\beta - \left(\frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) |s| \\ & \leq -2 \left(\beta - \left(\frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) |s| \\ & = -2 \left(\beta - \left(\frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right) \sqrt{V(s(t))}. \end{aligned} \quad (18)$$

De (18) tenemos que

$$V(t) = 0 \text{ para } t \geq t_0 + \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\left(\beta - \left(\frac{M_1 + N_1}{m_1} + \frac{M_2 + N_2}{m_2} \right) \right)} = t_f. \quad (19)$$

Por lo tanto, $V(t)$ converge a cero en tiempo finito y en consecuencia, un movimiento a través del conjunto $s = 0$ ocurre en el sistema discontinuo (16). De esta manera, en los siguientes desarrollos asumiremos que el sistema (16) esta en modo deslizante, tal que $s = \dot{s} = 0$ para $t \geq t_f$.

Ahora demostremos que, mientras el sistema permanezca en $s = 0$, las trayectorias $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$ convergen a cero cuando $t \rightarrow \infty$. De (12), (13) con el cambio de variables

$z = y_1 + y_2$, $\dot{z} = \dot{y}_1 + \dot{y}_2$ y dado que $F^{**} = k(x^{**} - x_0)$, tenemos que la dinámica del sistema (16), una vez que se encuentra en la superficie deslizante, se describe por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma k & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Dado que γ , k y μ son positivas, notesé que el sistema (20) tiene un único punto de equilibrio situado en el origen, el cual es asintóticamente estable. Debido a restricciones físicas del sistema mecánico la única forma de tener $(z, \dot{z}) = (0, 0)$ es que $(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2) = (0, 0, 0, 0)$.

En resumen, se puede asegurar que todas las trayectorias del sistema (10)–(12), con la ley de control (13)–(14) convergen al origen. Sin embargo una forma de reducir el número de impactos en el sistema mecánico es teniendo una adecuada sintonización de los parámetros del controlador, especialmente de la relación entre γ , k y μ . Esto se obtiene localizando los polos del sistema (20) como negativos y reales. Esto se logra satisfaciendo la relación

$$\mu \geq 2\sqrt{k\gamma}. \quad (21)$$

5. SIMULACIÓN NÚMÉRICA

El desempeño y robustez del controlador por modos deslizantes propuesto son puestos a prueba en simulaciones numéricas. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando MatLab®. Se estudia el modelo dinámico como en (15) basado en los errores de posición de las masas, velocidades de las masas y la dinámica de la superficie deslizante s , se consideran los siguientes parámetros: fuerza deseada $F^{**} = 2N$, con la posición en reposo $x_0 = 3$, una posición deseada $x^* = 3.5$ y una longitud horizontal $d = 0.5$ de la masa m_2 , por lo que $x^{**} = x^* + d = 4$, la constante de rigidez del resorte $k = 2$, los coeficientes de fricción $b_1 = b_2 = 1$, las masas $m_1 = m_2 = 1$ y un valor constante de rigidez $K = 3000$. La ganancia del controlador es sintonizada en $\lambda = 70$, el parámetro de la función signo $\beta = 2$ y la ganancia de la fuerza $\gamma = 0.5$. Las amplitudes de las fricciones de Coulomb son $\alpha_1 = 0.5$ y $\alpha_2 = 0.3$, las perturbaciones en el sistema son $w_1 = 0.2\sin(t)$ y $w_2 = 0.3\sin(2t)$. Las condiciones iniciales de error de posición, velocidad y superficie deslizante s son puestas como $y_1(0) = -4$, $\dot{y}_1 = 0$, $y_2 = -1$, $\dot{y}_2 = 0$ y $s = -0.1$.

La Figura 2 nos muestra el error de posición y velocidad de la masa m_1 , donde se pueden apreciar los impactos principalmente en los cambios repentinos de velocidad. La Figura 3 muestra el error de posición y velocidad de la masas m_2 , donde de igual manera se observan los efectos de los impactos. En la Figura 4 se observa el movimiento deslizante s alcanzando la superficie deslizante en tiempo finito. La Figura 5 muestra la fuerza ejercida en el resorte y la Figura 6 la señal de control aplicada.

6. CONCLUSIONES

Se estudia un problema de regulación asintótica de posición y fuerza en un resorte para un sistema masa-resorte que esta sin actuar el cual es impactado por una masa actuada. Este sistema de estructura variable constituye un ejemplo básico para la construcción de ejemplos más

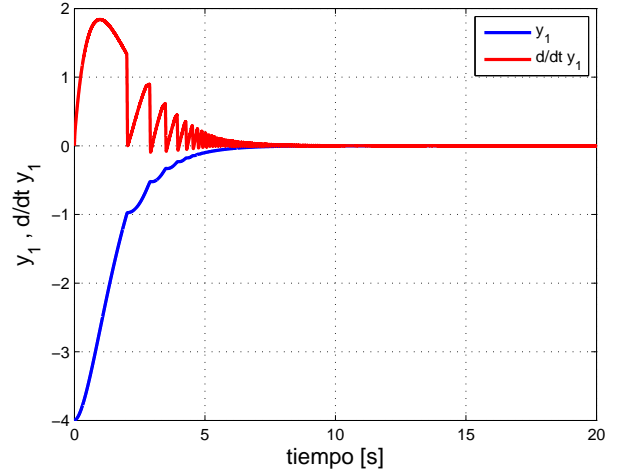


Figura 2. Error de posición y velocidad de masa m_1 .

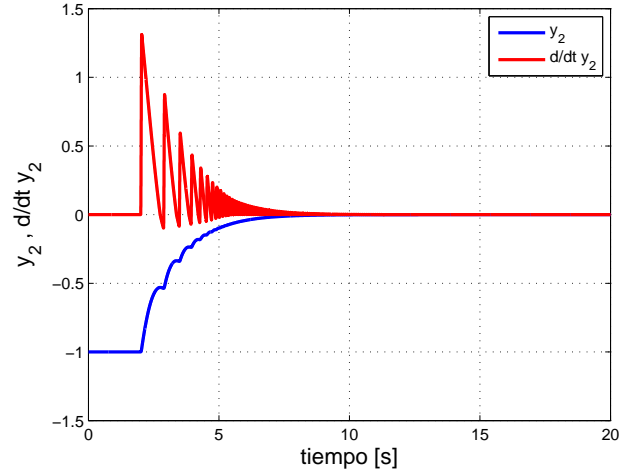


Figura 3. Error de posición y velocidad de masa m_2 .

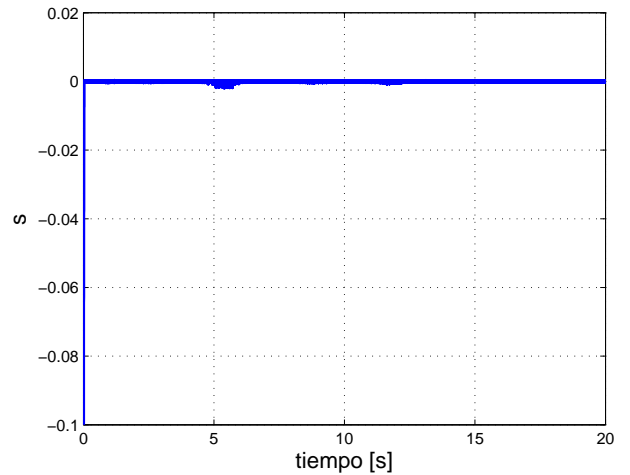


Figura 4. Movimiento deslizante (s).

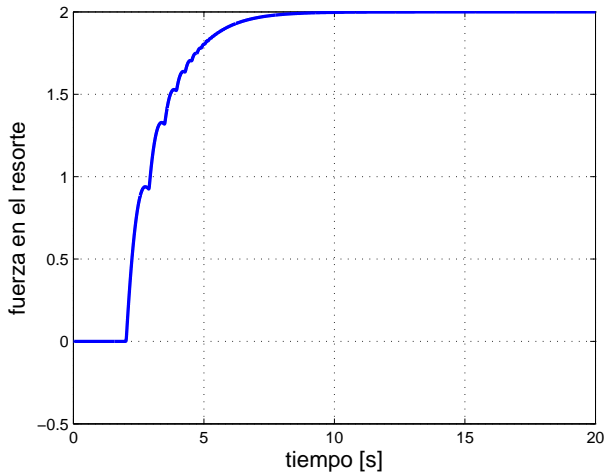


Figura 5. Fuerza generada en el resorte.

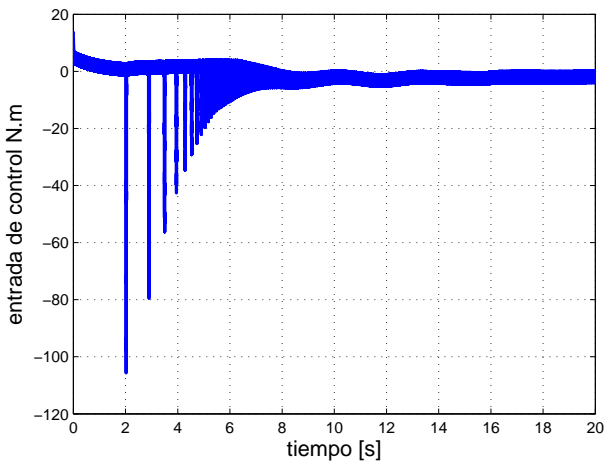


Figura 6. Señal de control.

complejos y completos. Mas aún, se incorporan algunos elementos reales que no son completamente conocidos en el diseño del controlador como lo son la fricción de Coulomb y perturbaciones externas.

El controlador el cual presenta robustez en lazo cerrado, fue sintetizado utilizando la metodología de controladores dinámicos por modos deslizantes. A su vez se prueba la convergencia en tiempo finito a la superficie deslizante y estabilidad asintótica global hacia un único punto de equilibrio.

REFERENCIAS

M.S. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:475–482, 1998.

B. Brogliato. *Nonsmooth Mechanics*. Springer, London, second edition, 1999.

K. Dupree, W.E. Dixon, G. Hu, and C. Liang. Lyapunov-based control of a robot and mass-spring system undergoing an impact collision. In *Proc. of the 2006 American Control Conference*, pages 3241–3246, 2006.

Marina Indri and Antonio Tornambé. On the design of a position feedback control law for a simple mechanical

system subject to impacts. *International Journal of Control*, 74(8):857–872, 2001.

H. Kazerooni. Contact instability of the direct drive robot when constrained by a rigid environment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35:710–714, 1990.

Kuang-Yow Lian and Chia-Ru Lin. Sliding-mode motion/force control of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8):1101–1103, 1998.

N. Mansard and O. Khatib. Continuous control law from unilateral constraints. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 3359–3364, 2008.

N. Mansard, O. Khatib, and A. Kheddar. A unified approach to integrate unilateral constraints in the stack of tasks. *IEEE Transactions on Robotics*, 25(3):670–685, June 2009.

B.E. Paden and S.S. Sastry. A calculus for computing filippov’s differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34:73–81, 1987.

A. Potini, A. Tornambe, L. Menini, C. Abdallah, and P. Dorato. Finite-time control of linear mechanical systems subject to non-smooth impacts. In *Proc. IEEE Conf. 14th Mediterranean Control and Automation*, pages 1–5, 2006.

A. Sabanovic, M. Elitas, and K. Ohnishi. Sliding modes in constrained systems control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 55:3332–3339, 2008.

D. Shevitz and B. Paden. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(9):1910–1914, 1994.

A. Tornambé. Global regulation of a planar robot arm striking a surface. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:1517–1521, 1996.

V. Utkin. *Sliding Modes and Their Applications*. Mir, Moscow, 1978.

V. Utkin. *Sliding modes in control optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.