

# Análisis de Estabilidad Robusta de una Clase de Sistemas con Retardo usando Descomposición de Signo

I. Díaz<sup>1</sup>, G. Romero<sup>2</sup>, C. Elizondo<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ECEN, Texas A&M University, College Station, Texas, USA. ivan\_diaz\_09@neo.tamu.edu

<sup>2</sup>UAM Reynosa Rodhe, UAT. Reynosa, Tamaulipas, México. gromero@uat.edu.mx

<sup>3</sup>FIME Universidad Autónoma de Nuevo León, Nuevo León, México. celizond@yahoo.com

**Resumen**—El propósito de este artículo es el analizar la propiedad de estabilidad robusta de una clase de sistemas con retardo en los cuales se incluye incertidumbre paramétrica del tipo polinómica. El análisis es llevado a cabo mediante una transformación en la parte del retardo por una ecuación auxiliar y el uso del método de descomposición de signo para el manejo de la incertidumbre polinómica. Se muestra que es posible la verificación de estabilidad robusta mediante la obtención de la matriz de Hurwitz de la ecuación característica de esta clase de sistemas y la determinación de la positividad de los menores principales utilizando el método de descomposición de signo. Es llevado a cabo un algoritmo codificado en Matlab en el cual se determina visualmente la propiedad de estabilidad robusta mediante una serie de puntos obtenidos a partir del método de descomposición de signo.

**Palabras clave:** sistemas Diferencia-Diferencial, Descomposición de signo, Incertidumbre de tipo polinómica, Estabilidad Robusta.

## I. INTRODUCCIÓN

En 1981, el cuasi-polinomio característico, para un sistema lineal diferencia-diferencial, es reemplazado por un polinomio regular; esto es, se reemplazó  $(1 - Ts)^2/(1 + Ts)^2$  por  $e^{-s\tau}$  en la ecuación característica. Con esto, se logró verificar la propiedad de estabilidad asintótica para esta clase de sistemas, ver (Thowsen, 1981). Anteriormente, se había llevado a cabo una transformación similar en (Rekasius, 1980) reemplazando  $e^{-s\tau}$  por  $(1 - Ts)/(1 + Ts)$ . Pero se encontró en (Thowsen, 1981) que el problema con este reemplazo era que la imagen de los dos conjuntos de puntos no eran idénticos para todo  $s = j\omega, \omega > 0, T > 0$  y  $\tau > 0$ .

Los sistemas con retardo surgen como resultado de retardos inherentes en componentes del sistema, o debido a la introducción de un retardo deliberado para propósitos de control, ver (Malek et al., 1987; Zhong, 2006; Dugard y Verriest, 1998). En (Romero, 1997; Díaz, 2006; Díaz, 2008) se realiza un análisis de estabilidad robusta para sistemas dinámicos con retardo donde se considera incertidumbre paramétrica en el modelo matemático y en el retardo de tiempo, además se utiliza el concepto del value set y el principio de exclusión del cero para verificar la

propiedad de estabilidad robusta de plantas intervalo con retardo intervalo, ver también (Barmish, 1994) y (Lara et al, 2006) . En (Kharitonov, 1993) se considera el problema de estabilización robusta para una clase de sistemas con retardo que involucra perturbaciones paramétricas de tipo afín.

En (Elizondo, 2001) y (Elizondo, 2002) se obtienen nuevos resultados sobre estabilidad robusta de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica empleando la descomposición de signo. En (Keel y Bhattacharyya, 2011) se considera el problema de estabilidad robusta de una familia de polinomios cuyos coeficientes son funciones polinomiales de los parámetros de interés. Aquí se emplea el metodo de descomposición de signo para el diseño de controladores. En (Knap et al, 2011) se considera el problema de determinar positividad robusta de una función real  $f(x)$  mientras el vector real  $x$  varia su valor en una caja. Se determina la estabilidad robusta Hurwitz para una familia de polinomios utilizando el método de descomposición de signo.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El principal interés de este trabajo de investigación es el analizar la propiedad de estabilidad robusta de los sistemas dinámicos diferencia-diferencial que se caracterizan por contener incertidumbre paramétrica de tipo polinómica y retardo de tiempo de la forma:

$$\dot{x}(t) = A_0(q)x(t) + A_1(q)x(t - \tau) \quad (1)$$

Donde  $A_0(q), A_1(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices con parámetros dependientes de  $q_i \in Q$ , que representa incertidumbre de tipo polinómica y  $\tau \in \mathbb{R}_+$  la parte del retardo de tiempo. La propiedad de estabilidad de (1) está determinada en función de la ecuación característica  $\det \{sI - A_0(q) - A_1(q)e^{-\tau s}\} = 0$ . La cual al desarrollarse se obtiene un cuasi-polinomio, donde el sistema (1) es asintóticamente estable sí y sólo sí, se satisface lo siguiente:

$$p(s, q, e^{-\tau s}) = \det \{sI - A_0(q) - A_1(q)e^{-\tau s}\} \neq 0 \quad (2)$$

$\forall s \in \mathbb{C}_+$ , Donde  $\mathbb{C}_+$  indica el semiplano derecho cerrado del plano complejo; es decir, incluye el eje imaginario. A

los cuasi-polinomios que satisfacen la condición anterior los llamaremos cuasi-polinomios estables.

### III. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

#### III-A. Criterio de Hurwitz

**Teorema 1:** (Estabilidad de Hurwitz) Un polinomio  $p(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n$  con coeficientes positivos, tiene todas sus raíces con parte real negativa sí y sólo sí, todos los menores principales  $\Delta_i$  de la matriz  $H$ , son positivos.

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

#### III-B. Incertidumbre

Existe el caso en el que se desconoce el valor preciso de los parámetros del modelo matemático. Sin embargo, se conocen sus límites inferior y superior  $q_i^-, q_i^+$  respectivamente. La colección de todos los  $l$  parámetros que intervienen en el modelo matemático forman un vector de parámetros  $q = [q_1, q_2, \dots, q_l]^T$  que es un elemento de una caja de incertidumbre paramétrica  $Q$ .

$$Q = \left\{ q = [q_1, q_2, \dots, q_l]^T \mid q_i \in [q_i^-, q_i^+], i = 1, 2, \dots, l \right\} \quad (4)$$

Para diferentes valores de límites inferior y superior de la incertidumbre, siempre es posible hacer una transformación de coordenadas de los parámetros físicos sin perder las propiedades originales. Dicha transformación puede ser  $\rho_i = [q_i - q_i^-] / [q_i^+ - q_i^-]$ , y en este caso  $q_i \in [q_i^-, q_i^+]$  se transforma en  $\rho_i \in [0, 1]$  que por simplicidad podemos seguir llamándole  $q$  a la nueva coordenada  $q_i = [0, 1]$ . Cuando se considera incertidumbre paramétrica, se tiene una familia de polinomios definida como:

$$P(s, Q) \triangleq \{p(s, q) : q \in Q\} \quad (5)$$

Una de las clasificaciones de los polinomios con incertidumbre paramétrica  $p(s, q)$  es de *estructura polinómica*, esto es, coeficientes donde por lo menos algún parámetro aparece con potencia mayor a la unidad. Por ejemplo,  $p(s, q) = (q_1 + 2q_1^2q_3)s^2 + (q_1q_2^3 + q_1)s + (2q_2q_3)$ .

**Definición 1:** (Luenberger D., 1967) Sea  $P$  un cono convexo positivo en un espacio vectorial  $\mathbb{R}^l$ , para  $x, y \in \mathbb{R}^l$  se dice que  $xy \geq (x > y)$  con respecto a  $P$  si  $x - y \in P(x - y \in P^0, \text{el interior de } P)$ .

De aquí en adelante se considerará que  $Q \subset P$  y que  $q_i^- \geq 0$ . esto implica que  $q \in Q \subset P$ .

**Definición 2:** (Luenberger D., 1967) Sea  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^l$  un subconjunto convexo,

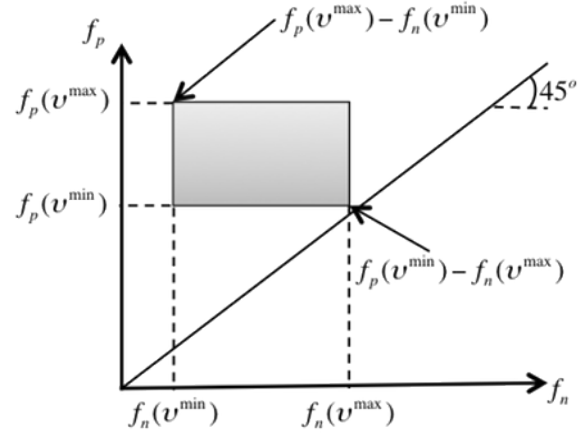


Figura 1. Rectángulo y polígono que contienen a la función  $f(q)$

se dice que  $f(\cdot)$  es una función no-decreciente en  $Q$ , si  $x \geq y$  implica  $f(x) \geq f(y), \forall x, y \in Q$ .

#### III-C. Descomposición de signo

**Definición 3:** (Elizondo C., 2001) (Elizondo C., 2002) Sea  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^l$  un subconjunto convexo, se dice que  $f(\cdot)$  tiene descomposición de signo en  $Q$  si existen dos funciones acotadas no-decrecientes  $f_n(\cdot) \geq 0, f_p(\cdot) \geq 0$ , tales que  $f(q) = f_p(q) - f_n(q)$  para toda  $q \in Q$ . Dichas funciones se llamarán: la parte positiva de la función  $f_p(\cdot)$  y la parte negativa de la función  $f_n(\cdot)$ .

$$\begin{aligned} f(q) &= f_p(q) - f_n(q) \quad \forall q \in Q \\ f_p(\cdot) &\triangleq \text{Parte Positiva de } f(\cdot) \\ f_n(\cdot) &\triangleq \text{Parte Negativa de } f(\cdot) \end{aligned} \quad (6)$$

Las partes negativa y positiva  $(f_n(\cdot), f_p(\cdot))$ , constituyen una representación  $(f_n, f_p)$  de la función en  $\mathbb{R}^2$  con una representación gráfica en el plano  $(f_n(\cdot), f_p(\cdot))$  de acuerdo con la Fig 1.

**Definición 4:** (Elizondo C., 2001) (Elizondo C., 2002) Se le llamará vértice mínimo y máximo Euclidiano  $v^{\min}, v^{\max}$  a los vectores elementos de  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^l$  con mínima y máxima norma Euclidiana respectivamente.

$$\|v^{\min}\|_2 = \min_{q \in Q} \|q\|_2, \quad \|v^{\max}\|_2 = \max_{q \in Q} \|q\|_2 \quad (7)$$

Dado que las partes negativa  $f_n(q)$  y positiva  $f_p(q)$  son funciones no decrecientes en un espacio vectorial. La representación gráfica de  $f(q), \forall q \in Q$  en el plano  $(f_n, f_p)$  está contenida en la Fig. 1. Donde si el vértice inferior derecho  $(f_n(v^{\max}), f_p(v^{\min}))$  está arriba de la recta de  $45^\circ$  entonces la función  $f(q) > 0, \forall q \in Q$ .

**Definición 5:** (Elizondo C., 2001), (Elizondo C., 2002) Sean  $f_p(q)$  y  $f_n(q)$  las componentes de una función  $f(q)$

con descomposición de signo en  $Q$ . Sea  $T$  la transformación lineal descrita tal que existe  $T^{-1}$ , entonces se le llamará una representación de la función  $f(q)$  en coordenadas  $(\alpha, \beta)$  a la transformación lineal  $(\alpha(q), \beta(q)) = T(f_n(q), f_p(q))$  de la función.

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & T^{-1} &= 0,5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} f_n(q) \\ f_p(q) \end{bmatrix} &= T^{-1} \begin{bmatrix} \alpha(q) \\ \beta(q) \end{bmatrix} & (8) \\ \alpha(q) &= f_p(q) + f_n(q) & f_p(q) &= 0,5(\alpha(q) + \beta(q)) \\ \beta(q) &= f_p(q) - f_n(q) & f_n(q) &= 0,5(\alpha(q) - \beta(q)) \end{aligned}$$

Para determinar la positividad o negatividad de una función que incluye un conjunto de incertidumbre de tipo polinómica utilizando la representación  $(\alpha, \beta)$  se utiliza el siguiente teorema:

**Teorema 2:** (del rectángulo) (Elizondo C., 2001), (Elizondo, 2002) Sea  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición de signo en  $Q$  tal que  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^l$  es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos  $v^{min}, v^{max}$  entonces: a)  $f(q)$  está acotada inferior y superiormente por  $0,5[\alpha(v^{min}) + \beta(v^{min}) - \alpha(v^{max}) + \beta(v^{max})]$  y  $0,5[\alpha(v^{max}) + \beta(v^{max}) - \alpha(v^{min}) + \beta(v^{min})]$  respectivamente, b) la representación gráfica de la función  $f(q), \forall q \in Q$  en el plano  $(\alpha, \beta)$  está contenida en el rectángulo con vértices:  $\alpha^{izq} = \alpha(v^{min}), \beta^{izq} = \beta(v^{min}), \alpha^{der} = \alpha(v^{max}), \beta^{der} = \beta(v^{max}); \alpha^{inf} = 0,5[\alpha(v^{min}) + \alpha(v^{max})] - 0,5[\beta(v^{max}) - \beta(v^{min})], \beta^{inf} = 0,5[\beta(v^{min}) + \beta(v^{max})] - 0,5[\alpha(v^{max}) - \alpha(v^{min})], \alpha^{sup} = 0,5[\alpha(v^{min}) + \alpha(v^{max})] + 0,5[\beta(v^{max}) - \beta(v^{min})], \beta^{sup} = 0,5[\beta(v^{min}) + \beta(v^{max})] + 0,5[\alpha(v^{max}) - \alpha(v^{min})]$ ; c) si el vértice inferior  $(\alpha^{inf}, \beta^{inf})$  está arriba del eje  $\alpha$  en el plano  $(\alpha, \beta)$  entonces la función  $f(q) < 0, \forall q \in Q$ .

**Teorema 3:** (de partición de cajas). (Elizondo C., 2001), (Elizondo, 2002) Sea  $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con descomposición de signo en  $Q$  tal que  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^l$  es una caja con vértices mínimo y máximo Euclidianos  $v^{min}, v^{max}$  entonces la función es positiva (negativa) en  $Q$  sí y sólo sí, existe un conjunto de cajas  $\Gamma$ , tal que  $Q = \bigcup_j \Gamma^j$  y la cota inferior  $\geq c > 0$  para cada caja  $\Gamma^j$  (cota superior  $\leq c < 0$  para cada caja  $\Gamma^j$ ).

El determinante de una Matriz  $M$  está compuesto de sumas y restas de productos de los elementos de la matriz, y si estos son de tipo polinómico, el determinante  $det(M)$  tiene descomposición de signo. El desarrollo de la programación para obtener la descomposición de signo del determinante en la representación  $(f_n, f_p)$  puede ser algo complicada, pero en la representación  $(\alpha, \beta)$  existe por lo menos una forma menos complicada de lograrlo.

**Definición 6:** (Elizondo C., 2001), (Elizondo, 2002) Sea  $M(q)$  una matriz cuadrada con elementos  $m_{i,j}(q)$  con descomposición de signo en  $Q$  con representación  $(\alpha_{i,j}(q), \beta_{i,j}(q))$ , entonces se le llamará  $M_\alpha(q)$  a la

matriz formada con los elementos  $\alpha_{i,j}(q)$  y se le llamará  $det_\alpha(M_\alpha(q)) = |M_\alpha(q)|_\alpha$  a la función similar al determinante de la matriz  $M_\alpha(q)$  pero sin aplicar la regla del signo  $(-1)^{i+j}$ ; será  $M_\beta(q) = M(q)$  y  $det_\beta(M_\beta(q)) = det(M(q))$ .

**Lema 1:** (Elizondo C., 2001), (Elizondo, 2002) Sea  $M(q)$  una matriz cuadrada con elementos  $m_{i,j}(q)$  con descomposición de signo en  $Q$  con representación  $(\alpha_{i,j}(q), \beta_{i,j}(q))$ . Sea  $M_\alpha(q)$  la matriz cuadrada con elementos  $\alpha_{i,j}(q)$ , entonces la representación  $(\alpha, \beta)$  del determinante de la matriz  $M(q)$  está dada por:

$$\alpha(q) = det_\alpha(M_\alpha(q)), \beta(q) = det(M(q)) \quad (9)$$

#### IV. RESULTADOS

El principal interés de este trabajo de investigación es el analizar la propiedad de estabilidad robusta de los sistemas diferencia-diferencial de la forma (1). Donde la incertidumbre está presente en los parámetros del modelo matemático y además se considera del tipo polinómica. La propiedad de estabilidad robusta está determinada mediante el análisis de la siguiente ecuación característica (2). La cual se denomina cuasi-polinomio característico que contiene incertidumbre paramétrica. Para determinar la condición de estabilidad robusta de esta clase de sistemas se realiza la siguiente transformación en la parte del retardo.

**Definición 7:** Un polinomio  $p(s, T)$  asociado a un cuasi-polinomio  $p(s, e^{-\tau s})$  será definido de la siguiente forma:

$$p(s, T) = \sum_{i=0}^n p_i(s)(1 - Ts)^{2i}(1 + Ts)^{2n-2i} \quad (10)$$

$$p(s, e^{-\tau s}) = \sum_{i=0}^n p_i(s)e^{-i\tau s}$$

Las raíces de este polinomio asociado tienen una relación importante con las raíces del cuasi-polinomio, esta relación es presentada en el siguiente teorema.

**Teorema 4:** (Towsen, 1981) Suponer que  $s^0 = j\omega^0$  para algún valor de  $\omega^0 \geq 0$ , entonces  $s^0 = j\omega^0$  es una matriz de la ecuación característica  $p(s, e^{-\tau s})$  para algún valor de  $\tau \geq 0$  sí y sólo sí,  $s^0 = j\omega^0$  es una raíz de  $p(s, T)$  para algún valor de  $T \geq 0$ .

Con esta transformación se puede obtener la relación entre  $\tau$  y  $T$ , la cual es válida en todo el eje imaginario  $j\omega$ , ver (Thowsen, 1981). El retardo de tiempo  $\tau$  y  $T$  están relacionados por la siguiente ecuación:

$$T = \frac{\tan\left(\frac{\tau\omega_i}{4}\right)}{\omega_i} \quad (11)$$

Donde  $\omega_i \in W$ ; el conjunto de  $W$  está definido como sigue:

$$W \equiv \{0 < \omega < \omega^* : p(j\omega^*, T) = 0 \text{ para } T > 0\} \quad (12)$$

En donde  $p(j\omega, T)$  es un polinomio asociado a  $p(s, e^{-\tau s})$  evaluado en el eje  $j\omega$ . Nótese que para cada valor de  $\omega_i$ , existe una relación directa  $\tau$  y  $T$ ; además, esta relación es

una función continua y estrictamente creciente en el rango  $T \in [0, \infty)$ , razón por la cual, para cada valor fijo de  $\omega_i$ , el intervalo  $\tau \in [0, \tau_{max}]$  genera un intervalo  $T \in [0, T_{max}]$ . Ahora está claro que para todos los valores de  $\omega_i \in W$  existe una relación entre  $\tau$  y  $T$ ; definiremos  $T_{max}$  en la siguiente relación:

$$T_{max} = \min\{T_i\} \quad (13)$$

$$T_i = \frac{\tan\left(\frac{\tau\omega_i}{4}\right)}{\omega_i} \quad \forall \omega_i \in W$$

*Definición 8:* Sea la matriz de Hurwitz

$$H[p(s, q, T)] = \begin{bmatrix} h_{1,1}(q, T) & h_{1,2}(q, T) & \cdots & 0 \\ h_{2,1}(q, T) & h_{2,2}(q, T) & \cdots & 0 \\ 0 & h_{3,2}(q, T) & \cdots & 0 \\ 0 & h_{4,2}(q, T) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n,n}(q, T) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Donde cada elemento de la matriz depende de los valores de  $q_i \in Q \subset P$  y  $T \in (0, T_{max}]$ .

*Definición 9:* Sea la matriz de Hurwitz (14), entonces se denotará  $f_{p_i,j}(q, T)$  y  $f_{n_i,j}(q, T)$  a la parte positiva y negativa respectivamente de cada uno de los elementos de la matriz de Hurwitz, tal como:

$$h_{i,j}(q, T) = f_{p_i,j}(q, T) + f_{n_i,j}(q, T), \quad (15)$$

Donde  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$ .

De acuerdo a la representación  $(\alpha, \beta)$  se tiene que:

*Definición 10:* Sean  $\Delta_i[\alpha^{inf}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  las matrices con elementos  $\alpha_{i,j}^{inf}$  obtenidas a partir de los menores principales  $\Delta_i$  de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$

$$\Delta_1[\alpha^{inf}] = [\alpha_{1,1}^{inf}]$$

$$\Delta_2[\alpha^{inf}] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{inf} & \alpha_{1,2}^{inf} \\ \alpha_{2,1}^{inf} & \alpha_{2,2}^{inf} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n[\alpha^{inf}] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{inf} & \alpha_{1,2}^{inf} & \alpha_{1,3}^{inf} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1}^{inf} & \alpha_{2,2}^{inf} & \alpha_{2,3}^{inf} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{3,2}^{inf} & \alpha_{3,3}^{inf} & \alpha_{3,4}^{inf} & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{4,2}^{inf} & \alpha_{4,3}^{inf} & \alpha_{4,4}^{inf} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n}^{inf} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Donde cada elemento de las matrices  $\alpha_{i,j}^{inf} = f_p(v^{min}) + f_n(v^{max})$  está formado por la suma de las partes positiva y negativa tomado del correspondiente elemento de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$ .

*Definición 11:* Sean  $\Delta_i[\beta^{inf}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  las matrices con elementos  $\beta_{i,j}^{inf}$  obtenidas a partir de los menores principales  $\Delta_i$  de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$

$$\Delta_1[\beta^{inf}] = [\beta_{1,1}^{inf}]$$

$$\Delta_2[\beta^{inf}] = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{inf} & \beta_{1,2}^{inf} \\ \beta_{2,1}^{inf} & \beta_{2,2}^{inf} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n[\beta^{inf}] = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{inf} & \beta_{1,2}^{inf} & \beta_{1,3}^{inf} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{2,1}^{inf} & \beta_{2,2}^{inf} & \beta_{2,3}^{inf} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{3,2}^{inf} & \beta_{3,3}^{inf} & \beta_{3,4}^{inf} & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{4,2}^{inf} & \beta_{4,3}^{inf} & \beta_{4,4}^{inf} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n,n}^{inf} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Donde cada elemento de las matrices  $\beta_{i,j}^{inf} = f_p(v^{min}) - f_n(v^{max})$  está formado por la suma de las partes positiva y negativa tomado del correspondiente elemento de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$ .

*Definición 12:* Sean  $\Delta_i[\alpha^{der}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  las matrices con elementos  $\alpha_{i,j}^{der}$  obtenidas a partir de los menores principales  $\Delta_i$  de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$

$$\Delta_1[\alpha^{der}] = [\alpha_{1,1}^{der}]$$

$$\Delta_2[\alpha^{der}] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{der} & \alpha_{1,2}^{der} \\ \alpha_{2,1}^{der} & \alpha_{2,2}^{der} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n[\alpha^{der}] = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{der} & \alpha_{1,2}^{der} & \alpha_{1,3}^{der} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,1}^{der} & \alpha_{2,2}^{der} & \alpha_{2,3}^{der} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{3,2}^{der} & \alpha_{3,3}^{der} & \alpha_{3,4}^{der} & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{4,2}^{der} & \alpha_{4,3}^{der} & \alpha_{4,4}^{der} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n}^{der} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Donde cada elemento de las matrices  $\alpha_{i,j}^{der} = f_p(v^{max}) + f_n(v^{min})$  está formado por la suma de las partes positiva y negativa tomado del correspondiente elemento de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$ .

*Definición 13:* Sean  $\Delta_i[\beta^{der}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  las matrices con elementos  $\beta_{i,j}^{der}$  obtenidas a partir de los menores principales  $\Delta_i$  de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$

$$\Delta_1[\beta^{der}] = [\beta_{1,1}^{der}]$$

$$\Delta_2[\beta^{der}] = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{der} & \beta_{1,2}^{der} \\ \beta_{2,1}^{der} & \beta_{2,2}^{der} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n[\beta^{der}] = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{der} & \beta_{1,2}^{der} & \beta_{1,3}^{der} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{2,1}^{der} & \beta_{2,2}^{der} & \beta_{2,3}^{der} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{3,2}^{der} & \beta_{3,3}^{der} & \beta_{3,4}^{der} & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_{4,2}^{der} & \beta_{4,3}^{der} & \beta_{4,4}^{der} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n,n}^{der} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Donde cada elemento de las matrices  $\beta_{i,j}^{der} = f_p(v^{max}) - f_n(v^{max})$  está formado por la suma de las partes positiva y negativa tomado del correspondiente elemento de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$ .

**Definición 14:** Sean  $\Delta_i[\alpha^{izq}], i = 1, 2, \dots, n$  las matrices con elementos  $\alpha_{i,j}^{izq}$  obtenidas a partir de los menores principales  $\Delta_i$  de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$

$$\begin{aligned} \Delta_1 [\alpha^{izq}] &= [\alpha_{1,1}^{izq}] \\ \Delta_2 [\alpha^{izq}] &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{izq} & \alpha_{1,2}^{izq} \\ \alpha_{2,1}^{izq} & \alpha_{2,2}^{izq} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \Delta_n [\alpha^{izq}] &= \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}^{izq} & \alpha_{1,2}^{izq} & \alpha_{1,3}^{izq} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,1}^{izq} & \alpha_{2,2}^{izq} & \alpha_{2,3}^{izq} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{3,2}^{izq} & \alpha_{3,3}^{izq} & \alpha_{3,4}^{izq} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{4,2}^{izq} & \alpha_{4,3}^{izq} & \alpha_{4,4}^{izq} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n,n}^{izq} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Donde cada elemento de las matrices  $\alpha_{i,j}^{izq} = f_p(v^{min}) + f_n(v^{min})$  está formado por la suma de las partes positiva y negativa tomado del correspondiente elemento de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$ .

**Definición 15:** Sean  $\Delta_i[\beta^{izq}], i = 1, 2, \dots, n$  las matrices con elementos  $\beta_{i,j}^{izq}$  obtenidas a partir de los menores principales  $\Delta_i$  de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$

$$\begin{aligned} \Delta_1 [\beta^{izq}] &= [\beta_{1,1}^{izq}] \\ \Delta_2 [\beta^{izq}] &= \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{izq} & \beta_{1,2}^{izq} \\ \beta_{2,1}^{izq} & \beta_{2,2}^{izq} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \Delta_n [\beta^{izq}] &= \begin{bmatrix} \beta_{1,1}^{izq} & \beta_{1,2}^{izq} & \beta_{1,3}^{izq} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{2,1}^{izq} & \beta_{2,2}^{izq} & \beta_{2,3}^{izq} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{3,2}^{izq} & \beta_{3,3}^{izq} & \beta_{3,4}^{izq} & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{4,2}^{izq} & \beta_{4,3}^{izq} & \beta_{4,4}^{izq} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n,n}^{izq} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

Donde cada elemento de las matrices  $\beta_{i,j}^{izq} = f_p(v^{min}) - f_n(v^{min})$  está formado por la suma de las partes positiva y negativa tomado del correspondiente elemento de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$ . A continuación se presenta el resultado principal, el cual establece la condición de estabilidad robusta para la clase de sistemas como en (1).

**Teorema 5:** Sea la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$  formada por los elementos de la familia de polinomios  $P(s, q, T)$  asociada a un cuasi-polinomio  $p(s, q, e^{-\tau s})$  por

la definición 7, que contiene incertidumbre paramétrica de tipo polinómica. Además  $p(s, q, T)$  es una función continua con descomposición de signo en  $Q$  tal que  $Q \subset P \subset \mathbb{R}^l$ . Sean  $\Delta_i[\alpha_i^{inf}], \Delta_i[\beta_i^{inf}], \Delta_i[\alpha_i^{der}], \Delta_i[\beta_i^{der}], \Delta_i[\alpha_i^{izq}]$  y  $\Delta_i[\beta_i^{izq}]$  las matrices obtenidas de los menores principales de la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$  con elementos mostrados en las definiciones 10, 11, 12, 13, 14 y 15 respectivamente. Entonces el cuasi-polinomio  $p(s, q, e^{-\tau s})$  es robustamente estable sí y sólo sí, se tiene que para cada menor principal de la matriz  $H[p(s, q, T)]$ :

1. Los puntos  $(\alpha_i^{inf}, \beta_i^{inf}), (\alpha_i^{der}, \beta_i^{der})$  y  $(\alpha_i^{izq}, \beta_i^{izq})$  en el plano  $(\alpha, \beta)$  obtenidos mediante  $\alpha_i^{inf} = \det(\Delta_i[\alpha_i^{inf}]), \beta_i^{inf} = \det(\Delta_i[\beta_i^{inf}]), \alpha_i^{der} = \det(\Delta_i[\alpha_i^{der}]), \beta_i^{der} = \det(\Delta_i[\beta_i^{der}]), \alpha_i^{izq} = \det(\Delta_i[\alpha_i^{izq}]), \beta_i^{izq} = \det(\Delta_i[\beta_i^{izq}])$  se encuentran arriba del eje  $\alpha$ .
2. Para el caso en el que los puntos  $(\alpha_i^{der}, \beta_i^{der})$  y  $(\alpha_i^{izq}, \beta_i^{izq})$  se encuentren arriba del eje  $\alpha$  en el plano  $(\alpha, \beta)$  y el punto  $(\alpha_i^{inf}, \beta_i^{inf})$  debajo del eje  $\alpha$ , se puede realizar una partición en un conjunto de cajas  $\Gamma^i$ , tales que  $Q = \cup_i \Gamma^i$  de las que los puntos obtenidos de esas particiones  $(\alpha_i^{inf}, \beta_i^{inf})$  se encuentren arriba del eje  $\alpha$ .

En caso de encontrarse con al menos un punto  $(\alpha_i^{der}, \beta_i^{der})$  o  $(\alpha_i^{izq}, \beta_i^{izq})$  por debajo del eje  $\alpha$ , el análisis concluye con que el polinomio no es robustamente estable.

**Demostración:** Dada la representación  $(\alpha, \beta)$  del determinante de la matriz  $H[p(s, q, T)]$  mostrada en definiciones 5 y 6, se tiene que si los puntos  $(\alpha_i^{inf}, \beta_i^{inf})$  y  $(\alpha_i^{sup}, \beta_i^{sup})$  se encuentran arriba del eje  $\alpha$  en el plano  $(\alpha, \beta)$  después de utilizar el teorema 3, por el teorema 2 y lema 1, el determinante de la matriz  $H[p(s, q, T)]$  es positivo. Si se sigue para todos los menores principales formados por la matriz  $H[p(s, q, T)]$  y por el teorema 1, se tiene que  $p(s, q, T)$  es robustamente estable y por la definición 7, se concluye que el cuasi-polinomio  $p(s, q, e^{-\tau s})$  es robustamente estable. ■

## V. EJEMPLO

Considérese el sistema de primer orden

$$\dot{x}(t) = -x(t) - 2x(t - \tau), \quad \tau > 0 \quad (22)$$

Mediante la definición 7 el sistema tiene la siguiente ecuación auxiliar:

$$s + 1 + 2 \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^2 = 0 \quad (23)$$

Para este polinomio se puede encontrar que tiene raíces en el eje imaginario sí y sólo sí  $T = 1/3$  y están localizadas en  $s = \pm j\sqrt{3}$ . Se puede concluir que  $T_{max} = 1/3$  y por (12) el retardo máximo  $\tau_{max} = 2\pi/3\sqrt{3}$ , que significa el valor máximo que puede tomar el retardo en el que el sistema se vuelve inestable. Si ahora se considera incertidumbre paramétrica de tipo polinómica en uno de los parámetros

tenemos:

$$s + 1q_1q_2^2 + 2 \left( \frac{1 - Ts}{1 + Ts} \right)^2 = 0 \quad (24)$$

De la ecuación (24) tenemos:

$$p(s, q, T) = T^2 s^3 + (2T + T^2 q_1 q_2^2 + 2T^2) s^2 + (2T q_1 q_2^2 - 4T + 1) s + 2 + q_1 q_2^2 \quad (25)$$

Donde la matriz de Hurwitz  $H[p(s, q, T)]$  es:

$$\begin{bmatrix} 2T + T^2 q_1 q_2^2 + 2T^2 & 2 + q_1 q_2^2 & 0 \\ T^2 & 2T q_1 q_2^2 - 4T + 1 & 0 \\ 0 & 2T + T^2 q_1 q_2^2 + 2T^2 & 2 + q_1 q_2^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Se aplicaron las definiciones para analizar la positividad de los menores principales. Al ejecutar el algoritmo, se tomaron los valores de  $q_1, q_2 \in [0, 1]$  y  $T \in [0, 0,2]$ , se obtuvo la siguiente figura:

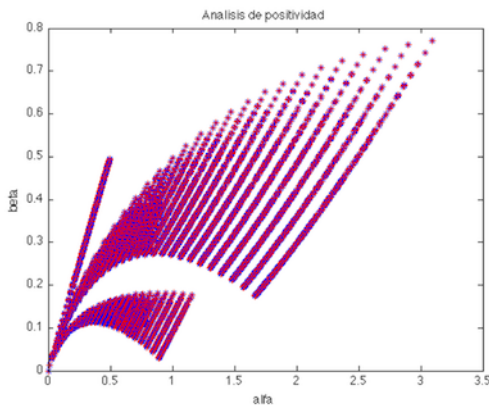


Figura 2. Descomposición de signo de la matriz de Hurwitz del ejemplo.

Se puede observar en la Figura 2 que los puntos  $(\alpha_i^{inf}, \beta_i^{inf})$  simbolizados con '+' y  $(\alpha_i^{der}, \beta_i^{der})$ ,  $(\alpha_i^{izq}, \beta_i^{izq})$  simbolizados con 'x' están por arriba del eje  $\alpha$ , que de acuerdo al teorema 5, el sistema es robustamente estable.

Si ahora se analiza tomando en cuenta una pequeña variación del retardo con valores de  $T \in [0, 0,4]$ , se obtiene la Figura 3. Se puede observar que los puntos  $(\alpha_i^{inf}, \beta_i^{inf})$  simbolizados con '+' y  $(\alpha_i^{der}, \beta_i^{der})$ ,  $(\alpha_i^{izq}, \beta_i^{izq})$  simbolizados con 'x' toman valores negativos por debajo del eje  $\alpha$ , que de acuerdo al teorema 5, no se cumplen las condiciones para garantizar la estabilidad robusta en el sistema.

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se mostró que la propiedad de estabilidad robusta de sistemas dinámicos que contienen incertidumbre paramétrica del tipo polinómica y retardo de tiempo puede ser verificada mediante la aplicación de un algoritmo basado en el método de descomposición de signo, en el cual se verifica la positividad de los menores principales de la matriz de Hurwitz formada por los elementos de un polinomio producto de una transformación de un cuasi-polinomio característico.

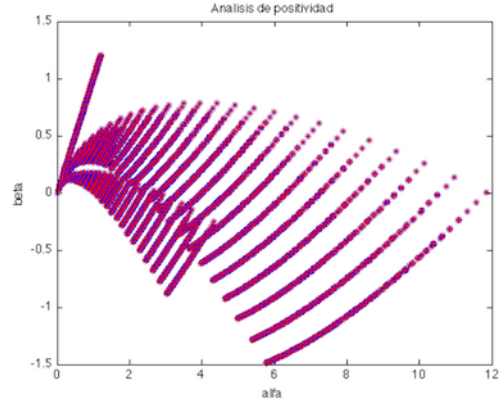


Figura 3. Descomposición de signo del determinante de la matriz de Hurwitz del ejemplo con pequeña variación en el retardo.

## VII. AGRADECIMIENTOS

El autor desea agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo otorgado mediante la beca no. 308935 para realizar estudios de posgrado en el extranjero.

## REFERENCIAS

- Barmish, B. R. (1994). *New tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company. USA.
- Díaz, I. (2006). *Estabilidad Robusta de Sistemas Diferencia-Diferencial de segundo orden*. *Reporte de Tesis*. UAM Reynosa-Rodhe, Universidad Autónoma de Tamaulipas. Tamaulipas, México.
- Díaz, I. (2008). *Estabilidad Robusta de Sistemas Diferencia-Diferencial de segundo orden*. *TURevista DIGI.UAT*. Vol. 2 Num. 3. Universidad Autónoma de Tamaulipas. Tamaulipas, México.
- Dugard, L. y Verriest, E.I. (1998). *Stability of Control of Time-Delay Systems*. *Lecture Notes in Control and Informations Science*. Springer-Verlag London, UK.
- Elizondo, C. (2001). Robust Positivity of the Determinant Via sign decomposition. *Proceedings of the world Multiconference on Systems, Cybertronics and Informatics*. Orlando, Florida, USA. Vol. 15, pp. 355-360.
- Elizondo, C. (2002). Nuevos Resultados en Estabilidad Robusta de Sistemas LTI con Incertidumbre Paramétrica. *Curso tutorial Congreso Latinoamericano en Control Automático*. Guadalajara, Jalisco, Mex.
- Keel, L. H. y Bhattacharyya, S. P. (2011). Robust stability via sign-definite decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control* vol 56, No. 1 January 2011.
- Kharitonov, V. L. (1993). Robust synthesis of time-delay systems. *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control* San Antonio, Texas, USA.
- Knap, M. J., Keel, L. H. y Bhattacharyya, S. P. (2011). Robust Hurwitz Stability via Sign-Definite Decomposition. *Linear Algebra and its Applications* 434 (2011) 1663 -1676 June 2011.
- Luenberger, D. (1967). *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, inc. USA.
- Malek, M., Zavarey y Jamshidi, M. (1987). *Time-Delay Systems Analysis, Optimization and Applications*. North-Holland. NY, USA.
- Romero, G. (1997). *Análisis de Estabilidad Robusta para Sistemas Dinámicos con Retardo*. *Reporte de Tesis de Doctorado*. FIME, Universidad Autónoma de Nuevo León, Nuevo León, México.
- Rekasius, Z. V. (1980). A Stability Test for Systems with delays. *Proc. Joint Automatic Control conf.* paper No. TP9-A.
- Thowsen, A. (1981). The Routh-Hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems. *International Journal of Control*. vol. 33, No. 5, pp. 991-995.
- Zhong, Q. C. (2006). *Robust Control of time-Delay systems*. Springer-Verlag. London, UK.