Observador para un Sistema Lineal por Pedazos en Tiempo Discreto con Modos Desconocidos

C. Morales, M. Adam, I. Cervantes*, L.G. Vela y J. Rodríguez
Departamento de Ingeniería Electrónica - CENIDET
Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, 62490, Cuernavaca, Morelos, México.
cornelio;adam;velaluis@cenidet.edu.mx
Teléfono: 01(777) 3627770
*Departamento de Matemáticas Aplicadas - IPICYT
Camino a la Presa San José 2055. Col. Lomas 4 sección CP. 78216. San Luis Potosí S.L.P.
ilse@andromeda.ipicyt.edu.mx
Tel: 01(444) 834 20 00

***Resumen*— La contribución principal en este artículo se enfoca a la estimación de estados de un sistema lineal por pedazos en tiempo discreto gobernadas por una secuencia de conmutación desconocida. La estimación de estados se hace usando un banco de observadores de Luenberger conmutados por una señal de conmutación. También, en el artículo se presenta una forma sistemática de probar observabilidad cuando el modo activo del sistema no se conoce en un instante de tiempo k.**

Palabras clave: Sistema Lineal por Pedazos, Observador de Luenberger, Observabilidad.

I. Introducción

Una gran clase de sistemas físicos pueden ser representados por un conjunto de modelos lineales y reglas que gobiernan la conmutación entre ellas. La interacción entre ambas se hace a través de un evento discreto o condición, que cambia la dinámica, tal que, la trayectoria del sistema evolucionando en el tiempo permanece continua. A este tipo de sistemas se les conoce como sistemas lineales por pedazos. El estudio y análisis de las propiedades de estos sistemas representa una nueva área de oportunidad para contribuir en el área de control.Por lo que, este artículo se enfoca principalmente al problema de estimación de estados y al análisis de observabilidad considerando una señal de conmutación en función del tiempo que conmutan los modelos lineales en forma arbitraria y desconocida.

Para atender la naturaleza de conmutación de los modelos lineales que representan a un sistema lineal por pedazos han sido atendidos por varios autores (Goshen-Meskin y Bar-Itzhack, 1992; Babaali y Egerstedt, 2003; Babaali y Egerstedt, 2004) quienes resuelven el problema de estimación de estados y observabilidad de estado proponiendo diferentes enfoques. Cada enfoque se identifica por la forma de considerar el modo activo del sistema, es decir, que modelo lineal representa la dinámica del sistema en un tiempo k. Esta clase de sistemas se clasifican de acuerdo a la condición del modo: a) Modos conocidos (Goshen-Meskin y Bar-Itzhack, 1992) y b) Modos desconocidos (Babaali y Egerstedt, 2004). En ambos casos, el problema de estimación de estados y análisis de observabilidad representan un problema desafiante con cierto grado de complejidad.

Para el primer caso cuando los modos son conocidos el problema de estimación y observabilidad se simplifica debido al conocimiento del modo activo en toda la dinámica del sistema (Alesandri y Coletta, 2001; Babaali y Egerstedt, 2003). También, puede garantizarse convergencia asintótica del error y asegurar que la matriz de observabilidad de estado sea de rango completo. Sin embargo, para el segundo caso cuando los modos son desconocidos el problema de estimación y observabilidad resulta ser complejo. Esto se debe a la falta de conocimiento del modo activo en un tiempo k. Este problema puede abordarse mediante identificar primero el modo activo y posterior estimar el estado desconocido. Para esto, la propiedad de observabilidad debe realizarse con el fin de garantizar que el sistema es observable y para eso, se requiere un número finito de mediciones de la entrada y salida del sistema. Hacer el análisis de observabilidad y estimación de estado bajo estas condiciones aún es un problema abierto que debe ser atendido para establecer condiciones necesarias y suficientes a fin de garantizar observabilidad y convergencia asintótica del error de estado.

Los trabajos encontrados que atienden y resuelven parte del problema de observabilidad en un sistema lineal por pedazos tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto se reportan en los artículos de: (Goshen-Meskin y Bar-Itzhack, 1992) quienes consideran modos conocidos conmutando por una señal periódica en función del tiempo, sus resultados son útiles para sistemas lineales por pedazos libre de entradas exógenas y fallas; Bajo las mismas condiciones que en (Goshen-Meskin y Bar-Itzhack, 1992), en (Babaali y Egerstedt, 2003) extienden los resultados al proponer y probar que para garantizar observabilidad de estado se requiere de un número finito de mediciones y además prueban que el teorema de Caley-Hamilton se cumple al igual que en sistemas lineales. Este tipo de análisis no puede aplicarse cuando los modos son desconocidos y si se consideran fallas o perturbaciones. Motivo por la cual, (Babaali y Egerstedt, 2004) presentan un nuevo análisis de observabilidad con modos desconocidos, conmutados por una señal de conmutación arbitraria pero sin considerar en su análisis, la entrada de control u. Si la entrada de control se considera representa un nuevo problema que debe atenderse y que por ahora esta aún abierto.

Para el problema de estimación de estado en los casos de modos conocidos y desconocidos se requiere garantizar observabilidad de estado en el sistema lineal por pedazos bajo las condiciones de conmutación prescritas en el párrafo anterior. Bajo este contexto, existen pocos los trabajos reportados, entre las que se encuentran: (Alesandri, y Coletta, 2001) y (Alesandri y Coletta, 2003) quienes estiman los estados del sistema al considerar modos conocidos conmutando en forma periódica; y en (Birouche, Daafouz y Iung, 2006), (Alesandri, Baglietto y Battistelli, 2007), (Millerioux y Daafouz, 2004) y (Babaali, Egerstedt y Kamen, 2004) plantean estimar los estados del sistema considerando modos desconocidos, conmutado en forma periódica y arbitraria. En (Birouche, Daafouz y Iung, 2006) reconstruye los estados del sistema usando un observador híbrido bajo una secuencia de conmutación desconocida en función de las entradas y salidas, sus resultados fueron extendidos por (Alesandri, Baglietto y Battistelli, 2007) al calcular las ganancias del observador en función de la conmutación de los modos. Bajo el mismo esquema de conmutación en (Millerioux y Daafouz, 2004) proponen estimar los estados del sistema usando un observador de entradas desconocidas conmutando los modos en función del estado. Un último esquema de conmutación bajo modos desconocidos en las que se estiman los estados se reporta en (Babaali, Egerstedt y Kamen, 2004) quienes únicamente se restringen a conmutar la matriz de salida del sistema y estimar el estado mediante el uso de un algoritmo de optimización basado en un enfoque algebraico.

Con base a la búsqueda y revisión bibliográfica realizada en el contexto de los sistemas lineales por pedazos y en forma muy particular en esquemas de observación y análisis de observabilidad aún se vislumbran áreas de oportunidad para proponer nuevos esquemas de observación que atiendan el problema de estimación de estado bajo modos desconocidos, conmutando arbitrariamente en función de la salida y del tiempo. Bajo esta consideración, en este artículo se propone una metodología para probar observabilidad y un esquema de un observador de Luenberger lineal por pedazos en tiempo discreto.

II. Planteamiento del problema

El sistema lineal por pedazos en tiempo discreto considerado en el artículo presenta la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\theta_k)x_k + B(\theta_k)u_k \\ y_k &= C(\theta_k)x_k, \end{aligned} \tag{1}$$

donde: $x \in \mathbb{R}^n, u_k \in \mathbb{R}^m$ y $y_k \in \mathbb{R}^p$. θ_k, se refiere al modo activo en el tiempo k, asume sus valores dentro del conjunto $\{1, ..., s\}$, tal que, las matrices del sistema $A(\theta_k), B(\theta_k)$ y $C(\theta_k)$ conmutan entre s diferentes matrices conocidas. Es importante señalar que una secuencia de conmutación puede ser propuesta en función del tiempo, la salida, la entrada, el estado o la combinación de todas. Sin embargo, para el caso que se reporta en este artículo será una secuencia de conmutación en función de la salida y el tiempo.

Con base a la estructura de la Ec. 1 se establece una metodología sistemática para probar observabilidad y se implementa un observador clásico para reconstruir los estados del sistema. La implementación del observador se hace bajo condiciones de conmutación de modos desconocidos, conmutando en forma arbitraria, con salidas y entradas del sistema, y_k y u_k, conocidas, con $k \geq 1$.

Este trabajo esta acotado únicamente al caso de sistemas lineales por pedazos autónomos, la cual, se expresa de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\theta_k)x_k \\ y_k &= C(\theta_k)x_k, \end{aligned} \tag{2}$$

A partir de la Ec. 2 se realiza la prueba de observabilidad. Para la implementación del observador se utiliza la Ec. 1. La notación matemática usada es: La secuencia de modos $\theta = \theta^1 \cdot \theta^2 \cdots \theta^N$, donde N es la longitud de la trayectoria, denotado por $|\theta|$.

La contribución en el artículo es: a) La presentación de una metodología sistemática para probar observabilidad en sistemas lineales por pedazos, gobernadas por una secuencia de conmutación arbitraria y desconocida en función de la salida y el tiempo; y b) La propuesta de un observador lineal por pedazos conmutando en sus modos de operación en forma arbitraria y desconocida.

Antes de plater y abordar el problema de observabilidad en sistemas lineales por pedazos en tiempo discreto bajo secuencia de conmutación arbitraria y desconocida, primero se define el concepto de observabilidad para sistemas lineales reportada en (Brogan, 1992) y el concepto de observabilidad de sistemas lineales por pedazos bajo secuencia de conmutación periódica y conocida reportada en (Babaali y Egerstedt, 2003).

Definición 1 (Brogan, 1992)
Un sistema es *observable* en un tiempo t_0, si su vector de estado en ese tiempo t_0, pueda ser determinado a partir de la función de salida $y_{[t_0,t_1]}$ (ó secuencia de salida) donde $t_1, t_0 \leq t_1$ en algún tiempo finito. Si esto es verdad para todo t_0 el sistema es completamente observable.

Definición 2 (Babaali y Egerstedt, 2003)
Observabilidad Pathwise. El conjunto de pares $(A(1), C(1)), ..., (A(s)C(s))$ es observable pathwise sí y sólo sí existe un entero N, tal que, todas las trayectorias de longitud N son observables (i.e. $\rho(O(\theta)) = n$, donde, $\rho(\cdot)$ denota la función de rango y entonces se dice que θ

es observable). Al entero más pequeño se refiere al índice de observabilidad pathwise.

Con base a la *Definición* 1, los sistemas lineales pueden estimarse sus estados siempre y cuando la matriz de observabilidad sea de rango completo, sin embargo, para sistemas lineales por pedazos no es así, debido a que existe conmutación entre un conjunto de modelos líneales, gobernadas por una secuencia de conmutación, que influye en forma directa en la propiedad de observabilidad. Así que, para poder estimar los estados es necesario conocer la secuencia de conmutación y que la *Definición* 2 se cumpla, esto es posible, cuando los modos del sistema son conocidos. Sin embargo, cuando se tienen modos no conocidos surgen algunas preguntas que deben ser atendidas, como: 1) ¿Cuántas mediciones son suficientes para garantizar observabilidad de modos? y 2) ¿Cuántas mediciones son suficientes para garantizar observabilidad de estado en sistemas lineales por pedazos?.

Sabiendo en principio que los modos del sistema podrían ser conocidos o desconocidos dependiendo del tipo, condiciones y circunstancias del sistema podrían conmutar en forma periódica o arbitraria. La cual, para su análisis requiere que se respondan las preguntas presentadas en el párrafo anterior y plantear algunos casos relacionados a la cantidad de mediciones en el que los modos permanecen activos en un tiempo k, esto es,

- $N_1 = N_2 = \cdots = N_s$
- $N_1 \neq N_2 \neq \cdots \neq N_s$
- $N_i \leq N_j$ ó $N_i \geq N_j$, con $i = 1, 2...$, y $j = 1, 2...$

Estos casos consideran que la permanencia de un modo activo en tiempo pueden ser diferentes o iguales. Bajo esta observación se establece que los s modos del sistema de longitud N evolucionan desde un instante $k = 1$ hasta k, con $k \geq 1$. Con la evolución dinámica del sistema conmutan varios modos del sistema controlados por una señal de conmutación que permite dividir la dinámica en diferentes longitudes, por ejemplo, para un primer modo, su tiempo en permanecer activo podría ser N_1, para un segundo modo sería partiendo de N_1 hasta N_2 y así sucesivamente hasta N_s.

Con base al tiempo de permanencia en modo activo de un subsistema lineal se desarrolla la salida del sistema lineal por pedazos de la Ec. 2 a partir de un instante $k = 1$ hasta $k + N$, donde la salida correspondiente a un primer modo activo se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_k &= C(\theta_k)x_k \\ y_{k+1} &= C(\theta_{k+1})A(\theta_k)x_k \\ y_{k+2} &= C(\theta_{k+2})A(\theta_{k+1})A(\theta_k)x_k \\ &\vdots \\ y_{k+N_1-1} &= C(\theta_{k+N_1-1})\prod_{j=2}^{N_1} A(\theta_{k+N_1-j})x_k \end{aligned} \tag{3}$$

Si la ecuación 3 es tomada en cuenta para el análisis únicamente se haría referencia a la salida del primer modo, mientras si se siguen tomando más medidas de la salida del sistema entonces abarcaría a los s modos de operación y se generaría un historial completa de la evolución dinámica del sistema, al conjunto de todas las mediciones de los modos se expresa de la forma:

$$\begin{aligned} y_k^1 &= C(\theta_k^1)x_k \\ y_{k+1}^1 &= C(\theta_{k+1}^1)A(\theta_k^1)x_k \\ y_{k+2}^1 &= C(\theta_{k+2}^1)A(\theta_{k+1}^1)A(\theta_k^1)x_k \\ &\vdots \\ y_{k+N_1-1}^1 &= C(\theta_{k+N_1-1}^1)\prod_{j=2}^{N_1} A(\theta_{k+N_1-j}^1)x_k \\ y_k^2 &= C(\theta_k^2)\prod_{j=2}^{N_1} A(\theta_{k+N_1-j}^1)x_k \\ y_{k+1}^2 &= C(\theta_{k+1}^2)A(\theta_k^2)\prod_{j=2}^{N_1} A(\theta_{k+N_1-j}^1)x_k \\ y_{k+2}^2 &= C(\theta_{k+2}^2)A(\theta_{k+1}^2)A(\theta_k^2)\prod_{j=2}^{N_1} A(\theta_{k+N_1-j}^1)x_k \\ &\vdots \\ y_{k+N_2-1}^2 &= C(\theta_{k+N_2-1}^2)\prod_{j=2}^{N_2} A(\theta_{k+N_2-j}^2) \\ &\quad \prod_{j=2}^{N_1} A(\theta_{k+N_1-j}^1)x_k \\ &\vdots \\ &\vdots \\ y_{k+N_s-1}^s &= C(\theta_{k+N_s-1}^s)\prod_{j=2}^{N_s} A(\theta_{k+N_s-j}^s)\cdots \\ &\quad \prod_{j=2}^{N_2} A(\theta_{k+N_2-j}^2)\prod_{j=2}^{N_1} A(\theta_{k+N_1-j}^1)x_k \end{aligned} \tag{4}$$

Esta Ec. 4 representa la evolución de la salida del sistema lineal por pedazos en el tiempo considerando los s modos de operación. Para reducir la Ec. 4 a una forma más compacta se redefinen los siguientes términos:

$$Y_{N_s}^s \triangleq \begin{pmatrix} y_k^s \\ y_{k+1}^s \\ y_{k+2}^s \\ \vdots \\ y_{k+N_s-1}^s \end{pmatrix}; \; H(\theta_{N_s}^s) \triangleq \prod_{j=2}^{N_s} A(\theta_{k+N_s-j}^s) \tag{5}$$

$$Q(\theta_{N_s}^s) \triangleq \begin{pmatrix} C(\theta_k^s) \\ C(\theta_{k+1}^s)A(\theta_k^s) \\ C(\theta_{k+2}^s)A(\theta_{k+1}^s)A(\theta_k^s) \\ \vdots \\ C(\theta_{k+N_s-1}^s)H(\theta_{N_s}^s) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Expresando los términos de la Ec. 4 en su forma más compacta con base a la definición de las ecuaciones 5 y 6 se tiene:

$$\begin{aligned} Y_{N_1}^1 &= Q(\theta_{N_1}^1)x_k \\ Y_{N_2}^2 &= Q(\theta_{N_2}^2)H(\theta_{N_1}^1)x_k \\ &\vdots \\ Y_{N_s}^s &= Q(\theta_{N_s}^s)H(\theta_{N_s}^s)\cdots H(\theta_{N_1}^1)x_k \end{aligned} \tag{7}$$

Con base a esta Ec. 7 puede definirse la nueva matriz de observabilidad de un sistema lineal por pedazos considerando los s modos del sistema, la cual se expresa de la forma:

$$O(\theta^s_{N_s}) \triangleq \begin{pmatrix} Q(\theta^1_{N_1}) \\ Q(\theta^2_{N_2})H(\theta^1_{N_1}) \\ \vdots \\ Q(\theta^s_{N_s})H(\theta^s_{N_s})\cdots H(\theta^1_{N_1}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Finalmente, se define el vector de salida de la siguiente forma:

$$Y(\theta^s_{N_s}, x_k) \triangleq O(\theta^s_{N_s})x_k \;\; ; \;\; Y_{N_s} = [Y^1_{N_1} Y^2_{N_2} \cdots Y^s_{N_s}]^T \quad (9)$$

La Ec. 8 que define la matriz de observabilidad de un sistema lineal por pedazos, sí cumple, que es de rango completo $(\rho(O(\theta^s_{N_s})) = n)$, entonces garantiza que el sistema lineal por pedazos sea observable completamente y permite que a partir de la Ec. 9 pueda reconstruirse el estado inicial del sistema lineal por pedazos.

Sin embargo, para poder reconstruir el estado inicial, es necesario conocer la secuencia de conmutación. Para esto, debe cumplirse que cada modo de operación del sistema sea observable con un número finito de mediciones, además de garantizar que cada modo debe ser discernible del modo siguiente. Este problema fue resuelto por (Babaali y Egerstedt, 2004) al proponer la definición de observabilidad de modo y discernibilidad de modo.

III. Análisis de observabilidad

Con base a las aportaciones realizadas por (Babaali y Egerstedt, 2004) es posible establecer una metodología sistemática para probar observabilidad suponiendo que se cumple la definición de observabilidad y discernibilidad de modo con secuencia de conmutación desconocida y arbitraria. Si éste es el caso, se hace la siguiente suposición:

Suposición 1: Si se tienen las suficientes mediciones para garantizar observabilidad y discernibilidad de modo, entonces se cumple que el sistema lineal por pedazos es observable y discernible de modo.

Dado que se garantizan en la *Suposición 1* un número de mediciones suficiente a fin de garantizar observabilidad y discernibilidad de modo entonces es posible conocer la secuencia de modo y posteriormente conducirnos a reconstruir el estado. Para poder lograrlo, (Babaali y Egerstedt, 2004) propone una condición de suficiencia en la siguiente proposición:

Proposición 1 (Babaali y Egerstedt, 2004)
Si un sistema es observable pathwise con índice N_{pwo} y si cada trayectoria de longitud N_{pwo} es discernible, entonces es observable de estado.

La demostración de esta proposición se encuentra reportado en el artículo de (Babaali y Egerstedt, 2004). Combinando los casos propuestos relacionados al tiempo de permanencia de un modo activo, la *Suposición* 1 y la *Proposición* 1 podemos extender los resultados de (Babaali y Egerstedt, 2004) al plantear que la matriz de transición de estado y la matriz de salida conmutan pasando de un modo a otro modo. En este contexto, se plantea la siguiente hipótesis para el esquema de un observador clásico. Esta hipótesis se presenta en la siguiente sección.

IV. Implementación de un observador en un sistema lineal por pedazos

Hipótesis 1 Si un sistema lineal por pedazos es observable por modos y estado, permitirá el diseño de un observador con conmutación arbitraria y desconocida, tal que, pueda reconstruir el estado del sistema.

Para probar esta Hipótesis, se asume que el sistema lineal por pedazos es observable de modos y estado a partir de una cantidad finita de mediciones. Esto es, $Y(\theta, x) \in \mathcal{R}(O(\theta))$, donde $\mathcal{R}(M)$ denota el espacio de rango de columna de la matriz M. Para plantear un esquema observador lineal por pedazos el problema de la conmutación de los modos en forma arbitraria y desconocida representa un desafío y para resolverla proponemos un detector de modo activo. Este detector de modo activo se hace usando un banco de observadores clásicos que requiere de las mediciones de entradas y salidas del sistema. La función del banco de observadores clásicos es identificar en un tiempo k el modo activo, para ilustrar la forma en que se hace, vea la Figura 1).

Una vez resuelto el problema de modo activo puede llevarse a cabo la estimación de estados. Donde de nuevo aparece el problema de estimación de estados bajo una conmutación arbitraria y desconocida: se realiza planteando la siguiente hipótesis para el diseño del observador:

Hipótesis 2 Si las salidas están disponibles en cada paso, es posible diseñar un observador en sistemas lineales por pedazos para estimar un $\hat{x}_k$ de x_k, tal que, $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \hat{x}_k\| = 0$

Para demostrar esta hipótesis 2 se prueba que un modo de operación representado por un modelo lineal es observable y que al estimar el estado en ese modo el error de estado converge asintóticamente, tal que, al considerar un conjunto de modos representados por varios modelos lineales pueda mantenerse la observabilidad del sistema y entonces puede estimarse los estados usando un observador lineal por pedazos conmutando por una señal de conmutación arbitraria y desconocida se realiza en el caso lineal. El observador clásico fue tomado del artículo de (Birouche, Daafouz y Iung, 2006). Su estructura es el siguiente:

$$\hat{x}_{k+1} = A(\theta_k)\hat{x}_k + B(\theta_k)u_k + K(\theta_k)(y - C(\theta_k)\hat{x}_k) \quad (10)$$

donde: $K(\theta_k)$ es la matriz de ganancias del observador en el tiempo k y $\hat{x}_k$ es el estado estimado en el tiempo k.

El observador de Luenberger se implementa en cada una de las simulaciones asumiendo que y_k y u_k son conocidas y donde la secuencia de modo $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es arbitraria y desconocida. En otras palabras, lo que se busca es diseñar un sistema observador que reconstruye un estado estimado $\hat{x}_k$ de x_k basado en el conocimiento de $y_1, ..., y_k$ y $u_1, ..., u_k$, tal que, $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \hat{x}_k\| = 0$. El esquema del sistema observador lineal por pedazos se ilustra en la siguiente figura 1.

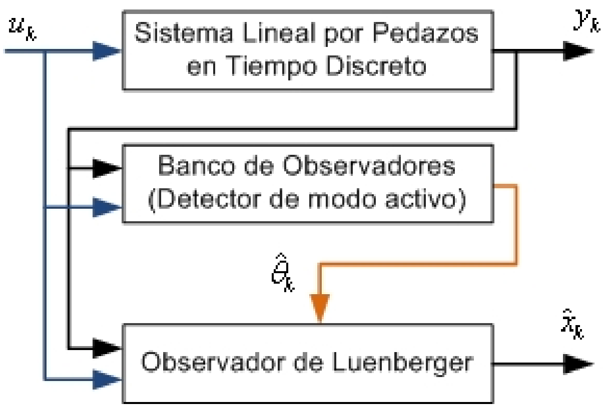

Figura 1. Sistema observador Lineal por Pedazos.

Con base a las condiciones de secuencia de modo presentadas puede establecerse la siguiente definición:

Definición 3 El observador de Luenberger en un sistema lineal por pedazos converge si $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \hat{x}_k\| = 0$ para toda secuencia de entradas, toda secuencia de modos, todos los estados iniciales y estados iniciales estimados.

Esta definición permite suponer lo siguiente: Si para detectar el modo activo se consideran N mediciones suficientes y necesarias a fin de que la propiedad de observabilidad (Babaali y Egerstedt, 2004) sea cumplida entonces se satisface que el observador sea convergente, i.e., $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \hat{x}_k\| = 0$.

Esta suposición se propone considerando que el observador esta gobernado por una secuencia de conmutación arbitraria y desconocida. Si se cumple esta suposición entonces es posible reconstruir el estado inicial del sistema. A partir de esta suposición adquieren importancia nuevas definiciones y propiedades del sistema, como: discernibilidad de modo activo, observabilidad de modo y observabilidad de estado bajo N mediciones, que han sido tratadas con anterioridad. Considerando estas condiciones en la secuencia de conmutación se llevan a cabo cada una de las simulaciones del observador de Luenberger en un sistema lineal por pedazos.

La implementación del observador de Luenberger en simulación se presenta bajo conmutación arbitraria y desconocida en función de la salida y del tiempo. El ejemplo numérico usado es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} A1 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 \\ -0{,}195 & 0{,}79 \end{pmatrix}; & C1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}; \\ A2 = \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}16 \\ -0{,}36 & 0{,}545 \end{pmatrix}; & C2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}; \\ B1 = \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}20 \end{pmatrix}; & B2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \\ A3 = \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}10 \\ -0{,}195 & 0{,}79 \end{pmatrix}; & C3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}; \\ B3 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix} & \end{array} \tag{11}$$

El sistema lineal por pedazos (Ec. 1) se implementa en simulación bajo secuencias de conmutación arbitraria y desconocida. Asimismo, la prueba de observabilidad del sistema fue realizado, cumpliendo la condición de rango completo. Cumplida la condición de rango, implica que pueda diseñarse un observador que reconstruya los estados del sistema lineal por pedazos. Para este caso, se implementa con tres subsistemas lineales conmutando en forma arbitraria y desconocida, su conmutación esta basada en función de la salida y del tiempo. La simulación se ilustra en la figura 2.

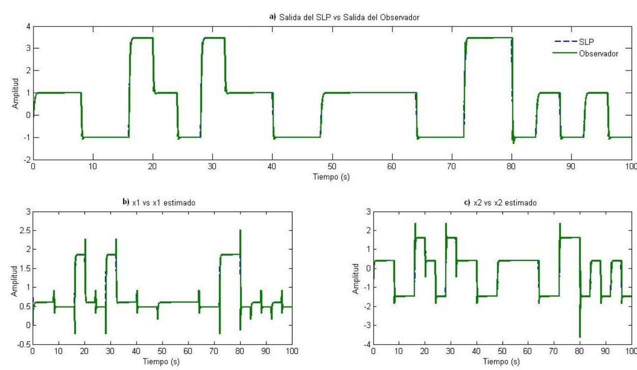

Figura 2. Observador de Luenberger en un Sistema Lineal por Pedazos.

La figura 2a muestra la evolución de la salida del sistema lineal por pedazos con la salida estimada, la figura 2b muestra la evolución del estado x_1 con el estado estimado $\hat{x}_1$ y la figura 2c ilustra la evolución del estado x_2 con el estado estimado $\hat{x}_2$. La simulación se realiza con un tiempo de 100 segundos, para ser más claros, es el tiempo que tarda el comportamiento del sistema considerando todos sus modos. Este tipo de dinámicas ocurren con frecuencia en diferentes sistemas donde los eventos de fallas pueden aparecer.

Como se mencionó en párrafos anteriores, conmutar un observador en un sistema lineal por pedazos con conmutación arbitraria y desconocida resulta complicado, más aún si se tienen más de tres subsistemas lineales. Hasta este momento, se ha logrado implementar el observador de Luenberger en un ejemplo numérico quedando aun pendiente su análisis de convergencia.

V. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó en forma sistemática el análisis para probar observabilidad en un sistema lineal por pedazos en tiempo discreto gobernada por una secuencia de conmutación arbitraria y desconocida. También, se presentó la implementación de un observador lineal por pedazos y se resolvió el problema de conmutación arbitraria y desconocida al implementar un detector de modo activo. Para el caso de sistemas lineales por pedazos en tiempo discreto gobernadas por secuencias de conmutación arbitraria y desconocida resulta de gran utilidad para el diseño de nuevos esquemas de detección de fallas basado en observador. Los resultados obtenidos en la estimación de los estados y la salida del sistema son buenos, pero aún pueden ser mejorados al implementar un nuevo detector de modo activo más sofisticado. La implementación del observador de Luenberger en este tipo de sistemas como se reporta en este trabajo aún no ha sido reportado en la literatura, por lo que, representa una buena contribución al área de sistemas lineales por pedazos en tiempo discreto.

REFERENCIAS

Alesandri, A. y P. Coletta (2001). Switching observers for continuos time and discrete time linear systems. *Proc. of American Control Conference*. 2516–2521.

Alesandri, A. y P. Coletta (2003). Design of observers for switched discrete time linear systems. *Proc. of American Control Conference*. 2785–2790.

Alesandri, A., M. Baglietto y G. Battistelli (2007). Design of observer with commutation-dependent gains for linear switching systems. *Proc. of the 2007 American Control Conference*. 2090–2095.

Babaali, M. y M. Egerstedt (2003). Pathwise Observability and Controlability are Decidable. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. 5771–5776.

Babaali, M. y M. Egerstedt (2004). Hybrid Systems: Computation and Control, volume 2993 of Lecture Notes in Computer Science Springer-Verlag, Philadelphia, PA, USA.

Babaali, M., M. Egerstedt y E.W. Kamen (2004). A Direct Algebraic Approach to Observer Design Under Switching Measurement Equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*.Volume 49, 2044–2049.

Birouche, A., J. Daafouz y C. Iung (2006). Observer design for a class of discrete time piecewise linear systems. *In IFAC, editor, 2nd IFAC Conf. On Analysis and Design of Discrete of Hybrid Systems*. 12–17.

Brogan, W. L. (1991). Modern Control Theory. *Prentice Hall, Inc, Upper Saddle River, New Yersey, tercera edition.*.

Goshen-Meskin, D. y I. Bar-Itzhack (1992). Observability Analysis of Piece-Wise Constant Systems; Part I: Theory. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. Volume 28, 1056–1067.

Millerioux, G. y J. Daafouz (2004). Unknown input observers for switched linear discrete time systems. *Proc. of the 2004 American Control Conference*. 5802–5805.