

Regulación Adaptativa en Tiempo Discreto: Aplicación a Convertidores de Potencia.

G. Obregón-Pulido, G. Solís-Perales C. Hidalgo-López y R. Cárdenas-Rodríguez.
Departamento de Electrónica, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI),
Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, México.
e-mail: guillermo.obregon@red.cucei.udg.mx

Resumen—En el presente trabajo se estudia como realizar regulación en tiempo discreto con modelo interno adaptable para sistemas lineales. Consideramos que existe una perturbación sinusoidal desconocida y a diferencia de otros algoritmos se incluye un bias constante y desconocido, adicionalmente el algoritmo se ha diseñado para implementarlo en línea.

El algoritmo se aplica en la regulación de convertidores CD-CD del tipo Buck suponiendo que se encuentran afectados con ruido sinusoidal desconocido manteniendo la estabilidad global del sistema dentro de cierta vecindad del valor nominal de la carga. Derecho reservado © UNAM-AMCA.

Palabras clave: Filtros Adaptables, Teoría de Regulación, Observadores.

I. INTRODUCCIÓN

El problema de rechazo de ruido y vibraciones es un tópico importante en el ámbito de control automático. Dentro de los diferentes tipos de ruido se encuentra el que puede ser modelado mediante una suma de señales sinusoidales cuyos parámetros son desconocidos, en los esquemas para rechazar este tipo de ruido normalmente se tiene un algoritmo de estimación de la frecuencia. En los últimos años diferentes algoritmos han sido propuestos para resolver el problema de la estimación de las frecuencias que tiene una señal compuesta de varias señales sinusoidales cuyas frecuencias son desconocidas.

Este tipo de ruido fue considerado primeramente en (Bodson y Douglas, 1997) donde se presenta una solución localmente estable para sistemas lineales SISO (Single Input-Single Output) que son estables y donde el ruido se encuentra presente directamente en la entrada del sistema. Siguiendo con los antecedentes del problema podemos citar a (Ben Amara et al, 1997) donde se presenta un algoritmo para rechazar ruido sinusoidal desconocido en sistemas lineales MIMO (Multiple Input-Multiple Output) el cual es localmente estable, también en (Marino y Tomei, 2003) se desarrolla un algoritmo para sistemas lineales SISO en tiempo continuo donde aplican el esquema desarrollado en (Marino y Tomei, 2002), este algoritmo es globalmente estable. Después en (Obregón-Pulido et al, 2005) se desarrolla un algoritmo para sistemas lineales MIMO el cual es globalmente estable en donde se aplica el algoritmo desarrollado en (Obregón-Pulido et al, 2002). Dentro del problema de la estimación de las frecuencias podemos ver

por ejemplo ((Marino y Tomei, 2002), (Obregón-Pulido et al, 2002) y (Xia, 2002)) donde se desarrollan algoritmos que estiman las frecuencias y que son globalmente estables. También en (Hou, 2005) y (Praly et al, 2006) se presenta el caso de la estimación de la frecuencia y la amplitud de una sola señal sinusoidal y en (Hou, 2007) se diseña un algoritmo para estimar las frecuencias y las amplitudes de las componentes que forman la señal, los esquemas anteriores se desarrollaron para el caso de tiempo continuo. En tiempo discreto han sido utilizados métodos estadísticos y el algoritmo de media cuadrática (Besson y Stoica, 1996), (Stoica et al, 2000), y recientemente en (Jesse et al, 2008) se aplican métodos adaptivos utilizando los parámetros de Markov para resolver el problema en sistemas MIMO de fase mínima.

En el presente trabajo se considera primero el problema de la estimación de los estados y la frecuencia de una señal sinusoidal que adicionalmente contiene un bias de corriente directa, en el ámbito de tiempo discreto; después se adapta el estimador a la teoría de regulación en sistemas lineales discretos para poder rechazar ruido sinusoidal desconocido.

Con respecto al caso estudio presentado en esta aportación, numerosas investigaciones se han realizado con el fin de considerar un convertidor Buck de CD a CD como fuente de potencia para inversores (CD-AC), utilizando PWM (Modulación de ancho de pulso por sus siglas en inglés) en su modo continuo (Boudjema F. et al, 1989), (Carpita y Marchesoni, 1996); también se ha realizado análisis espectral de la respuesta de convertidores buck, boost y buck-boost para operación de ancho de pulso aleatorio (Tse y Chow, 2000), en donde se muestra una comparativa de las características espectrales de los diferentes convertidores, en (Fossas et al, 2004) se presenta un esquema adaptativo con el fin de seguir una referencia sinusoidal con cierto bias en una carga desconocida, el esquema es aplicado al modelo no lineal del convertidor boost y buck-boost, dicho esquema utiliza el primer armónico de la expansión en serie de Fourier de la señal que debe seguir la corriente del inductor, ya que esta señal no se puede calcular de forma cerrada. Con el fin de regular la velocidad de un motor de CD, en (Linares-Flores y Sira-Ramírez, 2004), se presenta un esquema donde se utiliza un convertidor Buck, en dicho esquema no es necesario medir la velocidad del motor ya que es estimada mediante la retroalimentación de corriente

del convertidor. Finalmente algunos trabajos realizan la regulación del voltaje y la corrección del factor de potencia, ver por ejemplo (Tse K. et al, 2000), en donde el concepto de procesamiento de potencia redundante reducida (P^2R^2) fue propuesto por primera vez, lo anterior se ha realizado en tiempo continuo.

En particular, en el presente trabajo se aplica el algoritmo obtenido a convertidores CD-CD del Tipo Buck con el fin de que sea una fuente de corriente alterna (Inversor); en el cual se consideran dos situaciones: 1.- El voltaje de entrada contiene ruido sinusoidal desconocido y se desea que la salida siga cierta referencia constante o sinusoidal con cierto bias la cual es conocida y cuya frecuencia será fija (Convertidor CD-CD o CD-AC con frecuencia fija), 2.- El sistema no presenta perturbaciones o presenta una perturbación sinusoidal con bias de frecuencia conocida pero se desea que la salida siga cierta referencia sinusoidal con bias y cuya frecuencia es constante pero la podemos modificar en cualquier momento y no se desea recalculer el controlador (Convertidor CD-CD o CD-AC con frecuencia variable), los dos casos anteriores se realizan en tiempo discreto para poder programarlo en alguna computadora o DSP, a diferencia del algoritmo presentado en (Jesse, 2008), el algoritmo presentado aquí se puede implementar para sistemas de fase no mínima, aunque se realiza para sistemas lineales SISO.

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA EN EL CONTEXTO DE TEORÍA DE REGULACIÓN.

En el presente trabajo consideramos un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + dp(t) \\ e(t) &= y(t) - r(t) = cx(t) - r(t)\end{aligned}\quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, es el estado del sistema, $u \in \mathbb{R}$, es la entrada de control, $y = cx \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $r \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$ representan la señal de referencia y la perturbación respectivamente, las cuales toman la forma: $p(t) = A_p + B_p \sin(\alpha t + \phi_p)$ y $r(t) = A_r + B_r \sin(\beta t + \phi_r)$, donde p es desconocida, es decir, A_p , B_p , ϕ_p y α no se conocen, $e(t)$ es la señal de error entre la salida del sistema y la señal de referencia, A , b , c y d son matrices de dimensiones adecuadas y $d \in \mathbb{R}^n$ puede ser desconocida.

Siguiendo el problema en el contexto de teoría de regulación (Isidori, 1995), considerando $w_1 = A_r$, $w_2 = B_r \sin(\beta t + \phi_r)$, $w_3 = B_r \beta \cos(\beta t + \phi_r)$, $w_4 = B_p \sin(\alpha t + \phi_p)$, $w_5 = B_p \alpha \cos(\alpha t + \phi_p)$, estas dos señales pueden ser generadas por el exosistema $\dot{w}(t) = Sw(t)$, donde $\dot{w}_1(t) = 0$, $\dot{w}_2(t) = w_3(t)$, $\dot{w}_3(t) = -\beta^2 w_2(t)$, $\dot{w}_4(t) = w_5(t)$, $\dot{w}_5(t) = -\alpha^2 w_4(t)$, por lo que $r(t) = w_1 + w_2$, $p(t) = p_0 w_1 + w_4$, donde $p_0 = \frac{A_p}{A_r}$, es una constante desconocida. Con lo anterior podemos poner el sistema en la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) + Pw(t) \\ \dot{w}(t) &= S(t)w(t), \quad e(t) = cx(t) + qw(t)\end{aligned}\quad (2)$$

donde $P = d \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, se observa que la matriz P es desconocida pero después veremos que esto no impedirá la realización del regulador.

En teoría de regulación (Isidori, 1995), la existencia del regulador esta basada en la existencia de matrices Π y γ que satisfacen las llamadas ecuaciones FIB (Francis-Isidori-Byrnes) las cuales toman la forma $\Pi S = A\Pi + b\gamma + P$, $0 = c\Pi + q$, dichas matrices existen si y sólo si los polos del exosistema no coinciden con los ceros de transmisión del sistema representado por la tripleta (A, b, c) (Ver (Isidori, 1995)). El significado de las ecuaciones FIB es que existe una superficie $\pi(t) = \Pi w(t)$ tal que si el sistema en estado estable satisface $x_{ss}(t) = \Pi w(t)$ entonces $e(t) = 0$ y además que existe una entrada en estado estable $u_{ss}(t) = \gamma w(t)$ tal que hace invariante esa superficie, en tal caso la ley de control que se implementa es $u(t) = K(x - \pi(t)) + \gamma w(t)$, en donde la matriz K es tal que hace atractiva la superficie, para esto debemos tener que la matriz $(A + bK)$ es Hurwitz para lo cual se considera que el par (A, b) es estabilizable. Si el estado no es medible pero el sistema (2) es observable con la medición de $e(t)$ y el conocimiento de las matrices S y P , entonces podemos diseñar un observador y aplicar la ley de control utilizando los estados observados; adicionalmente el controlador diseñado será robusto ante variaciones paramétricas del sistema mientras el sistema en lazo cerrado permanezca estable, lo anterior ya que cumpliría con el principio del modelo interno (Francis y Wonham, 1976) y el sistema es SISO (ver (Isidori, 1995)). En el caso de que las matrices S y P no se conocen, podríamos aplicar el algoritmo dado en (Obregón-Pulido et al, 2005) para el caso de tiempo continuo. Para el caso de tiempo discreto veremos como diseñar el algoritmo en la siguiente sección.

Si discretizamos el sistema podemos escribir

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_d x_k + b_d u_k + P_d w_k \\ w_{k+1} &= S_d w_k, \quad e_k = cx_k + qw_k\end{aligned}\quad (3)$$

con $A_d = e^{AT}$, $b_d = \int_0^T e^{A\tau} b d\tau$, $S_d = e^{ST}$, $P_d = \int_0^T e^{A(T-\tau)} P e^{S\tau} d\tau$, donde se ha considerado que $u(t) = u_k = \text{constante}$ para $kT \leq t < (k+1)T$ y T es el periodo de muestreo.

Al igual que en tiempo continuo las ecuaciones FIB se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\Pi_d S_d &= A_d \Pi_d + b_d \gamma_d + P_d \\ 0 &= c \Pi_d + q\end{aligned}\quad (4)$$

y la solución existe si y solo si los ceros de transmisión de la tripleta (A_d, b_d, c) no coinciden con los eigenvalores de la matriz S_d (polos del exosistema discretizado). En este punto si los parámetros de la matriz S_d y la matriz P_d se conocieran entonces el problema se resuelve diseñando un observador para el sistema (3) y ubicando los polos dentro

del círculo unitario para esto necesitamos las siguientes hipótesis:

H1.- El par (A_d, b_d) es controlable.

H2.- El par $\left(\begin{pmatrix} A_d & P_d \\ 0 & S_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & q \end{pmatrix} \right)$ es observable.

por lo que debemos tener cuidado al elegir el periodo de muestreo ya que se puede perder observabilidad o controlabilidad, en particular tomaremos la siguiente hipótesis:

H3.- La frecuencia de muestreo satisface el criterio de Nyquist, esto es $w_s = \frac{2\pi}{\delta} > 2\max(\alpha, \beta, |\text{Im}(p_i)|)$ para $i = 1..n$, donde p_i es el i -ésimo polo del sistema continuo (A, b, c) .

Entonces el controlador dado por $\xi_{k+1} = F\xi_k + Ge_k$, $u_k = H\xi_k$, con

$$F = \begin{pmatrix} A_d + b_d K - G_1 c & P_d + b_d(\gamma_d - K\Pi_d) - G_1 q \\ -G_2 c & S_d - G_2 q \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} K & \gamma_d - K\Pi_d \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

los valores propios de las matrices $(A_d + b_d K)$ y $\left(\begin{pmatrix} A_d & P_d \\ 0 & S_d \end{pmatrix} - G \begin{pmatrix} c & q \end{pmatrix} \right)$ se encuentran dentro del círculo unitario, resuelve el problema, es decir $e_k \rightarrow 0$.

Ahora bien, en el presente caso las matrices S_d y P_d no se conocen y por lo tanto debemos de aplicar un esquema de control adaptativo para poder realizar la regulación.

III. DISEÑO DEL REGULADOR ADAPTATIVO.

Antes de diseñar el regulador veremos como es posible construir un estimador de una señal sinusoidal con bias la cual es desconocida, supongamos que tenemos una señal medible $r_k = A_m + B_m \sin(\alpha k T + \phi_m)$, y queremos estimar los estados de la señal y el parámetro α (la frecuencia en tiempo continuo), tomemos $z_{3k} = r_k$, $z_{2k+1} = z_{3k}$, $z_{1k+1} = z_{2k}$, entonces la expresión en variables de estado toma la forma

$$z_{k+1} = \bar{\Phi}(\theta) z_k, \quad r_k = z_{3k}, \quad z_k = \begin{bmatrix} z_{1k} & z_{2k} & z_{3k} \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{\Phi}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -(1+\theta) & (1+\theta) \end{bmatrix}, \quad \theta = 2 \cos(\alpha T),$$

con este modelo estamos en posibilidad de demostrar el siguiente lema:

Lema 1.- El estimador dado por

$$x_{1k+1} = x_{2k}, \quad x_{2k+1} = r_k,$$

$$x_{3k+1} = x_{1k} - x_{2k} + r_k + \eta_k(r_k - x_{2k}) + f_{1k}(r_k - x_{3k}),$$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + f_{2k}(r_k - x_{3k}),$$

$$f_{1k} = f_k(r_k - x_{2k})(x_{2k} - x_{1k}), \quad f_{2k} = f_k(x_{2k} - x_{1k}),$$

$$f_k = \frac{\sigma}{\epsilon + (x_{2k} - x_{1k})^2}, \quad 0 < \sigma < 2, \quad \epsilon > 0,$$

es globalmente exponencialmente estable, esto es $x_{1k} \rightarrow z_{1k}$, $x_{2k} \rightarrow z_{2k}$, $x_{3k} \rightarrow z_{3k}$ y $\eta_k \rightarrow \theta$ de forma exponencial y para cualquier condición inicial.

Prueba: Tomando los errores $e_{1k} = z_{1k} - x_{1k}$, $e_{2k} = z_{2k} - x_{2k}$, $e_{3k} = z_{3k} - x_{3k}$, $e_{\eta k} = \theta - \eta_k$, su dinámica toma la forma $e_{1k+1} = e_{2k}$, $e_{2k+1} = 0$, $e_{3k+1} = e_{1k} - (1 + \theta)e_{2k} + e_{\eta k}(r_k - x_{2k}) - f_k(r_k - x_{2k})(x_{2k} - x_{1k})e_{3k}$, $e_{\eta k+1} =$

$e_{\eta k} - f_k(x_{2k} - x_{1k})e_{3k}$, de esta dinámica observamos que e_{1k} y e_{2k} toman el valor cero en los primeros dos instantes de muestreo y además los errores e_{3k} y $e_{\eta k}$ permanecen acotados, entonces analizaremos las dinámicas de estos errores para $k \geq 2$; para esta condición tenemos $e_{3k+1} = (r_k - x_{2k})(e_{\eta k} - f_k(x_{2k} - x_{1k})e_{3k})$, $e_{\eta k+1} = e_{\eta k} - f_k(x_{2k} - x_{1k})e_{3k}$, para $k \geq 2$, tomando el cambio de variable $\varphi_k = e_{\eta k} - f_k(x_{2k} - x_{1k})e_{3k}$, tenemos que la dinámica es $e_{3k+1} = (r_k - x_{2k})\varphi_k$, $\varphi_{k+1} = (1 - f_{k+1}(r_k - x_{2k})^2)\varphi_k$, y de la función f_k tenemos que $\varphi_{k+1} = \left(1 - \frac{\sigma(r_k - x_{2k})^2}{\epsilon + (r_k - x_{2k})^2}\right)\varphi_k$, de esta dinámica, observando que $x_{2k} = r_{k-1}$, y que **H3** se satisface, concluimos que $|\varphi_{k+1}| \leq \lambda |\varphi_k|$ para alguna $0 < \lambda < 1$, ya que $0 < \sigma < 2$, $\epsilon > 0$ y generalmente $(r_k - x_{2k}) \neq 0$, esto implica que $\varphi_k \rightarrow 0$ de forma exponencial y por lo tanto, utilizando el cambio de variable, también lo hacen e_{3k} y $e_{\eta k}$. ■

Observación 1.- Se observa que si $\epsilon \ll (r_k - x_{2k})^2|_{k=2}$, y eligiendo $\sigma = 1$, se tiene que φ_k es muy cercano a cero en el tercer periodo de muestreo. Sin embargo, se observa también que si el periodo de muestreo tiende a cero el incremento $(r_k - x_{2k})$ también tiende a cero y la convergencia se realiza lentamente. ♦

Ahora consideramos el siguiente lemma:

Lema 2.- Si **H2** y las ecuaciones (4) se satisfacen con $\Pi_d(\theta)$ y $\gamma_d(\theta)$ para el parámetro desconocido y fijo θ , entonces existe una transformación de similaridad para el sistema (3) tal que este toma la forma

$$\chi_{k+1} = A_d \chi_k + b_d u_k + \Theta_1 \psi_k \quad (5)$$

$$\psi_{k+1} = \Phi(\theta) \psi_k, \quad e_k = c \chi_k + \kappa \psi_k,$$

$$\Phi(\theta) = \begin{bmatrix} S_\beta & \Theta_2 \\ 0 & \bar{\Phi}(\theta) \end{bmatrix}, \quad S_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix},$$

$$\mu = 2 \cos(\beta T),$$

para un vector κ y matrices Θ_1, Θ_2 dadas, tales que no afectan las propiedades de observabilidad.

Prueba: Si las ecuaciones (4) y las propiedades de observabilidad se satisfacen (los polos de S_d y por lo tanto los de $\Phi(\theta)$ y los ceros de (A_d, b_d, c) no son iguales) con las constantes κ, Θ_1 y Θ_2 elegidas, entonces también existen soluciones (diferentes de cero) $\tilde{\Pi}(\theta)$ y $\tilde{\gamma}(\theta)$ a las ecuaciones

$$\tilde{\Pi}(\theta)\Phi(\theta) = A_d \tilde{\Pi}(\theta) - b_d \tilde{\gamma}(\theta) - \Theta_1 \quad (6)$$

$$0 = c \tilde{\Pi}(\theta) - \kappa$$

ahora tomamos el cambio de variables para el sistema (3) como $\tilde{x}_k = x_k - \Pi_d(\theta)w_k$, $\phi_k = \Phi_w(\theta)w_k$,

$$\Phi_w(\theta) = \begin{bmatrix} \gamma_d(\theta)^T & (\gamma_d(\theta)S_d)^T & \dots & (\gamma_d(\theta)S_d^4)^T \end{bmatrix}^T,$$

y considerando (4) entonces el sistema toma la forma

$$\tilde{x}_{k+1} = A_d \tilde{x}_k - b_d h \phi_k + b_d u_k \quad (7)$$

$$\phi_{k+1} = \Psi(\theta, \mu) \phi_k, \quad e_k = c \tilde{x}_k,$$

donde $h = [1 \quad \dots \quad 0]$, $\Psi(\theta, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & I_4 \\ 1 & v(\theta, \mu) \end{bmatrix}$, $v(\theta, \mu) = [-a_0 \quad a_1 \quad -a_1 \quad a_0]$, $a_0 = (1 + \theta + \mu)$,

$a_1 = (2 + \theta + \mu + \theta\mu)$, tomando el mismo procedimiento para el sistema (5) con $\tilde{x}_k = \chi_k + \tilde{\Pi}(\theta)\psi_k$ y $\phi_k = \tilde{\Phi}_\psi(\theta)\psi_k$, donde

$\tilde{\Phi}_\psi(\theta) = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}(\theta)^T & (\tilde{\gamma}(\theta)\Phi(\theta))^T & \dots & (\tilde{\gamma}(\theta)\Phi(\theta)^4)^T \end{bmatrix}^T$, y considerando (6) llegamos al mismo sistema (7) entonces la transformación existe y está dada por

$$\begin{bmatrix} \chi_k \\ \psi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\Pi_d(\theta) - \tilde{\Pi}(\theta)\tilde{\Phi}_\psi(\theta)^{-1}\Phi_w(\theta) \\ 0 & \tilde{\Phi}_\psi(\theta)^{-1}\Phi_w(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

con esto completamos la prueba. ■

Observación 2.- Se observa que la inversa de la transformación existe ya que los pares $(\gamma_d(\theta), S_d)$, $(\tilde{\gamma}(\theta), \Phi(\theta))$ deberán ser pares observables, esto debe ser cierto ya que si no fuera así entonces las leyes de control en estado estable $(\gamma_d(\theta)w_k)$, $(\tilde{\gamma}(\theta)\psi_k)$ no podría hacer invariantes las superficies $(\Pi_d(\theta)w_k)$, $(-\Pi(\theta)\psi_k)$, esto es, las soluciones a las ecuaciones FIB no existirían, lo que contradice las hipótesis. Más aún, el problema de que la matriz P_d no se conozca desaparece ya que hemos transformado el sistema a uno de parámetros conocidos, a excepción del parámetro θ , el cual sigue siendo un problema que resolveremos utilizando el Lema 1. ♦

Rescribiremos el sistema (5) de la forma

$$\begin{aligned} \chi_{k+1} &= A_d\chi_k + b_d u_k + \Theta_{11}\psi_{1k} + \Theta_{12}\psi_{2k} \\ \psi_{1k+1} &= S_\beta\psi_{1k} + \Theta_2\psi_{2k}, \quad \psi_{2k+1} = \tilde{\Phi}(\theta)\psi_{2k} \\ e_k &= c\chi_k + \kappa_1\psi_{1k} + \kappa_2\psi_{2k} \\ \Theta_1 &= \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \end{bmatrix}, \quad \kappa = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

con el fin de entender mejor el resultado principal, el cual esta dado por el siguiente teorema:

Teorema 1.- Considere que el sistema (A_d, b_d, c) no tiene ceros reales o complejos de magnitud unitaria y que las hipótesis **H1** y **H2** se satisfacen, suponga que que las ecuaciones (6) se satisfacen con ciertas matrices $\tilde{\Pi}(\theta), \tilde{\gamma}(\theta)$ para el parámetro desconocido y fijo θ , tomando las siguientes constates matriciales $\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \end{bmatrix}$, $\kappa_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\kappa_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Theta_1 = G_1\kappa$, $\Theta_2 = G_2\kappa_2$, donde $(A_d - G_1c)$ y $(S_\beta - G_2\kappa_1)$ tienen sus valores dentro del círculo unitario, entonces el regulador dado por

$$\begin{aligned} \zeta_{1k+1} &= A_d\zeta_{1k} + b_d u_k + \Theta_{11}\zeta_{2k} + \Theta_{12}\zeta_{3k} + G_1(e_k - \hat{e}_k) \\ \zeta_{2k+1} &= S_\beta\zeta_{2k} + \Theta_2\zeta_{3k} + G_2(e_k - \hat{e}_k) \\ \zeta_{3k+1} &= \tilde{\Phi}(\eta_k)\zeta_{3k} + G_3(k)(e_k - \hat{e}_k) + G_4(k) \end{aligned}$$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + f_{2k}(e_k - \hat{e}_k) \quad (9)$$

con las señales definidas como $\hat{e}_k = c\zeta_{1k} + \kappa_1\zeta_{2k} + \kappa_2\zeta_{3k}$, $\tilde{e}_k = e_k - (c\zeta_{1k} + \kappa_1\zeta_{2k})$, $\zeta_{3k} = \begin{bmatrix} \zeta_{13k} & \zeta_{23k} & \zeta_{33k} \end{bmatrix}^T$, $G_3(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & f_{1k} \end{bmatrix}^T$, $G_4(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1 + \eta_k)\zeta_{33k} + (1 + \eta_k)\tilde{e}_k \end{bmatrix}^T$, $f_{1k} = f_k(\tilde{e}_k - \zeta_{23k})(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})$, $f_{2k} = f_k(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})$ y $f_k = \frac{\sigma}{\epsilon + (\zeta_{23k} - \zeta_{13k})^2}$, con $0 < \sigma < 2$, $\epsilon > 0$, y la ley de control dada por

$$u_k = K\zeta_{1k} + \lambda_0(\eta_k)\bar{\zeta}_k, \quad (10)$$

con $\lambda_0(\eta_k) = K\tilde{\Pi}(\eta_k) + \tilde{\gamma}(\eta_k)$, $\bar{\zeta}_k = \begin{bmatrix} \zeta_{2k} & \zeta_{3k} \end{bmatrix}^T$, donde K es tal que los valores propios de la matriz $(A_d + b_d K)$ se encuentran dentro del círculo unitario, resuelve el problema, es decir $e_k \rightarrow 0$, de manera robusta, esto es, aún y cuando el sistema real tenga variaciones paramétricas dentro de cierta vecindad de los valores nominales.

Prueba: De la teoría de sistemas lineales, si (9) es un controlador robusto para (8), entonces también es un controlador robusto para (3), ya que según el **Lema 2**, (8) es una transformación lineal de (3), entonces equivalentemente probaremos que es un controlador robusto para (8).

Tomemos los errores $\tilde{\chi}_k = \chi_k - \zeta_{1k}$, $\tilde{\psi}_{1k} = \psi_{1k} - \zeta_{2k}$, $\tilde{\psi}_{2k} = \psi_{2k} - \zeta_{3k}$, $\tilde{\eta}_k = \theta - \eta_k$, entonces, para los valores nominales, sus dinámicas toman la siguiente forma, donde se ha considerado $\tilde{\psi}_{2k} = \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{12k} & \tilde{\psi}_{22k} & \tilde{\psi}_{32k} \end{bmatrix}^T$,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{k+1} &= (A_d - G_1c)\tilde{\chi}_k \\ \tilde{\psi}_{1k+1} &= -G_2c\tilde{\chi}_k + (S_\beta - G_2\kappa_1)\tilde{\psi}_{1k} \\ \tilde{\psi}_{12k+1} &= \tilde{\psi}_{22k}, \quad \tilde{\psi}_{22k+1} = -c\tilde{\chi}_k - \kappa_1\tilde{\psi}_{1k} \\ \tilde{\psi}_{32k+1} &= (\psi_{32k} - \zeta_{23k})(\tilde{\eta}_k - f_k(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})\tilde{\psi}_{32k}) \\ &\quad + F(k) \\ \tilde{\eta}_{k+1} &= \tilde{\eta}_k - f_k(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})(c\tilde{\chi}_k + \kappa_1\tilde{\psi}_{1k} + \tilde{\psi}_{32k}) \end{aligned}$$

con $F(k) = \tilde{\psi}_{12k} - (1 + \theta)\tilde{\psi}_{22k} - f_k(\tilde{e}_k - \zeta_{23k})(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})(c\tilde{\chi}_k + \kappa_1\tilde{\psi}_{1k}) - f_k(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})(c\tilde{\chi}_k + \kappa_1\tilde{\psi}_{1k})\tilde{\psi}_{32k} - (c\tilde{\chi}_k + \kappa_1\tilde{\psi}_{1k})(1 + \eta_k)$; puesto que hemos ubicado los valores propios de $(A_d - G_1c)$ y $(S_\beta - G_2\kappa_1)$ dentro del círculo unitario, tendríamos que las siguientes señales satisfacen, $\tilde{\chi}_k \rightarrow 0$, $\tilde{\psi}_{1k} \rightarrow 0$, $\tilde{\psi}_{12k} \rightarrow 0$, $\tilde{\psi}_{22k} \rightarrow 0$, $\tilde{e}_k \rightarrow \psi_{32k}$, y $F(k) \rightarrow 0$, por lo que las dinámicas de $\tilde{\psi}_{32k}$ y $\tilde{\eta}_k$ tienden a $\tilde{\psi}_{32k+1} = (\psi_{32k} - \zeta_{23k})(\tilde{\eta}_k - f_k(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})\tilde{\psi}_{32k})$, $\tilde{\eta}_{k+1} = \tilde{\eta}_k - f_k(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})\tilde{\psi}_{32k}$, lo anterior es posible ya que el sistema no puede escapar a infinito en tiempo finito; ahora observando que en esas condiciones tenemos que $\zeta_{13k+1} = \zeta_{23k}$ y $\zeta_{23k+1} = \psi_{32k}$, entonces podemos hacer el mismo cambio de variable que en el **Lema 1**, esto es, tomemos $\xi_k = \tilde{\eta}_k - f_k(\zeta_{23k} - \zeta_{13k})\tilde{\psi}_{32k}$, entonces podemos escribir $\tilde{\psi}_{32k+1} = (\psi_{32k} - \zeta_{23k})\xi_k$, $\xi_{k+1} = \left(1 - \frac{\sigma(\psi_{32k} - \zeta_{23k})^2}{\epsilon + (\psi_{32k} - \zeta_{23k})^2}\right)\xi_k$, viendo la dinámica de ξ_k y siguiendo el **Lema 1**, podemos concluir que $\tilde{\psi}_{32k} \rightarrow 0$, y $\tilde{\eta}_k \rightarrow 0$ de forma exponencial.

Ahora considerando la ley de control (10), el sistema (8), las ecuaciones (6) y el **lema 2** podemos escribir $\chi_{k+1} = (A_d + b_d K)(\tilde{x}_k - \tilde{\Pi}(\theta)\psi_k) - b_d K\tilde{\chi}_k + b_d \lambda_0(\eta_k)\bar{\zeta}_k + (A_d\tilde{\Pi}(\theta) - b_d\tilde{\gamma}(\theta) - \tilde{\Pi}(\theta)\Phi(\theta))\psi_k$, y por la definición de $\tilde{x}_k$ en la demostración del **lema 2** tenemos que $\tilde{x}_{k+1} = \chi_{k+1} + \tilde{\Pi}(\theta)\psi_{k+1} = (A_d + b_d K)\tilde{x}_k - b_d K\tilde{\chi}_k + b_d \lambda_0(\eta_k)\bar{\zeta}_k - b_d (\tilde{\gamma}(\theta) - K\tilde{\Pi}(\theta))\psi_k$, finalmente $\tilde{x}_{k+1} = (A_d + b_d K)\tilde{x}_k - b_d K\tilde{\chi}_k + b_d (\lambda_0(\eta_k)\bar{\zeta}_k - \lambda_0(\theta)\psi_k)$, ya

que se ha demostrado que $\eta_k \rightarrow \theta$, $\tilde{\chi}_k \rightarrow 0$ y que $\tilde{\zeta}_k \rightarrow \psi_k$, entonces $\tilde{x}_k \rightarrow 0$ por lo que el error también tiende a cero. Para demostrar la robustez solo es necesario notar que todo lo anterior pasa de forma exponencial y por uno de los teoremas conversos de Lyapunov y por el método de la perturbación desvaneciente, en cierta vecindad de los valores nominales, el sistema es estable y por lo tanto el error tenderá a cero; con esto terminamos la prueba.■

Observación 3.- Por las hipótesis del teorema, las ecuaciones (6) tiene solución para el parámetro θ , sin embargo, puesto que η_k presenta un transitorio podría ser que el determinante del sistema de ecuaciones tome el valor cero, este problema se presenta en la ley de control mediante la función $\lambda_0(\eta_k) = K\tilde{\Pi}(\eta_k) + \tilde{\gamma}(\eta_k)$, ya que se ha sustituido θ por η_k ; para este caso (y sabiendo que en estado estable ya no está presente el problema de singularidad) se realiza el cambio de la función mediante $\lambda_0(\eta_k) = \frac{K\tilde{\Pi}_0(\eta_k) + \tilde{\gamma}_0(\eta_k)}{\min(\varepsilon, d_0(\eta_k)^2)} d_0(\eta_k)$, donde $d_0(\eta_k)$ es el determinante del sistema de ecuaciones (6), $\tilde{\Pi}(\eta_k) = \tilde{\Pi}_0(\eta_k)/d_0(\eta_k)$, $\tilde{\gamma}(\eta_k) = \tilde{\gamma}_0(\eta_k)/d_0(\eta_k)$ y ε es una constante pequeña adecuada.◆

El teorema anterior proporciona un algoritmo para poder rechazar ruido sinusoidal con bias, cuyos parámetros son desconocidos, en tiempo discreto. Se observa también que el sistema puede ser de fase no mínima (polos y/o ceros inestables) y si las hipótesis se satisfacen entonces el regulador cumple con su objetivo (hacer que el error tienda a cero). En la siguiente sección se aplica el algoritmo a la regulación de convertidores Buck..

IV. APLICACIÓN A INVERSOR DEL TIPO BUCK.

Consideremos el regulador Buck de la figura 1; en el cual se considera la perturbación desconocida $p(t) = A_p + B_p \sin(\alpha t + \phi_p)$; introducida en la dinámica del regulador como se muestra en la figura 1.

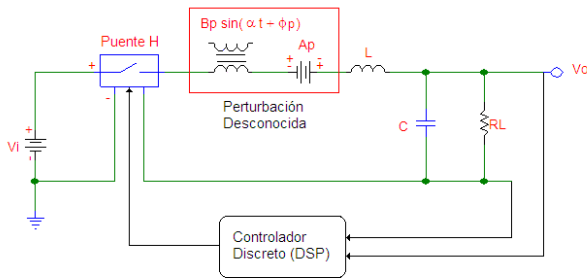


Figura 1. Esquema de regulador Buck Bipolar.

Puesto que en el desarrollo del algoritmo no se han supuesto saturaciones en la ley de control y el sistema considerado presenta dichas saturaciones, se tomara en cuenta la siguiente hipótesis:

H4.- El sistema es tal que para el control con saturación proporcionado por el controlador no presenta inestabilidad ni ciclos límite.

La hipótesis anterior es fuerte y tendría que demostrarse, pero eso es parte de otra investigación y sabiendo que se satisface para una entrada de voltaje adecuada, la tomaremos como cierta.

El modelo del circuito es el siguiente:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{C}y(t)$$

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t) + \frac{1}{L}p(t)$$

donde $x(t)$ = voltaje en el capacitor, $y(t)$ = corriente en la bobina, $u(t)$ = voltaje de entrada, el cual toma los valores en el conjunto $\{+V_i, -V_i\}$ y $p(t) = A_p + B_p \sin(\alpha t + \phi_p)$ es la perturbación desconocida.

Considerando una carga nominal de $R = 50 \Omega$, y una frecuencia base en el PWM de $f_{PWM} = 15 \text{ kHz}$, calculamos el valor de la bobina y el capacitor para tener una frecuencia de corte de $f_c = 150 \text{ Hz}$, los valores proporcionados son $L = 75 \text{ mH}$ y $C = 15 \mu\text{F}$; para que a la frecuencia de corte y a la carga nominal se tenga un filtro de Butterworth de 2do orden. En este caso el voltaje promedio que se aplica es $u_{prom} = V_i (2f_{PWM}T_d - 1)$, donde T_d es el ciclo de trabajo medido en segundos.

El sistema discreto con $T = 0,001$ (frecuencia de muestreo igual a 1 kHz), es $A_d = \begin{pmatrix} 0,086196 & 31,74615 \\ -0,006349 & 0,721118 \end{pmatrix}$, $b_d = \begin{pmatrix} 0,27889 \\ 0,011927 \end{pmatrix}$, $c_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, con P_d desconocida.

Ubicando los valores propios de $(A_d + b_d K)$ en $\{0,4, 0,5\}$, los valores propios de $(A_d - G_1 c)$ en $\{0,4, 0,5\}$, y los de $(S_\beta - G_2 \kappa_1)$ en $\{0,7, 0,8\}$, tenemos que $K = \begin{bmatrix} 0,3518 & -0,4543 \end{bmatrix}$, $G_1 = \begin{bmatrix} -0,09268 & -0,00411 \end{bmatrix}^T$, $G_2 = \begin{bmatrix} 0,3595 & 0,2286 \end{bmatrix}^T$.

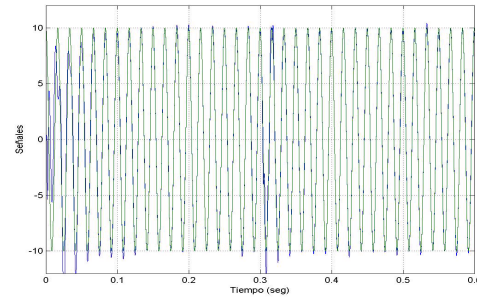


Figura 2. Señal de referencia y salida del sistema.

Aplicando el regulador (9), para la carga nominal tenemos las respuestas de las figuras 2 y 3, (seguimiento y señal de error); se observa como no se tiene el seguimiento exacto ya que el PWM introduce armónicos que son vistos por el controlador como ruido; aún así el seguimiento es bastante aceptable; en la figura 4 podemos observar la convergencia del parámetro estimado al valor real. En esta simulación la referencia es una señal sinusoidal de frecuencia $f_1 = 60 \text{ Hz}$, y la perturbación tiene una frecuencia de $f_2 = 120 \text{ Hz}$ para $0 \leq t < 0,3$ y 240 Hz para $0,3 \leq t < 0,6$. En la figura 5 podemos ver el error de seguimiento para la carga nominal de $50 \text{ ohms} \pm 50 \%$;

se puede ver como aún y con la perturbación del sistema nominal el regulador sigue funcionando como lo garantiza la robustez del algoritmo.

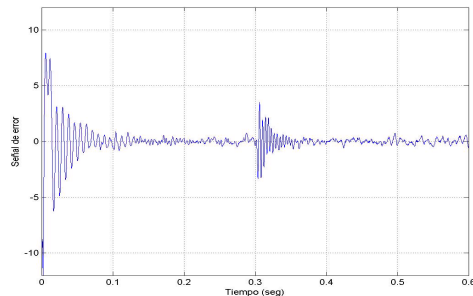


Figura 3. Señal de error.

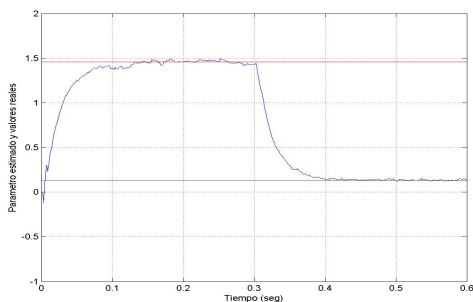


Figura 4. Parámetro Estimado η_k y valores reales.

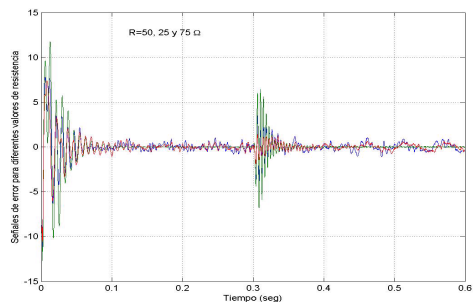


Figura 5. Señales de error para $R=50, 25$ y 75Ω .

V. CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se estudia como realizar regulación con modelo interno adaptable en el contexto de teoría de regulación. Se muestra como el esquema es robusto al cambio en los parámetros del sistema y se aplica el algoritmo al control de un convertidor buck para realizar el proceso de inversión, se observa como el regulador es robusto aún y con los armónicos presentes a causa del switcheo introducido por el PWM.

VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer al Departamento de Electrónica por el apoyo brindado para la realización del pre-

sente trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Besson O. and Stoica P. (1996). Estimation of the parameters of a random amplitude sinusoid by correlation fitting. *IEEE Trans. On Signal Processing*, No. 11, Vol. 44, pp. 2911-2916.
- Bodson M. and Douglas S. (1997). Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, No. 12, Vol. 33, pp. 2213-2221.
- Boudjema F., Boscardin M., Bidan P., Marpinard J. C., Valentin M. and Abatut J. L. (1989). VSS Approach to a Full Bridge Buck Converter Used for AC Sine Voltage Generation. *Proc. IECON*, pp. 82-89.
- Carpita M. and Marchesoni M. (1996). Experimental Study of a Power Conditioning Systems Using Sliding Mode Control. *IEEE Transaction on Power Electronics*, No. 5, Vol. 11, pp. 731-742.
- Fossas E., Olm J. M. and Zinober A. S. I. (2004). Robust Tracking Control of DC-to-DC Nonlinear Power Converters. *Proc. 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5291-5296.
- Foued Ben Amara, Pierre T. Kabamba and A. Galip Ulsoy (1997). Robust Adaptive Sinusoidal Disturbance Rejection in Linear Continuous-Time Systems, *Proc. 36th Conference on Decision and Control*, pp. 1878-1883.
- Francis. B. A. and Wonham W. M. (1976). The internal model principle of control theory. *Automatica*, Vol. 12, pp. 457-465.
- Hou M. (2005). Amplitude and frequency estimator of a sinusoid, *IEEE Tran. On Automatic Control*, No. 6, Vol. 50, pp. 855-858.
- Hou M. (2007). Estimation of a sinusoidal frequencies and Amplitudes using adaptive identifier and observer, *Tran. On Automatic Control*, No. 3, Vol. 52, pp. 493-499.
- Isidori A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. 3rd Edition, Springer-Verlag.
- Jesse B. Hoagg, Mario A. Santillo and Dennis S. Bernstein (2008). Discrete-Time Adaptive Command Following and Disturbance Rejection with Unknown Exogenous Dynamics. *IEEE Transaction on Automatic Control*, No. 4, Vol. 53, pp. 912-928.
- Linares-Flores J. and Sira-Ramírez H. (2004). DC motor velocity control through a DC-to-DC power converter. *Proc. 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5297-5302.
- Marino R. and Tomei P. (2003). Output Regulation for linear systems via adaptive internal model, *IEEE Tran. On Automatic Control*, No. 12, Vol. 48, pp. 2199-2202.
- Marino R. and Tomei P. (2002). Global Estimation of n unknown frequencies. *IEEE Tran. On Automatic Control*, No. 8, Vol. 47, pp. 1324-1328. August 2002.
- Obregón-Pulido G., Castillo-Toledo B. and Loukianov A. (2002). A Globally Convergent Estimator for n-Frequencies, *IEEE Tran. On Automatic Control*, No. 5, Vol. 47, pp. 857-863.
- Obregón-Pulido G., Castillo-Toledo B. and Loukianov A. (2005). A Globally Adaptive Internal Model Regulator for MIMO Linear Systems. *Proc. 44th Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, pp. 4821-4826.
- Praly L., Marconi L. and Isidori A. (2006). A new observer for an unknown harmonic oscillator. *Proc. 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, pp. 996-1001.
- Stoica P., Hongbin Li and Jian Li (2000). Amplitude estimation of sinusoidal signals: Survey, new results, and an application. *IEEE Trans. Signal Processing*, No. 2, Vol. 48, pp. 338-352.
- Tse C. K. and Chow M. (2000). Theoretical study of switching converters with power factor correction and output regulation. *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, No. 1, Vol. 47, pp. 1047-1055.
- Tse K. K., Shu-hung Chung H., Hui S. Y. R. and So H. C., (2000). Spectral Characteristics of Randomly Switched PWM DC/DC Converters Operating in Discontinuous Conduction Mode. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, No. 4, Vol. 47, pp. 759-769.
- Xia X. (2002). Global Frequency estimation using adaptive Identifiers, *IEEE Tran. On Automatic Control*, No. 7, Vol. 47, pp. 1188-1193.