

# Control de un Motor Brushless Trifásico con Aplicación a Vehículos Eléctricos

Diego Langarica Córdoba\*, Gerardo V. Guerrero Ramírez\*, Abraham Claudio Sánchez\*  
Carlos D. García Beltrán\* y Carlos M. Astorga Zaragoza\*.

\*Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico.

Interior Internado Palmira S/N, Col. Palmira, C.P. 62490, Cuernavaca, Morelos, México.  
d.langarica08e@cenidet.edu.mx  
Teléfono: 01(777) 362-7770

**Resumen**—En este artículo se propone un control no lineal robusto basado en el rediseño de Lyapunov, cuyo propósito es hacer frente a la incertidumbre paramétrica en la resistencia de los devanados del motor. El diseño del controlador nominal está basado en la propiedad de pasividad del motor, así como en el moldeo de energía e inyección de amortiguamiento. La aplicación está centrada en vehículos eléctricos. Los resultados en simulación muestran que el control robusto realiza un adecuado seguimiento de par electromagnético.

**Palabras clave:** Control no lineal, estabilidad de Lyapunov, vehículos eléctricos.

## I. INTRODUCCIÓN

El uso del vehículo eléctrico (VE) beneficia a nuestro medio ambiente al no emitir gases nocivos a la salud humana. La necesidad mundial de petróleo y las fuertes emisiones a la atmósfera por los automotores de combustión logran que el transporte eléctrico resurja como una solución eficaz. En recientes años el desarrollo del VE se ha incrementado, así también, el desarrollo de motores eléctricos capaces de satisfacer los requerimientos de tracción. El motor brushless (MB) presenta ventajas importantes con respecto a otros motores; no presenta deslizamiento, no requiere mantenimiento al no existir anillos rozantes, al tener imanes permanentes no requiere energía eléctrica para la excitación de campo, relación de par/peso y potencia/peso alto, robustez y funcionalidad, (Fitzgerald et al, 2003).

El MB trifásico también es usado en sistemas de generación de potencia trifásica y como actuador en servosistemas (Lyshevski, 1999). En las siguientes secciones se presenta: el modelo en ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) trifásico y bifásico del MB, el modelo del VE, el diseño de un control nominal basado en pasividad y un control robusto basado en el rediseño de Lyapunov para hacer frente a incertidumbre en el valor de la resistencia de los devanados del MB. Se requiere un controlador que logre el objetivo de seguimiento de par en toda la región de operación del VE, asegurando el acotamiento de las señales y la estabilidad interna del sistema completo.

## II. MODELADO DEL SISTEMA

En esta sección se presenta el desarrollo del modelo matemático propuesto para el VE, este se constituye generalmente por un subsistema eléctrico (banco de baterías, inversor trifásico y motor) y un subsistema mecánico (motor, transmisión mecánica y llantas), ambos subsistemas ilustrados en la figura 1. El motor brushless forma parte

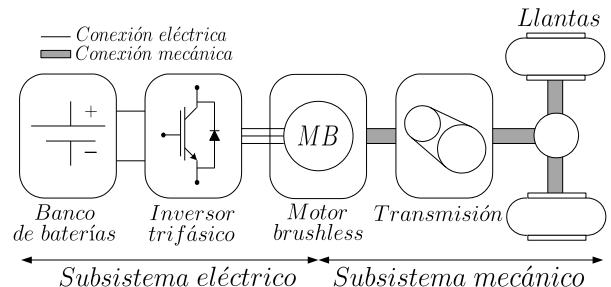


Fig. 1. Diagrama del VE.

tanto del subsistema eléctrico como el mecánico, ya que es el elemento encargado de transformar la energía eléctrica a energía mecánica y proporciona la fuerza de tracción necesaria para el movimiento del VE. El banco de baterías se considera como una fuente de voltaje ideal capaz de entregar la corriente que el motor le demande.

### II-A. Modelo del motor brushless en la formulación de Euler-Lagrange

La teoría concerniente a la obtención del modelo se puede consultar en (Ortega et al, 1998). Las ecuaciones E-L para la parte eléctrica y mecánica del MB están descritas por:

$$\begin{aligned}\Sigma_e : \quad & D_e \ddot{q}_e + W_1 \dot{q}_m \dot{q}_e + W_2 \dot{q}_m + R_e \dot{q}_e = M_e u \quad \text{y} \\ \Sigma_m : \quad & D_{MB} \ddot{q}_m - \tau_{em} + R_m \dot{q}_m = -\tau_L.\end{aligned}\quad (1)$$

El par electromagnético se define como:

$$\tau_{em} = \frac{1}{2} \dot{q}_e^\top W_1 \dot{q}_e + \dot{q}_e^\top W_2. \quad (2)$$

Para el subsistema eléctrico  $\Sigma_e$  se definen las coordenadas generalizadas como  $q_e = [q_1 \ q_2 \ q_3]^\top$  que representan las

cargas eléctricas en los devanados del estator. Las velocidades generalizadas  $\dot{q}_e = [\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3]^\top = [i_a i_b i_c]^\top$  son las corrientes que circulan por los devanados del estator. Para el subsistema mecánico  $\Sigma_m$  se define la coordenada generalizada  $q_m$  como la posición angular mecánica del rotor. La velocidad angular mecánica es  $\dot{q}_m$ .  $R_e = \text{diag}\{r_e, r_e, r_e\}$  es la matriz de resistencias de los devanados del motor.  $M_e$  es una matriz identidad de  $3 \times 3$  y la entrada de control es  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^\top$ , correspondiente al vector de voltajes de los devanados del estator.  $D_{MB}$ ,  $R_m$  y  $\tau_L$  son la inercia del MB, el coeficiente de fricción viscosa y el par de carga respectivamente. La matriz de inductancias del MB esta definida por (Kundur, 1994)

$$D_e = \begin{bmatrix} l_{aa} & l_{ab} & l_{ac} \\ l_{ba} & l_{bb} & l_{bc} \\ l_{ca} & l_{cb} & l_{cc} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Cada elemento de la matriz está representado por:

$$\begin{aligned} l_{aa} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2(n_p \theta_m) \\ l_{bb} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2(n_p \theta_m - 2\pi/3) \\ l_{cc} &= L_{ls} + \bar{L}_m - L_{\Delta m} \cos 2(n_p \theta_m + 2\pi/3) \\ l_{ab} &= l_{ba} = -\bar{L}_m/2 - L_{\Delta m} \cos 2(n_p \theta_m - \pi/3) \\ l_{ac} &= l_{ca} = -\bar{L}_m/2 - L_{\Delta m} \cos 2(n_p \theta_m + \pi/3) \\ l_{bc} &= l_{cb} = -\bar{L}_m/2 - L_{\Delta m} \cos 2(n_p \theta_m + \pi). \end{aligned} \quad (4)$$

$L_{ls}$  es la inductancia de dispersión,  $\bar{L}_m$  es el valor promedio de la inductancia de magnetización y  $L_{\Delta m}$  es el valor pico de la inductancia magnetización. Se definen  $W_1 = \partial D_e / \partial q_m$  y  $W_2 = \partial \mu / \partial q_m$  donde  $\mu$  es el vector de enlaces de flujo y su expresión es:

$$\mu = \lambda_m \begin{bmatrix} \sin(n_p q_m) \\ \sin(n_p q_m - 2\pi/3) \\ \sin(n_p q_m + 2\pi/3) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

$\lambda_m$  es la magnitud máxima de los enlaces y está determinada por el material magnético en el rotor,  $n_p$  es el número de pares de polos del motor. La posición angular eléctrica  $\theta_e$  y mecánica  $q_m$  están relacionadas por  $\theta_e = n_p q_m$ .

#### II-B. Modelo del motor brushless en variables bifásicas

El modelo matemático del subsistema eléctrico  $\Sigma_e$  del MB dada por la ecuación (1), tiene coeficientes que dependen de la posición del rotor. Con el motivo de eliminar esta dependencia se emplea la transformación de Park. Esta transformación permite referir todas las variables eléctricas del MB al marco de referencia fijo al rotor. La matriz de transformación de Park está dada por (Lyshevski, 1999):

$$k_s^r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos n_p q_m & \cos(n_p q_m - \frac{2\pi}{3}) & \cos(n_p q_m + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin n_p q_m & \sin(n_p q_m - \frac{2\pi}{3}) & \sin(n_p q_m + \frac{2\pi}{3}) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

La transformación de coordenadas solo se realiza para el subsistema eléctrico de la ecuación (1), esta se expresa en función de las variables bifásicas ( $qd$ ), es decir,  $\ddot{q}_e =$

$(k_s^r)^{-1} \ddot{q}_e^r$ ,  $D_e = (k_s^r)^{-1} D_e^r$ ,  $\mu = (k_s^r)^{-1} \mu^r$ ,  $\dot{q}_e = (k_s^r)^{-1} \dot{q}_e^r$  y  $u = (k_s^r)^{-1} u^r$ :

$$D_e(k_s^r)^{-1} \ddot{q}_e^r + \frac{\partial(k_s^r)^{-1} D_e^r}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_e + \frac{\partial(k_s^r)^{-1} \mu^r}{\partial q_m} \dot{q}_m \dots + R_e(k_s^r)^{-1} \dot{q}_e^r = M_e(k_s^r)^{-1} u^r. \quad (7)$$

Ahora se multiplica cada uno de los términos por  $k_s^r$ :

$$k_s^r D_e(k_s^r)^{-1} \ddot{q}_e^r + k_s^r \frac{\partial(k_s^r)^{-1} D_e^r}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_e + k_s^r \frac{\partial(k_s^r)^{-1} \mu^r}{\partial q_m} \dot{q}_m \dots + k_s^r R_e(k_s^r)^{-1} \dot{q}_e^r = k_s^r M_e(k_s^r)^{-1} u^r. \quad (8)$$

Al realizar las operaciones indicadas el modelo bifásico queda:

$$D_e^r \ddot{q}_e^r + W_1^r \dot{q}_m \dot{q}_e^r + W_2^r \dot{q}_m + R_e^r \dot{q}_e^r = u^r, \quad (9)$$

con

$$D_e^r = \begin{bmatrix} L_q & 0 \\ 0 & L_d \end{bmatrix}, \quad W_1^r = n_p \begin{bmatrix} 0 & L_d \\ -L_q & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_2^r = \begin{bmatrix} n_p \lambda_m \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } R_e^r = \begin{bmatrix} r_e & 0 \\ 0 & r_e \end{bmatrix}.$$

Se redefine la señal de control como  $u^r = [u_1^r \ u_2^r]^\top$  y el vector de corrientes como  $\dot{q}_e^r = [\dot{q}_1^r \ \dot{q}_2^r]^\top = [i_q \ i_d]^\top$ . El par electromagnético después de la transformación es:

$$\tau_{em} = \frac{3}{2} n_p \dot{q}_1^r ((L_d - L_q) \dot{q}_2^r + \lambda_m). \quad (10)$$

Las inductancias de las fases  $q$  y  $d$  son:  $L_q = L_{ls} + \frac{3}{2} \bar{L}_m - \frac{3}{2} L_{\Delta m}$  y  $L_d = L_{ls} + \frac{3}{2} \bar{L}_m + \frac{3}{2} L_{\Delta m}$ .

#### II-C. Modelo del vehículo eléctrico

Al considerar una transmisión simple (Haddoun et al, 2007), mostrada en la figura 2, las ecuaciones utilizadas para modelar esta transmisión son:

$$\tau = \frac{r}{\eta_g G} F_{te}. \quad (11)$$

Donde  $r$  es el radio de la llanta,  $\eta_g$  es la eficiencia de la transmisión,  $G$  es el cociente de reducción de velocidad angular de la transmisión,  $\tau$  es el par proporcionado en la flecha del motor y  $F_{te}$  es la fuerza de tracción que impulsa el VE. De la figura 2 se obtiene la relación entre la velocidad

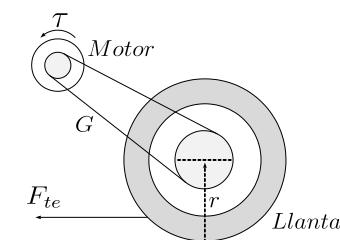


Fig. 2. Representación de la transmisión del VE.

angular del motor  $\dot{q}_m$  y la velocidad lineal  $v$  del VE con la siguiente expresión:

$$\dot{q}_m = G \frac{v}{r}. \quad (12)$$

Las fuerzas que actúan sobre el vehículo se muestran en la figura 3. La fuerza  $F_{te}$  es la fuerza de tracción que impulsa al VE y es proporcionada por el motor eléctrico a través de la transmisión. La fuerza de fricción  $F_{rr}$  entre los neumáticos y la superficie sobre la cual se mueve el auto está dada por  $F_{rr} = \mu_{rr}mg \cos(\psi)$ , donde  $\mu_{rr}$  es el coeficiente de fricción,  $m$  es la masa total del vehículo en  $Kg$ ,  $g = 9,8 m/s^2$  es el coeficiente de aceleración gravitacional y  $\psi$  es el ángulo de inclinación de la pendiente.

La fuerza de fricción con el viento está dada por  $F_{ad} = \frac{1}{2}\rho AC_d v^2$ , donde  $\rho = 1,25 kg/m^3$  es la densidad del aire,  $A$  es el área frontal de VE en  $m^2$ ,  $C_d$  es el coeficiente aerodinámico y  $v$  es la velocidad lineal del VE en  $m/s$ . La fuerza  $F_{hc}$  es la necesaria para mover el auto por una pendiente con un ángulo de inclinación  $\psi$ , esta es una componente del peso total del vehículo y está representada por  $F_{hc} = mg \sin(\psi)$ .

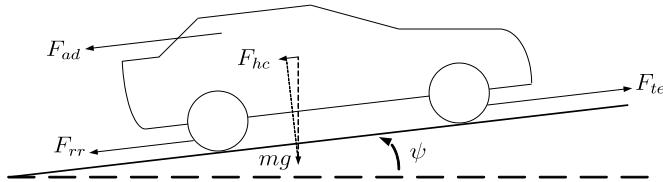


Fig. 3. Fuerzas que actúan sobre el VE.

Aplicando la segunda ley de Newton al VE se tiene que:

$$F_{te} - F_{rr} - F_{ad} - F_{hc} = ma, \quad (13)$$

donde  $a$  es la aceleración del auto en  $m/s^2$ . Despejando la fuerza de tracción  $F_{te}$  de la ecuación (13) y sustituyendo las expresiones correspondientes a cada fuerza que actúa sobre el VE se obtiene la expresión:

$$F_{te} = ma + \mu_{rr}mg \cos(\psi) + \frac{1}{2}\rho AC_d v^2 + mg \sin(\psi) \quad (14)$$

En esta última ecuación (14) no se han considerado al motor ni a la transmisión. A partir del subsistema mecánico  $\Sigma_m$  expresado en la ecuación (1) se despeja el par electromagnético  $\tau_{em}$  del motor:

$$\tau_{em} = D_{MB} \ddot{q}_m + R_m \dot{q}_m + \tau_L. \quad (15)$$

La inercia total en el marco de referencia del motor es la suma de la inercia de rotor del MB y la inercia del VE:

$$D_m = D_{MB} + D_{VE}. \quad (16)$$

La expresión para la inercia del VE es  $D_{VE} = \frac{1}{2}m \frac{r^2}{G^2}$ . Al sustituir las ecuaciones (11) y (16) en (15) se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau_{em} = D_m \ddot{q}_m + R_m \dot{q}_m + \frac{r}{\eta_g G} F_{te}. \quad (17)$$

Al sustituir la ecuación (14) en (17):

$$\begin{aligned} \tau_{em} = D_m \ddot{q}_m + R_m \dot{q}_m + \frac{r}{\eta_g G} (m \frac{dv}{dt} + \mu_{rr}mg \cos(\psi) \dots \\ \dots + \frac{1}{2}\rho AC_d v^2 + mg \sin(\psi)). \end{aligned} \quad (18)$$

La ecuación (18) contiene tanto a la velocidad angular del rotor  $\dot{q}_m$  como a la velocidad lineal  $v$  del VE. El modelo del subsistema mecánico se obtiene al dejar la ecuación (18) en función de  $\dot{q}_m$  usando la ecuación (12) y del despeje de la derivada de  $\dot{q}_m$ , entonces la ecuación para el subsistema mecánico es:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_m = \frac{\eta_g G^2}{D_m \eta_g G^2 + mr^2} (\tau_{em} - R_m \dot{q}_m - \frac{\mu_{rr}mgr \cos(\psi)}{\eta_g G} \dots \\ \dots - \frac{\rho AC_d r^3}{2\eta_g G^3} \dot{q}_m^2 - \frac{mgr \sin(\psi)}{\eta_g G}). \end{aligned} \quad (19)$$

Esta ecuación (19) representa todo el subsistema mecánico del VE dado por la figura 1, en donde se incluye también al MB.

### III. DISEÑO DEL CONTROLADOR ROBUSTO

#### III-A. Diseño del controlador nominal basado en pasividad

El diseño del control nominal para el MB se divide en dos partes; un controlador para el subsistema mecánico y un controlador para el subsistema eléctrico. Para la parte mecánica se inicia el diseño a partir de la ecuación (15) y de su dinámica deseada:

$$\begin{aligned} D_m \ddot{q}_m + R_m \dot{q}_m + \tau_L &= \tau_{em} \quad y \\ D_m \ddot{q}_{md} + R_m \dot{q}_{md} + \tau_L &= \tau_{emd}. \end{aligned} \quad (20)$$

El subíndice  $d$  hace referencia a las trayectorias deseadas. Ahora se definen los errores de velocidad y aceleración como  $\dot{\tilde{q}}_m = \dot{q}_m - \dot{q}_{md}$  y  $\ddot{\tilde{q}}_m = \ddot{q}_m - \ddot{q}_{md}$  respectivamente. Al obtener la resta de las ecuaciones (20) se obtiene la ecuación dinámica del error definida como

$$D_m \ddot{\tilde{q}}_m + R_m \dot{\tilde{q}}_m = \tau_{em} - [D_m \ddot{q}_{md} + R_m \dot{q}_{md} + \tau_L]. \quad (21)$$

El segundo miembro de la ecuación anterior es la entrada a la ecuación dinámica del error y se define como

$$\sigma_m = \tau_{em} - [D_m \ddot{q}_{md} + R_m \dot{q}_{md} + \tau_L], \quad (22)$$

por lo tanto, se puede decir que si  $\tau_{em} = \tau_{emd}$ , entonces,  $\sigma_m = 0$ . Para diseñar el controlador se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\tilde{q}}_m) = \frac{1}{2} D_m \dot{\tilde{q}}_m^2, \quad (23)$$

como  $D_m \geq 0$  y también  $\dot{\tilde{q}}^2 > 0$ , se puede decir que  $V(\dot{\tilde{q}}_m) > 0$ , además,  $V(0) = 0$ ,  $V(\dot{\tilde{q}}_m) \neq 0$  y  $V(\infty) \rightarrow \infty$ . La derivada de la función candidata es:

$$\dot{V} = \dot{\tilde{q}}_m D_m \ddot{\tilde{q}}_m. \quad (24)$$

Esta derivada de la función candidata debe ser definida negativa para garantizar la estabilidad. Para lograr que sea definida negativa se despeja de la ecuación (21) el término  $D_m \ddot{q}_m$  y se sustituye en la ecuación (24), con lo que se obtiene

$$\dot{V} = \dot{\tilde{q}}_m (\tau_{em} - [D_m \ddot{q}_{md} + R_m \dot{q}_m + \tau_L]). \quad (25)$$

Para forzar a que  $\dot{V}$  sea una función definida negativa se considera que:

$$\tau_{em} - [D_m \ddot{q}_{md} + R_m \dot{q}_m + \tau_L] = -\Gamma_m \dot{\tilde{q}}_m, \quad \Gamma_m > 0. \quad (26)$$

De esta manera  $\dot{V}$  queda definida negativa y su expresión es de la forma:

$$\dot{V} = -\dot{\tilde{q}}_m \Gamma_m \dot{\tilde{q}}_m = -\Gamma_m \dot{\tilde{q}}_m^2. \quad (27)$$

El par que se requiere para que el motor siga la referencia de velocidad surge de despejar el término  $\tau_{em}$  de la ecuación (26). A Este par y su derivada se les renombra como  $\tau_{emd}$  y  $\dot{\tau}_{emd}$  respectivamente y tienen la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tau_{emd} &= -\Gamma_m \dot{\tilde{q}}_m + D_m \ddot{q}_{md} + R_m \dot{q}_m + \tau_L \quad \text{y} \\ \dot{\tau}_{emd} &= -\Gamma_m \ddot{\tilde{q}}_m + D_m \ddot{q}_{md} + R_m \ddot{q}_m + \dot{\tau}_L. \end{aligned} \quad (28)$$

El par de carga y su derivada se definen a partir del modelo del VE como:

$$\begin{aligned} \tau_L &= \frac{r}{\eta_g G} \left( \frac{mr}{G} \ddot{q}_m + \mu_{rr} mg \cos(\psi) + \frac{\rho A C_d r^2}{2G^2} \dot{q}_m^2 \dots \right. \\ &\quad \dots + mg \sin(\psi)), \\ \dot{\tau}_L &= \frac{r}{\eta_g G} \left( \frac{mr}{G} \ddot{q}_m - \mu_{rr} mg \dot{\psi} \sin(\psi) + \frac{\rho A C_d r^2}{G^2} \dot{q}_m \ddot{q}_m \dots \right. \\ &\quad \dots + mg \dot{\psi} \cos(\psi)). \end{aligned} \quad (29)$$

Para el diseño del controlador de la parte eléctrica se definen como trayectoria a seguir el par deseado y su derivada definidos en la ecuación (28). Las corrientes deseadas se obtienen de la expresión del par electromagnético deseado en el MR fijo al rotor:

$$\tau_{emd} = \frac{3}{2} n_p \dot{q}_{1d}^r ((L_d - L_q) \dot{q}_{2d}^r + \lambda_m). \quad (30)$$

Para emular el par producido por el motor de corriente directa se desea que  $\dot{q}_{2d}^r = 0$ , entonces la expresión anterior se simplifica como:

$$\tau_{emd} = \frac{3}{2} n_p \lambda_m \dot{q}_{1d}^r. \quad (31)$$

Al despejar  $\dot{q}_{1d}^r$  de la ecuación anterior las corrientes deseadas y sus derivadas son:

$$\dot{q}_{ed}^r = \begin{bmatrix} \frac{2\tau_{emd}}{3n_p \lambda_m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \ddot{q}_{ed}^r = \begin{bmatrix} \frac{2\dot{\tau}_{emd}}{3n_p \lambda_m} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Ahora las ecuaciones que definen al subsistema eléctrico y su dinámica deseada son:

$$\begin{aligned} D_e^r \ddot{q}_e^r + W_1^r \dot{q}_m \dot{q}_e^r + W_2^r \dot{q}_m + R_e^r \dot{q}_e^r &= u^r \quad \text{y} \\ D_e^r \ddot{q}_{ed}^r + W_1^r \dot{q}_m \dot{q}_{ed}^r + W_2^r \dot{q}_m + R_e^r \dot{q}_{ed}^r &= u_d^r. \end{aligned} \quad (33)$$

Se define el error eléctrico y su derivada como  $e = \dot{q}_e^r - \dot{q}_{ed}^r$  y  $\dot{e} = \ddot{q}_e^r - \ddot{q}_{ed}^r$  respectivamente. Al restar la dinámica del sistema con la dinámica deseada y haciendo uso del error y su derivada se obtiene la ecuación dinámica del error eléctrico que es:

$$D_e^r \dot{e} + W_1^r \dot{q}_m e + R_e^r e = \sigma_e, \quad (34)$$

con la entrada definida como:

$$\sigma_e = u^r - [D_e^r \dot{q}_{ed}^r + W_1^r \dot{q}_m \dot{q}_{ed}^r + W_2^r \dot{q}_m + R_e^r \dot{q}_{ed}^r]. \quad (35)$$

Para propósitos de diseño se requiere que la matriz resultante del término  $W_1^r \dot{q}_m$  cumpla con la propiedad de antisimetría, es decir, que una matriz sea igual a su transpuesta negativa, en términos generales  $A = -A^\top$ . Para cumplir con esta propiedad se propone la matriz  $Z_1$  como:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & (L_d - L_q) n_p \dot{q}_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Esta última matriz se resta y se suma a la ecuación dinámica del error de la siguiente manera:

$$D_e^r \dot{e} + [W_1^r \dot{q}_m - Z_1] e + [R_e^r + Z_1] e = \sigma_e. \quad (37)$$

Como resultado se obtienen:

$$\begin{aligned} C_e^r &= W_1^r \dot{q}_m - Z_1 = n_p \dot{q}_m \begin{bmatrix} 0 & L_q \\ -L_q & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \\ \overline{R}_e^r &= R_e^r + Z_1 = n_p \begin{bmatrix} r_e & (L_d - L_q) n_p \dot{q}_m \\ 0 & r_e \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

donde  $C_e^r$  cumple con la propiedad de antisimetría. Bajo esta nueva transformación la ecuación dinámica del error queda:

$$\begin{aligned} D_e^r \dot{e} + C_e^r e + \overline{R}_e^r e &= \sigma_e, \\ \text{con } \sigma_e &= u^r - [D_e^r \dot{q}_{ed}^r + C_e^r \dot{q}_{ed}^r + W_2^r \dot{q}_m + \overline{R}_e^r \dot{q}_{ed}^r]. \end{aligned} \quad (39)$$

Se puede decir que si  $u^r = u_d^r$ , entonces  $\sigma_e = 0$ , por lo tanto la señal de control en lazo cerrado es:

$$u^r = D_e^r \ddot{q}_{ed}^r + C_e^r \dot{q}_{ed}^r + W_2^r \dot{q}_m + \overline{R}_e^r \dot{q}_{ed}^r. \quad (40)$$

Para efecto de una rápida convergencia, se añade amortiguamiento a la ecuación dinámica del error agregando a ambos miembros el producto de una matriz de ganancias  $K_1$  por el error de corrientes  $e$  de la siguiente manera:

$$D_e^r \dot{e} + C_e^r e + \overline{R}_e^r e + K_1 e = \sigma_e + K_1 e. \quad (41)$$

Debido a esta inyección de amortiguamiento la señal de control nominal queda como:

$$u^r = D_e^r \ddot{q}_{ed}^r + C_e^r \dot{q}_{ed}^r + W_2^r \dot{q}_m + \overline{R}_e^r \dot{q}_{ed}^r - K_1 e. \quad (42)$$

Ahora solo resta conocer  $K_1$ , esto se logra con el análisis de estabilidad de Lyapunov. Se propone la función candidata:

$$V = \frac{1}{2} e^\top D_e^r e. \quad (43)$$

$V$  es definida positiva ya que  $D_e^r > 0$  y además se tiene un producto cuadrático en el error. La derivada de la función candidata es:

$$\dot{V} = e^\top D_e^r \dot{e} \quad (44)$$

De la ecuación (41), cuando la entrada  $\sigma_e + K_1 e = 0$  se puede despejar el término  $D_e^r \dot{e}$  como:

$$D_e^r \dot{e} = -C_e^r e - [\bar{R}_e^r + K_1]e. \quad (45)$$

Entonces sustituyendo  $D_e^r \dot{e}$  en (44) se tiene:

$$\dot{V} = -e^\top C_e^r e - e^\top [\bar{R}_e^r + K_1]e = -e^\top [\bar{R}_e^r + K_1]e, \quad (46)$$

donde el término  $e^\top C_e^r e = 0$  ya que  $C_e^r$  es antisimétrico. Se debe forzar a que  $\dot{V}$  sea definida negativa, entonces la suma  $[\bar{R}_e^r + K_1]$  debe de ser definida positiva. Se propone  $K_1$  como:

$$K_1 = \begin{bmatrix} k & -(L_d - L_q)n_p \dot{q}_m \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (47)$$

por lo tanto

$$\bar{R}_e^r + K_1 = \begin{bmatrix} r_e + k & 0 \\ 0 & r_e + k \end{bmatrix}, \quad k > 0. \quad (48)$$

Esto asegura que  $\dot{V} < 0$ .

### III-B. Diseño del controlador robusto basado en el rediseño de Lyapunov

Los parámetros físicos del MB (resistencias de fase, inductancias, inercia y fricción del rotor) pueden cambiar por factores como: la temperatura, el desgaste en el esmalte de las bobinas ó las vibraciones mecánicas, desbalanceando al motor en su operación, en este artículo solo se consideran variaciones en las resistencias de fase. El control robusto tiene como finalidad solo hacer frente a incertidumbre paramétrica en la resistencia de los devanados del estator (Guerrero, 2001). Para contrarrestar el efecto de la variación se diseña un término adicional que se suma a la ley de control nominal dada en (42). Para encontrar este nuevo término se parte de la ecuación dinámica deseada para el subsistema eléctrico dado con la suma de la matriz  $Z_1$ , es decir:

$$D_e^r \ddot{q}_{ed}^r + C_e^r \dot{q}_{ed}^r + W_2^r \dot{q}_m + \bar{R}_e^r \dot{q}_{ed}^r = u_d^r. \quad (49)$$

Al considerar (32) y desarrollar todos los términos de (49), la ecuación de la dinámica deseada se puede agrupar de la siguiente forma:

$$u_d^{r0} = \begin{bmatrix} \frac{2L_q \dot{\tau}_{em}}{3n_p \lambda_m} + n_p \lambda_m \dot{q}_m \\ \frac{-2L_q \dot{q}_m \tau_{em}}{3\lambda_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\tau_{em}}{3n_p \lambda_m} \\ 0 \end{bmatrix} r_e^0 \quad (50)$$

$$= g_d^0 + B_d^0 \Phi^0.$$

Donde  $g_d^0$  es el vector de términos independientes al parámetro  $r_e$  con incertidumbre,  $B_d^0$  es el vector de términos que multiplican a  $r_e$  y  $\Phi^0$  contiene al parámetro con incertidumbre. El superíndice 0 indica valor nominal. A la ley de control nominal se le agrega un término  $B_d^0 w$  de la siguiente manera:

$$u^r = u_d^{r0} - K_1 e + B_d^0 w, \quad (51)$$

con  $w \in \mathbb{R}$ . Se define al error paramétrico como la diferencia entre el valor nominal y el real del parámetro

$r_e$ , es decir,  $\tilde{\Phi} = \Phi^0 - \Phi = r_e^0 - r_e$  y se debe de satisfacer que  $\|\tilde{\Phi}\| \leq \rho_1$  con  $\rho_1 \in \mathbb{R}^+$ .  $\rho_1$  es la cota máxima a la que puede variar  $r_e$ . Ahora solo falta hallar el valor de  $w$ , este surge del análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Para realizar el análisis se debe adecuar la ecuación (51) agregando el término  $\pm B_d^0 \Phi$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u^r &= g_d^0 + B_d^0 \Phi^0 - K_1 e + B_d^0 w \pm B_d^0 \Phi \\ u^r &= (g_d^0 + B_d^0 \Phi) + B_d^0 (\tilde{\Phi} + w) - K_1 e \\ u^r - (g_d^0 + B_d^0 \Phi) &= B_d^0 (\tilde{\Phi} + w) - K_1 e. \end{aligned} \quad (52)$$

El término  $u^r - (g_d^0 + B_d^0 \Phi)$  es la resta del comportamiento real menos el deseado y por lo tanto utilizando (39) es válido expresar:

$$D_e^r \dot{e} + C_e^r e + \bar{R}_e^r e = B_d^0 (\tilde{\Phi} + w) - K_1 e. \quad (53)$$

Se propone de nuevo una función candidata con el objetivo de halla la expresión de  $w$ , esta función es:

$$V = \frac{1}{2} e^\top D_e^r \dot{e}. \quad (54)$$

La función candidata  $V$  ya se probó anteriormente que es definida positiva. La derivada de la función candidata es:

$$\dot{V} = e^\top D_e^r \dot{e} \quad (55)$$

Al despejar el término  $D_e^r \dot{e}$  de (53) y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{V} = -e^\top C_e^r e - e^\top [\bar{R}_e^r + K_1]e + e^\top B_d^0 (\tilde{\Phi} + w). \quad (56)$$

Como ya se mencionó  $-e^\top C_e^r e = 0$ , además, ya se demostró también que  $e^\top [\bar{R}_e^r + K_1]e$  es una función definida positiva y al estar acompañada de un signo negativo automáticamente se vuelve una función definida negativa. Ahora solo resta demostrar que  $e^\top B_d^0 (\tilde{\Phi} + w)$  es una función definida negativa o en su defecto una función definida positiva pero acotada. Para esta demostración se propone que:

$$w = -\frac{\rho_1^2 (B_d^0)^\top e}{\rho_1 \|e^\top B_d^0\| + \epsilon}. \quad (57)$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^\top B_d^0 (\tilde{\Phi} + w) &= e^\top B_d^0 \left( \tilde{\Phi} - \frac{\rho_1^2 (B_d^0)^\top e}{\rho_1 \|e^\top B_d^0\| + \epsilon} \right) \\ &\leq \|e^\top B_d^0\| \left( \|\tilde{\Phi}\| - \frac{\rho_1^2 \| (B_d^0)^\top e\|}{\rho_1 \|e^\top B_d^0\| + \epsilon} \right) \\ &\leq \|e^\top B_d^0\| \left( \frac{\rho_1^2 \|e^\top B_d^0\| - \rho_1^2 \| (B_d^0)^\top e\| + \rho_1 \epsilon}{\rho_1 \|e^\top B_d^0\| + \epsilon} \right) \\ &= \frac{\rho_1 \|e^\top B_d^0\| \epsilon}{\rho_1 \|e^\top B_d^0\| + \epsilon} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned} \quad (58)$$

Por lo tanto la derivada de la función candidata es:

$$\dot{V} \leq -e^\top [\bar{R}_e^r + K_1]e + \epsilon, \quad (59)$$

y se puede decir que la ley de control robusta (51) asegura que el error tanto de velocidad como de corrientes sea acotado, mas no que converja a cero.

#### IV. SIMULACIÓN

Los parámetros del motor B26S conectado en estrella del fabricante HDT y del VE se listan a continuación en la tabla (I). La referencia de velocidad  $\dot{q}_{md}$  se encuentra dada por (60), la aceleración  $\ddot{q}_{md}$  y la derivada de la aceleración deseada  $\ddot{q}_{md}$  se obtienen de derivar algebraicamente a (60).

$$\dot{q}_{md} = 265,6(1 - e^{-0,001t^3}) \quad (60)$$

TABLA I  
PARÁMETROS DEL MB Y VE.

$r_e^0 = 0,121 \Omega$	$L_{ls} = 0,00001 H$
$L_m = 0,0008 H$	$L_{\Delta m} = 0 H$
$\lambda_m = 0,262 Vs/rad$	$D_{MB} = 0,022 Kgm^2$
$R_m = 0,00001 Nms/rad$	$n_p = 4$
$m = 1366 Kg$	$\mu_{rr} = 0,015$
$g = 9,8 m/s^2$	$\rho = 1,25 Kg/m^3$
$A = 2,66 m^2$	$C_d = 0,23$
$\psi = 0 rad$	$G = 5,5$
$r = 0,2876 m$	$\eta_g = 0,95$

En la simulación se usa un filtro de variable de estado para derivar el par de carga del VE. Este filtro tiene una representación en variable de estado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(2\pi f)^2 x_1 - 2^{2/3} \pi f x_2 + (2\pi f)^2 \tau_L, \end{aligned} \quad (61)$$

con  $f = 45 Hz$ . La entrada al filtro es el par de carga  $\tau_L$  dado por (29) y la salida son los estados  $x_1$  y  $x_2$  que son el par de carga filtrado y su derivada respectivamente. Estas dos salidas del filtro de estado son utilizadas en las ecuaciones (28) con la intención de ahorrar esfuerzo computacional.

Se asume que la matriz de resistencias de fase del MB presenta cambios paramétricos en las fases  $b$  y  $c$  desde el instante  $t = 0$  seg., es decir,  $r_a = 0,121 \Omega$ ,  $r_b = 0,242 \Omega$  y  $r_c = 0,1 \Omega$ . Estas resistencias de fase se agrupan en la matriz  $R_e = diag\{0,121, 0,242, 0,1\}$  usada por el modelo del subsistema eléctrico  $\Sigma_e$  del motor dado por la ecuación (1). El controlador nominal de  $\Sigma_e$  dado por la ecuación (42) solo cuenta con la información de que la resistencia nominal de los devanados es  $r_e^0 = 0,121 \Omega$ .

#### V. RESULTADOS

La figura 4 muestra las variables de interés. Se presenta el comportamiento de la velocidad desarrollada que sigue a la referencia que en este caso es una trayectoria suave cuya amplitud máxima corresponde a  $265,6 rad/seg$ . El error de velocidad tiene una amplitud máxima de  $0,05 rad/seg$ . La amplitud máxima de voltaje  $u_1^r = v_q$  está alrededor de  $280 V$ . También se muestra el seguimiento de corrientes bifásicas, la amplitud máxima de la corriente  $i_q$  es de  $123 A$  y se establecen en un valor aproximado de  $10 A$ . y debido

al desbalanceo de la matriz de resistencia, se presenta un error de corriente significativo.  $e_1$  es mucho menor que  $e_2$ , ya que la ley de control robusta solo actúa sobre el error de corriente  $e_1$  que corresponde al error de corriente  $i_q$ .

#### VI. CONCLUSIONES

Este artículo presenta el modelo de un VE. Es necesario remarcar que se excluye al inversor del modelado. Se aborda el modelo del motor síncrono de imanes permanentes en tres y dos fases en la formulación E-L; además, se incluyen las ecuaciones que modelan el comportamiento de un vehículo. Se hace uso del control basado en pasividad para moldear la energía e inyectar amortiguamiento al sistema en lazo cerrado. En el rediseño de Lyapunov se considera que la resistencia de los devanados es susceptible a variaciones en su valor; para contrarrestar estas variaciones se agrega un término adicional a la ley de control nominal, se observa un buen desempeño de la ley robusta y se cumple el objetivo de control de velocidad del VE.

#### REFERENCIAS

- Haddoun, A., M. Benbouzid, D. Diallo, R. Abdessemed, J. Ghouli, and K. Srairi. (2007). A loss minimization dtc scheme for ev induction motors. *IEEE Transaction on Vehicular Technology* **56**.  
 Fitzgerald, A. E., C. Kingsley, y S. D. Umans (2003). *Electric Machinery*. McGraw Hill.  
 Guerrero, G. V. (2001). *Control de Manipuladores de Robots Accionados por Motores de Inducción*. UNAM.  
 Kundur, Prabha (1994). *Power System Stability and Control*. McGraw Hill.  
 Lyshevski, Sergey E. (1999). *Electromechanical Systems, Electric Machines And Applied Mechatronics*. CRC press.  
 Ortega, R., A. Loría, P. J. Nicklasson y H. Sira-Ramírez (1998). *Passivity-based control of Euler- Lagrange systems*. Springer.

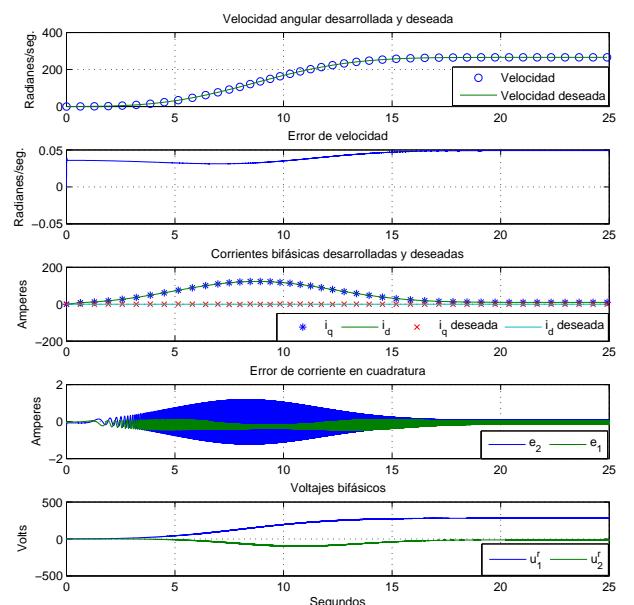


Fig. 4. Gráficas de resultados.