Observador Global para Sistemas Lineales con Entradas Desconocidas via Modos-Deslizantes de Alto-Orden

Leonid Fridman, Arie Levant y Jorge Dávila

Resumen—Se presenta el diseño de un observador global, basado en modos-deslizantes de alto-orden, para sistemas lineales con parámetros invariantes en tiempo y afectados por entradas desconocidas acotadas. Este algoritmo garantiza la observación de los estados, y la identificación de la entrada desconocida, de manera global para sistemas que satisfacen las condiciones necesarias y suficientes de observabilidad fuerte o detectabilidad fuerte. La convergencia de los estados se lleva a cabo en tiempo finito y de manera exacta para el caso fuertemente observable. La precisión de el esquema de observación, en presencia de ruido determinístico o de muestreo también es calculada.

I. INTRODUCCIÓN

I-A. Antecedentes y motivación

La observación de estados en presencia de entradas desconocidas es uno de los problemas mas importantes en la teoría de control moderna. Las condiciones estandar para realizar la observación de estos sistemas [1] establecen que la entrada desconocida pueda ser acoplada por las salidas del sistema (que el sistema sea de grado relativo 1). Este requerimiento no puede ser satisfecho en muchas ocasiones, incluso, un sistema mecánico afectado por fuerzas externas y con solo su posición medible no satisface esta condición [2].

La observación robusta de estados basada en modos-deslizantes es un tema que ha sido estudiado exitosamente durante los últimos años dentro del campo de los Sistemas de Estructura Variable ([3], [4], [5], [6]). La observación de estados basada en modos-deslizantes resulta atractiva debido a sus características como son, insensibilidad (mas que robustez) con respecto a las entradas desconocidas y la posibilidad de utilizar la inyección equivalente de salida.

Por otro lado, el diferenciador robusto exacto basado en modos-deslizantes ([7]) logra la mejor precisión posible de la r -ésima derivada $\varepsilon^{\frac{1}{r+1}}$ en presencia de ruido de amplitud ε . Desafortunadamente, el observador requiere que la derivada de orden $r + 1$ se encuentre acotada. En

L. Fridman y J. Dávila pertenecen al Departamento de Control, División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F., México, (lfridman, jadavila)@servidor.unam.mx

Arie Levant is with Applied Mathematics Dept., School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University, Ramat-Aviv. Tel-Aviv 69978, Israel, levant@post.tau.ac.il

L. Fridman y J. Dávila agradecen el apoyo financiero brindado para este trabajo, por parte del CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), Proyecto No. 43807-Y, el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) UNAM, Proyecto No. 107006-2 y a la DGSCA - DTD.

la práctica esto se traduce en qué el funcionamiento del diferenciador se puede garantizar solo de forma local [2].

I-B. Contribución

Son diseñados algoritmos de observación e identificación para sistemas lineales invariantes en tiempo (LTI) con entradas desconocidas acotadas, proporcionando: a) observación exacta, con convergencia en tiempo finito, del vector de estados para sistemas fuertemente observables; b) identificación exacta, con convergencia en tiempo finito, de entradas desconocidas suaves para el caso de sistemas fuertemente observables; c) estimación asintótica de los estados inobservables y de las entradas desconocidas para el caso de sistemas fuertemente detectables.

Para alcanzar estas metas, las condiciones necesarias y suficientes de observabilidad y detectabilidad fuertes son reformuladas en términos del grado relativo del sistema con respecto a la entrada desconocida. Un término lineal tipo Luenberger es introducido garantizando la convergencia del error de estimación a una región acotada del origen. El diferenciador robusto exacto basado en modos-deslizantes de alto-orden ([7]) es modificado garantizando la convergencia a cero en tiempo finito del error de estimación de los estados en presencia de entradas desconocidas. Las precisiones de los algoritmos son estimadas en presencia de ruidos medibles en sentido de Lebesgue y muestreos discretos.

II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

II-A. Planteamiento del problema

Considere un sistema LTI

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + D\zeta(t), \quad D \neq 0 \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{1}$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $\zeta \in \mathbb{R}$ es la entrada desconocida (perturbación), $u \in \mathbb{R}$ es la señal de control (conocida) y las matrices A, B, C, D son conocidas y de dimensiones adecuadas. Se considera que todas las entradas del sistema permiten la extensión de cualquier solución a lo largo del semi-eje $t \geq 0$.

El objetivo es diseñar un observador que garantice la estimación asintótica (preferiblemente convergencia exacta y en tiempo finito) de los estados y de la entrada desconocida. Sin pérdida de generalidad se asume que la señal de control u es igual a cero (i.e., $u(t) = 0$).

II-B. Observabilidad y detectabilidad fuertes

Definición 1. $s_0 \in \mathbb{C}$ es llamado un zero invariante de la tripleta $\{A, C, D\}$ si $\text{rank } R(s_0) < n + \text{rank}(D)$, en donde $R(s)$ es la matriz de Rosenbrock para el sistema (1):

$$R(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Definición 2. [1] El sistema (1) es llamado fuertemente observable si para cualquier estado inicial $x(0)$ y entrada desconocida $\zeta(t)$, $y(t) \equiv 0$ ($\forall t \geq 0$) implica $x \equiv 0$ ($\forall t \geq 0$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) El sistema (1) es fuertemente observable.
- (ii) La tripleta $\{A, C, D\}$ no tiene zeros invariantes.

Definición 3. [1] El sistema es fuertemente detectable si para toda $\zeta(t)$ y $x(0)$ se tiene que $y(t) = 0$ ($\forall t \geq 0$) implica $x \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) El sistema (1) es fuertemente detectable.
- (ii) El sistema (1) es de fase mínima (los zeros invariantes de la tripleta $\{A, C, D\}$ satisface $\text{Re } s < 0$).

Sea la matriz de observabilidad dada por

$$P = [C^T \quad (CA)^T \quad \dots \quad (CA^{n-1})^T]^T.$$

Recordemos que el sistema (1) es observable (en ausencia de entradas desconocidas) si y solo si la matriz P es de rango completo. En ese caso, mediante la selección adecuada de la matriz columna L , se puede asignar arbitrariamente el espectro de la matriz $A - LC$. Al rango de la matriz P (denotado como n_O) se le conoce como índice de observabilidad del sistema.

Definición 4. [8] El grado relativo del sistema (1) con respecto a la entrada desconocida está dado por el número r , tal que

$$CA^j D = 0, \quad j = 1, \dots, r-2, \quad CA^{r-1} D \neq 0. \quad (3)$$

II-C. Observabilidad y detectabilidad fuertes en función del grado relativo con respecto a la entrada desconocida.

Sea el grado relativo del sistema r y considere que $r \leq n$, aplicando un cambio de coordenadas apropiado el sistema (1) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u + D_1\zeta, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u, \\ y &= C_1x_1 \end{aligned} \quad (4)$$

en donde las matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, C y D toman la siguiente forma

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \delta & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

en donde $\delta = 0$ para $r = n_O$, o bien, $\delta = 1$ si $r < n_O$.

$$\begin{aligned} D_1 &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad d]^T, \quad d \neq 0, \\ C_1 &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \end{aligned} \quad (5)$$

Para el caso en el que $y \equiv 0$, la dinámica de (4) se reduce a $\dot{x}_2 = A_{22}x_2$, esta dinámica es llamada la dinámica-zero del sistema ([8]). Es importante hacer notar que los valores propios de la matriz A_{22} coinciden con los zeros invariantes del sistema (1). Entonces, el sistema es llamado de fase-mínima si A_{22} es Hurwitz dado que para este caso $y \equiv 0$ implica $x \rightarrow 0$.

Teorema 1: El sistema (1) es fuertemente observable si y solo si la salida del sistema (1) es grado relativo n con respecto a la entrada desconocida $\zeta(t)$.

Teorema 2: El sistema (1) es fuertemente detectable si y solo si el grado relativo del sistema con respecto a ζ existe, esto es $r \leq n_O$, y el sistema es de fase-mínima.

III. DISEÑO DEL OBSERVADOR PARA UN SISTEMA FUERTEMENTE OBSERVABLE

III-A. Observación de estados

Suponga que (1) satisface las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1: El sistema (1) es de grado relativo n con respecto a la entrada desconocida (i.e. $\zeta(t)$).

Esta afirmación garantiza que el sistema sea fuertemente observable. La siguiente afirmación tiene dos variantes

Afirmación 2: La entrada desconocida $\zeta(t)$ es una función acotada y medible en el sentido de Lebesgue, $|\zeta(t)| \leq \zeta^+$.

Afirmación 3: La entrada desconocida $\zeta(t)$ es una función acotada, $|\zeta(t)| \leq \zeta^+$, con derivadas sucesivas hasta el grado k acotadas por la misma constante ζ_1^+ . La k -ésima derivada es una función Lipzchitz con una constante Lipzchitz menor a ζ_1^+ . Entonces $\zeta^{(k+1)}(t)$ existe y es una función acotada y medible en el sentido de Lebesgue, $|\zeta^{(k+1)}(t)| \leq \zeta_1^+$.

La anterior afirmación será utilizada para la estimación de la entrada desconocida. El observador es diseñado de la siguiente forma

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz), \quad (6)$$

$$\hat{x} = z + Kv, \quad (7)$$

$$\dot{v} = W(y - Cz, v), \quad (8)$$

en donde $z, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x}$ es el estimado de x y la matriz columna $L = [l_1, l_2, \dots, l_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es un factor de corrección elegido de tal forma que los valores propios de la matriz $A - LC$ tengan partes reales negativas. La existencia de la matriz L está garantizada por la Afirmación 1 y el Teorema 1. La matriz K , el vector v y la función no lineal y discontinua W son elegidas de acuerdo a la elección de la Afirmación 2 o 3.

El observador se encuentra compuesto de dos partes. La ecuación (6) representa un observador Lueberger tradicional, el cuál permitirá garantizar que la diferencia $z - x$ se mantenga acotada en una vecindad del origen proporcional a la entrada desconocida ζ . Por otra parte, la ecuación (8) representa un esquema basado en modos-deslizantes de alto-orden y garantiza la convergencia a cero del error de estimación en un tiempo finito.

Suponga el caso en el que solo se desea observar los estados del sistema, para este caso se considera que las Afirmaciones 1 y 2 se cumplen. Note que para el caso en que $n = 1$ el único estado a ser observado coincide con la salida del sistema, por lo que la aplicación de un observador resulta redundante. Considere que $n > 1$.

Dado que el par (C, A) es observable, los valores propios de la matriz $(A - LC)$ pueden ser asignados de manera arbitraria mediante la elección adecuada de los elementos de la matriz columna L ([9]). Llamemos $\tilde{A} = A - LC$. La matriz de observabilidad del par $(C, \tilde{A})$ está dada por

$$\tilde{P} = [C^T \quad (C\tilde{A})^T \quad \dots \quad (C\tilde{A}^{n-1})^T]^T \quad (9)$$

esta matriz es no singular y de rango n . Defina a $K = \tilde{P}^{-1}$ por lo que (7) se puede escribir como

$$\hat{x} = z + \tilde{P}^{-1}v. \quad (10)$$

La parte no lineal del observador (8) se define como

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= w_1 = -\alpha_n M^{1/n} |v_1 - y + Cz|^{(n-1)/n} \times \\ &\quad \text{sign}(v_1 - y + Cz) + v_2, \\ &\vdots \\ \dot{v}_{n-1} &= w_{n-1} = -\alpha_2 M^{1/2} |v_{n-1} - w_{n-2}|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{n-1} - w_{n-2}) + v_n, \\ \dot{v}_n &= -\alpha_1 M \text{sign}(v_n - w_{n-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

en donde v_i , z_i y w_i , $i = 1, \dots, n$ son las componentes de los vectores v , z y w respectivamente. El parámetro M se escoge de tal forma que $M > |d|\zeta^+$, en donde $d = CA^{n-1}D$. Las constantes α_i son definidas de manera recursiva como se muestra en ([7]). En particular, una de las posibles elecciones para estas constantes es $\alpha_1 = 1, 1$, $\alpha_2 = 1, 5$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 5$, $\alpha_6 = 8$, las cuáles son suficientes para un sistema de grado relativo $n \leq 6$. Para su implementación computacional, los valores de las variables internas v_j and w_j , $j = 1, \dots, n$, deberán llevarse a cabo utilizando valores simultaneos del muestreo de las funciones y , z y v_j .

Designa a $x_O = Px$ como el vector de estados observables en su forma canónica, y nombre a $e_O = P(\hat{x} - x)$ como el vector de errores de estimación en su forma canónica.

Teorema 3: Sean satisfechas las Afirmaciones 1 y 2, y sea la salida del sistema alterada por un ruido de amplitud máxima ε , el cuál es una función medible en el sentido de Lebesgue. Entonces, con la adecuada elección de las constantes α_j y M , los estados x del sistema son estimados en tiempo finito por el observador (6), (9) - (10). En presencia del ruido de magnitud ε los errores de observación $e_{O_i} = \hat{x}_{O_i} - x_{O_i} = CA^{i-1}(\hat{x} - x)$ son de orden $\varepsilon^{(n-i+1)/n}$. Esto implica que las desigualdades $|e_{O_i}| \leq \gamma_i \varepsilon^{(n-i+1)/n}$ son satisfechas para una serie de constantes $\gamma_i > 0$ que dependen de los parámetros del observador y del sistema, y de la cota máxima de la entrada desconocida. En particular,

los estados x serán estimados **exactamente** y en un **tiempo finito** en ausencia de ruidos.

Considere que la salida y es muestreada en intervalos de tiempo constantes τ . Substituyendo $\bar{e}_1(t_j) = y(t_j) - Cz(t_j)$ por el término $\bar{e}_1 = y - Cz$ en (6), (8), $t \in [t_j, t_{j+1})$, $t_{j+1} - t_j = \tau$, se obtiene el observador para intervalos discretos. Note que el muestreo simultaneo de las componentes del vector $\bar{e}_1$ es importante.

Teorema 4: Considere que las Afirmaciones 1, 2 se cumplen, los parámetros del observador son elegidos como en el Teorema 3 y que la salida es medida sin errores en intervalos de tiempo, suficientemente pequeños, τ . Entonces, después de un transitorio de duración finita los errores canónicos de observación $e_{O_i} = CA^{i-1}(\hat{x}_i - x_i)$ son de orden τ^{n-i+1} .

Teorema 5: Bajo las condiciones del Teorema 4 considere que la parte no lineal del observador (11) es realizada (en computadora) haciendo uso del método de intergración de Euler con una constante de tiempo menor a τ . Entonces se obtienen los mismos resultados del Teorema 4.

III-B. Identificación de la entrada desconocida

Suponga que las Afirmaciones 1 y 3 son satisfechas. considere que $v \in \mathbb{R}^{n_O+k}$ satisface la ecuación diferencial no lineal (8) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= w_1 = -\alpha_{n+k+1} M^{1/(n+k+1)} |v_1 - y(t) + \\ &\quad Cz|^{(n+k)/(n+k+1)} \text{sign}(v_1 - y(t) + Cz) + v_2, \\ &\vdots \\ \dot{v}_n &= w_n = -\alpha_{k+2} M^{1/(k+2)} |v_n - w_{n-1}|^{(k+1)/(k+2)} \times \\ &\quad \text{sign}(v_n - w_{n-1}) + v_{n+1}, \\ &\vdots \\ \dot{v}_{n+k} &= w_{n+k} = -\alpha_2 M^{1/2} |v_{n+k-1} - w_{n+k-2}|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{n+k-1} - w_{n+k-2}) + v_{n+k}, \\ \dot{v}_{n+k+1} &= -\alpha_1 M \text{sign}(v_{n+k+1} - w_{n+k}), \end{aligned}$$

en donde M satisface $M > \zeta_1^+$. Como se dijo anteriormente, (11) tiene una forma recursiva y los parámetros α_i son calculados de la misma forma ([7]). Cabe recordar que en su implementación en una computadora, las variables internas w_j , $j = 1, \dots, n+k$, deberán ser calculadas usando valores muestreados simultaneamente de y , z_1 y v_j .

La convergencia en tiempo finito del método permite asegurar que la igualdad $\bar{e} = \omega$ es satisfecha después de un tiempo finito, en donde ω es el vector truncado

$$\omega = (v_1, \dots, v_n)^T. \quad (12)$$

La siguiente ecuación es utilizada

$$\hat{x} = z + \tilde{P}^{-1}v \quad (13)$$

substituyendo a (7) y la matriz $\tilde{P}$ se define como (9). La estimación de la entrada desconocida se lleva a cabo utilizando la ecuación

$$\hat{\zeta} = \frac{1}{d} (v_{n+1} + (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)), \quad (14)$$

$$s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1 = \det(sI - (A - LC))$$

en donde la segunda línea representa el polinomio característico de la matriz $A - LC$.

Teorema 6: Considere que las Afirmaciones 1 y 3 son satisfechas, considere que la salida es alterada por un ruido medible en el sentido de Lebesgue de amplitud máxima ε . Con una apropiada elección de α_j y M , en ausencia de ruido, el estado del sistema x es estimado en tiempo finito de forma exacta por el observador (6), (12) - (14). En presencia de ruido el error de observación en forma canónica e_{O_i} es de orden $\varepsilon^{(n-i+k+2)/(n+k+1)}$. El error de estimación de la entrada desconocida ζ será de orden $\varepsilon^{(k+1)/(n+k+1)}$.

Teorema 7: Considere que las Afirmaciones 1, 3 son satisfechas, los parámetros del observador son elegidos de acuerdo al Teorema 6 y la salida es medida en ausencia de ruido y en intervalos discretos suficientemente pequeños τ . Entonces, después de un tiempo finito, los errores de estimación en forma canónica e_{O_i} son de orden $\tau^{n+k-i+2}$, y la estimación de la entrada desconocida ζ es de orden τ^k .

IV. DISEÑO DEL OBSERVADOR PARA UN SISTEMA FUERTEMENTE DETECTABLE

IV-A. Observación de estados

Considere la siguiente Afirmación.

Afirmación 4: El sistema (1) es de grado relativo r , con respecto a la entrada desconocida ζ , y con $r < n$. El sistema (1) es de fase-mínima.

Defina

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz). \quad (15)$$

Es fácil probar que tanto el grado relativo, como el índice de observabilidad no cambian para el sistema del error ($A - LC, D, C$). Esto puede considerarse debido a que el espacio inobservable del sistema (1) no es alterado. Considere la transformación $(x_1^T, x_2^T)^T = Tx = [T_1 \ T_2]^T x$ que lleva al sistema ($A - LC, D, C$) a la forma (4). Defina la matriz de ganancia como $K = T^{-1}$. Esto representa que

$$A - LC = T^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} T, \quad (16)$$

en donde las matrices $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{r \times n-r}$.

La parte no lineal del observador (8) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= w_1 = -\alpha_r M^{1/r} |v_1 - y(t) + Cz|^{(r-1)/r} \times \\ &\quad \text{sign}(v_1 - y(t) + Cz) + v_2, \\ &\vdots \\ \dot{v}_{r-1} &= w_{r-1} = -\alpha_2 M^{1/2} |v_{r-1} - w_{r-2}|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sign}(v_{r-1} - w_{r-2}) + v_r, \\ \dot{v}_r &= -\alpha_1 M \text{sign}(v_r - w_{r-1}), \end{aligned} \quad (17)$$

en donde v_i , z_i y w_i son las componentes de los vectores v , z y w respectivamente, $M > |CA^{r-1}D|\zeta^+$. Para estimar el resto de las coordenadas introduzca

$$\omega_1 = (v_1, \dots, v_r)^T, \quad \omega_2 \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad (18)$$

finalmente

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_2 &= A_{21}\omega_1 + A_{22}\omega_2, \\ \hat{x} &= z + T^{-1} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

en donde $\omega_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$. Sea $n_O = \text{rank } P$, $r \leq n_O \leq n$, y defina como P_{n_O} a la submatriz de P compuesta por los primeros n_O renglones de P . Recordemos que $x_O = P_{n_O}x$ es llamo el vector de estados en su forma canónica. Al vector $e_O = P_{n_O}(\hat{x} - x)$ se le nombrará como el vector de errores de observación en su forma canónica.

Teorema 8: Sean las Afirmaciones 4 y 2 satisfechas y la salida del sistema afectada por un ruido de amplitud máxima ε , medible en el sentido de Lebesgue. En presencia del ruido el error de observación en su forma canónica e_{O_i} será de orden $\varepsilon^{(r-i+1)/r}$ en donde $1 \leq i \leq r$. El resto de los errores de observación tenderán a cero de forma asintótica en ausencia de ruido (i.e. con $\varepsilon = 0$) y a una región de orden $\varepsilon^{1/r}$ en presencia del ruido. Este mismo límite en la precisión de la estimación será obtenido para los $n - r$ estados restantes.

Considere que y es muestreada en intervalos discretos constantes τ . Substituyendo $y(t_j)$ por y en (6), (7), $t \in [t_j, t_{j+1})$, $t_{j+1} - t_j = \tau$, se obtiene una versión discreta del observador.

Teorema 9: Considere que las Afirmaciones 4, 2 son satisfechas, los parámetros del observador son ajustados de acuerdo al Teorema 3 y la salida del sistema es medida en ausencia de ruido en intervalos constantes de tiempo τ . Entonces, después de un tiempo finito, los errores de observación en su forma canónica $e_{O_i} = \hat{x}_{r_i} - x_{r_i}$ son de orden τ^{r-i+1} . Los errores de observación para los estados $x_{\bar{r}}$ es de orden τ .

IV-B. Identificación de la entrada desconocida

Considere que son satisfechas las Afirmaciones 4 y 3. Considere que $v \in \mathbb{R}^{r+k}$ satisface la ecuación diferencial no lineal

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= w_1 = -\alpha_{r+k+1} M^{1/(r+k+1)} |v_1 - y(t) + \\ &\quad Cz|^{(r+k)/(r+k+1)} \text{sign}(v_1 - y(t) + Cz) + v_2, \\ &\vdots \\ \dot{v}_r &= w_r = -\alpha_{k+2} M^{1/(k+2)} |v_r - w_{r-1}|^{(k+1)/(k+2)} \\ &\quad \text{sign}(v_r - w_{r-1}) + v_{r+1}, \\ &\vdots \\ \dot{v}_{r+k} &= w_{r+k} = -\alpha_2 M^{1/2} |v_{r+k-1} - w_{r+k-2}|^{1/2} \\ &\quad \text{sign}(v_{r+k-1} - w_{r+k-2}) + v_{r+k}, \\ \dot{v}_{r+k+1} &= -\alpha_1 M \text{sign}(v_{r+k+1} - w_{r+k}), \end{aligned} \quad (20)$$

en donde M es una constante y los parámetros α_i pueden ser seleccionados de la misma forma antes descrita ([7]). Considere como una selección particular los valores $\alpha_1 = 1,1$, $\alpha_2 = 1,5$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 5$, $\alpha_6 = 8$, que pueden ser usados para un sistema con $r + k \leq 5$. La identificación de la entrada desconocida ζ se puede obtener

mediante

$$\hat{\zeta} = \frac{1}{d}(v_{r+1} - (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r + a_{r+1} \omega_{21} + \dots + a_n \omega_{2,n-r})) \quad (21)$$

en donde $\omega_{21}, \dots, \omega_{2,n-r}$ son los componentes de ω_2 de (17), (19). Los siguientes Teoremas son formulados de forma análoga.

Teorema 10: Considere que las Afirmaciones 3 y 4 son satisfechas. En presencia de ruido de amplitud máxima ε , el observador (15), (16), (18) - (20) proporciona una convergencia en tiempo finito a una región de orden $\varepsilon^{(r+k-i+2)/(r+k+1)}$, $1 \leq i \leq r$, para las primeras r componentes del error de observación en su forma canónica e_O . El resto de las componentes del error de observación tiende cero asintóticamente en ausencia de ruido; y a una región de orden $\varepsilon^{(k+2)/(r+k+1)}$ en presencia de ruido, la misma precisión es obtenida para el resto de los $n - r$ estados en su forma canónica. La entrada desconocida es estimada asintóticamente con $\varepsilon = 0$, y en presencia de ruido, se garantiza una convergencia asintótica a una región de orden $\varepsilon^{(k+1)/(r+k+1)}$.

Teorema 11: Sean satisfechas las Afirmaciones 1, 3, 4, los parámetros del observador elegidos de acuerdo al Teorema 10 y la salida medida en ausencia de ruido en intervalos constantes de tiempo τ . Entonces, después de tiempo finito, el error de observación en su forma canónica e_{O_i} es de orden $\tau^{r+k-i+2}$, para $1 \leq i \leq r$, y el error de estimación de la entrada desconocida ζ converge a una región de orden τ^k . La estimación del resto de los estados es de orden $O(\tau^{k+2})$.

V. CASO DE MÚLTIPLES ENTRADAS DESCONOCIDAS - MÚLTIPLES SALIDAS

Considere un sistema con m salidas y el mismo número de entradas desconocidas

$$\dot{x} = Ax + Bu + D\zeta, \quad y = Cx, \quad (22)$$

en donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, $\zeta, y \in \mathbb{R}^m$, y las matrices (A, B, C, D) son de dimensiones adecuadas. La matriz de observabilidad del sistema (22) está dada por

$$P = [c_1^T, (c_1 A)^T, \dots, (c_1 A^{n-1})^T, \dots, (c_m)^T, (c_m A)^T, \dots, (c_m A^{n-1})^T]^T$$

en donde c_i , $i = 1, \dots, m$ representan los renglones de la matriz C . El vector de salidas $y = Cx$ se dice que tiene un vector de grados relativos $(r_1, \dots, r_m)$ con respecto a la entrada desconocida ζ , si

$$c_i A^s D_j = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad s = 0, 1, \dots, r_i - 2 \quad (23)$$

y además

$$\det Q \neq 0, \quad Q = \begin{bmatrix} c_1 A^{r_1-1} D_1 & \dots & c_1 A^{r_1-1} D_m \\ \dots & \dots & \dots \\ c_m A^{r_m-1} D_1 & \dots & c_m A^{r_m-1} D_m \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Lema 1: Considere que la salida y del sistema (22) tiene el vector de grados relativos $r = (r_1, \dots, r_m)$ con

respecto a la entrada desconocida ζ . Entonces los vectores $c_1, \dots, c_1 A^{r_1-1}, \dots, c_m, \dots, c_m A^{r_m-1}$ son linealmente independientes.

Afirmación 5: El vector de grados relativos con respecto a las entradas desconocidas existe y es igual a $(r_1, \dots, r_m)$. El sistema es de fase-mínima.

Afirmación 6: Defina $r_M = \max r_i$. Cada entrada desconocida (perturbación) $\zeta_i(t)$ es una función acotada, $|\zeta_i(t)| \leq \zeta_i^+$, con derivadas sucesivas acotadas $(r_M - r_i + k)$, siendo la última de estas derivadas Lipschitz. Esto implica que las derivadas $\zeta_i^{(r_M - r_i + k + 1)}(t)$ existen y son funciones medibles en el sentido de Lebesgue, $|\zeta_i^{(r_M - r_i + k + 1)}(t)| \leq \zeta_{1i}^+$. Otras derivadas se considerarán acotadas por la misma constante.

Seleccione la matriz columna L tal que la matriz $A - LC$ sea Hurwitz. Como anteriormente, la parte lineal del observador toma la siguiente forma

$$\dot{z} = Az + Bu + L(y - Cz). \quad (25)$$

Al igual que en el caso escalar cabe recordar que el sistema $(A - LC, D, C)$ conserva el grado relativo, índice de observabilidad y mantiene el subespacio inobservable del sistema original (A, D, C) . La dinámica del error correspondiente está dada por

$$\dot{e} = (A - LC)e + D\zeta,$$

en donde $e = x - z$. Realizando el cambio de coordenadas $[e_C^T \ e_N^T]^T = [T_C^T \ T_N^T]^T = Te$ la dinámica del error adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_C &= A_C e_C + A_{CN} e_N + D_C \zeta, & e_y &= C_C e_C, \\ \dot{e}_N &= A_{NC} e_C + A_{NN} e_N \end{aligned}$$

en donde los errores de observación en su forma canónica $e_{C_i} = (e_{C_{i1}}^T, \dots, e_{C_{ir_i}}^T)^T \in \mathbb{R}^{r_i}$ son calculados como $e_{C_{ij}} = c_i A^{j-1}(x - z)$, y $e_N \in \mathbb{R}^{n-r}$. Las matrices toman la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_C & A_{CN} \\ A_{NC} & A_{NN} \end{bmatrix} &= T(A - LC)T^{-1}, & (26) \\ A_C &= \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix}, & A_{CN} &= \begin{bmatrix} A_{C1} \\ \vdots \\ A_{Cm} \end{bmatrix}, & (27) \end{aligned}$$

$$D_C = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{1m} & \dots & D_{mm} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{ii,1} & a_{ii,2} & \dots & a_{ii,r_i} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{ij,1} & a_{ij,2} & \dots & a_{ij,r_j} \end{bmatrix}, \quad i \neq j,$$

$$\begin{aligned} e_{y_j} &= C_{C_j} e_{C_j}, & C_{C_i} &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \\ D_{i_j} &= [0 \ \dots \ 0 \ d_{i_j}]^T. \end{aligned} \quad (30)$$

en donde $d_{i_j} = c_i A^{r_i-1} D_j$, las matrices $A_{C,j}$ en (27) tienen valores solo en el último renglón y el resto de las matrices no tienen una forma específica. La matriz A_N es Hurwitz, $\det D_C \neq 0$ (Afirmación 5). La parte no lineal del observador está dada por

$$\dot{v}_i = W_i(v_i, y_i(t) - C_i z), \quad v = (v_1, \dots, v_m)^T \in \mathbb{R}^{m(r_M+k)}. \quad (31a)$$

La variable auxiliar v_i es una solución de la ecuación diferencial no lineal

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i,1} &= w_{i,1} = -\alpha_{r_M+k+1} M_i^{1/(r_M+k+1)} |v_{i,1} - y_i(t) + \\ &\quad C_i z|^{(r_M+k)/(r_M+k+1)} \text{sign}(v_{i,1} - y_i(t) + z_{i,1}) + v_{i,2}, \\ &\vdots \\ \dot{v}_{i,r_M+k} &= w_{i,r_M+k-1} = -\alpha_2 M_i^{1/2} |v_{i,r_M+k} - \\ &\quad w_{i,r_M+k-1}|^{1/2} \text{sign}(v_{i,r_M+k-1} - w_{i,r_M+k-2}) + v_{i,r_M+k}, \\ \dot{v}_{i,r_M+k+1} &= -\alpha_1 M_i \text{sign}(v_{i,r_M+k} - w_{i,r_M+k}), \end{aligned} \quad (32)$$

en donde las constantes M_i y los parámetros α_i son seleccionados de la misma forma antes mencionada ([7]). Defina

$$\begin{aligned} \omega_{1i} &= (v_{i,1}, \dots, v_{i,r_i})^T, & \omega_1 &= (\omega_{11}^T, \dots, \omega_{1m}^T)^T \in \mathbb{R}^r, \\ \omega_2 &\in \mathbb{R}^{n-r}, & \bar{v} &= (v_{1,r_1+1}, \dots, v_{m,r_m+1})^T. \end{aligned} \quad (33)$$

La dinámica del error de observación e_N tiene la forma

$$\dot{\omega}_2 = A_{CN} \omega_1 + A_N \omega_2. \quad (34)$$

los estados son estimados como

$$\hat{x} = z + T^{-1} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Las entradas desconocidas ζ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, son identificadas como $\hat{\zeta}_i$,

$$\hat{\zeta} = D_C^{-1} \left(\bar{v} - [\bar{A}_C \ \bar{A}_N] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \right) \quad (36)$$

en donde las matrices $\bar{A}_C$, $\bar{A}_N$ están compuestas por el último renglón de $A_{i,j}$ y $A_{C,j}$ que componen las matrices A_C y A_{CN} respectivamente:

$$\bar{A}_C = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = (a_{ij,1}, \dots, a_{ij,r_i})^T, \quad (37)$$

$$\bar{A}_N = \begin{bmatrix} a_{C1,1} & \dots & a_{C1,n-r} \\ & \ddots & \\ a_{C,m,1} & \dots & a_{C,m,n-r} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Llamemos a $x_O = P_n x$ el vector de estados en su forma canónica (note que no necesariamente todas son independientes). Al vector $e_O = P_n (\hat{x} - x)$ le damos el nombre de vector de errores de observación en su forma canónica. La parte linealmente independiente de este vector incluye las coordenadas $e_{Oij} = C_i A^{j-1} (\hat{x} - x)$, $j = 1, \dots, r_i$.

Teorema 12: Siendo las Afirmaciones 5, 6 cumplidas, con una adecuada selección de los parámetros, el observador (25)-(38) asegura la convergencia de los errores de observación en forma canónica a las regiones dadas por

$$\begin{aligned} |e_{Oij}| &\sim \varepsilon^{(r_M+k+2-j)/(r_M+k+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, r_i, \\ \|\hat{x}_N - x_N\| &\sim \varepsilon^{2/(r_M+k+1)} \end{aligned}$$

en donde ε es la magnitud de un ruido medible en sentido de Lebesgue. Garantizando una precisión de convergencia

$$|e_{Oij}| \sim \tau^{(r_M+k+2-j)}, \quad j = 1, 2, \dots, r_i, \quad \|\hat{x}_N - x_N\| \sim \tau^{k+2}$$

en presencia de intervalos constantes de muestreo τ en ausencia de ruido. Todo el resto de las coordenadas son estimadas de forma asintótica con una precisión $\varepsilon^{(k+2)/(r_M+k+1)}$ y τ^{k+2} en presencia de ruido y muestreo, respectivamente. Las entradas desconocidas ζ_i son estimadas de forma asintótica con una precisión de orden $\varepsilon^{(r_M+k+1-r_i)/(r_M+k+1)}$ y $\tau^{(r_M+k+1-r_i)}$ respectivamente.

La observación exacta del vector de estados en su forma canónica, así como la identificación asintótica y exacta de las entradas desconocidas es posible solo en ausencia de ruido (i.e. $\varepsilon = 0$) y con medidas continuas.

VI. CONCLUSIONES

Fueron diseñados algoritmos basados en modos-deslizantes de alto-orden para la observación de estados en sistemas lineales con entradas desconocidas acotadas. Los algoritmos garantizan la observación global de los estados y la identificación de las entradas desconocidas bajo las condiciones de observabilidad y detectabilidad fuertes. Las condiciones son reformuladas en términos del grado relativo del sistema con respecto a las entradas desconocidas. La convergencia global y en tiempo finito es desarrollada para el caso fuertemente observable. Para el caso fuertemente detectable parte del estado es estimado de forma exacta en tiempo finito, mientras que el resto de los estados y la entrada desconocida convergen asintóticamente. Los resultados obtenidos son generalizados al caso de Multivariable.

REFERENCIAS

- [1] M. Hautus, "Strong detectability and observers," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50, pp. 353–368, 1983.
- [2] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, "Second-order sliding-mode observer for mechanical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, no. 11, pp. 1785–1789, November 2005.
- [3] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. London: Taylor and Francis, 1999.
- [4] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding Mode Control*. London: Taylor and Francis, 1998.
- [5] J. Barbot, M. Djemai, and T. Boukhobza, "Sliding mode observers," in *Sliding Mode Control in Engineering*, ser. Control Engineering, W. Perruquetti and J. Barbot, Eds. New York: Marcel Dekker, 2002, pp. 103–130.
- [6] A. Poznyak, "Stochastic output noise effects in sliding mode estimations," *International Journal of Control*, vol. 76, pp. 986–999, 2003.
- [7] A. Levant, "High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [8] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. London: England: Springer-Verlag, 1996.
- [9] C. Chen, *Linear Systems: theory and design*. New York: Oxford University Press, 1999.