

# Sincronización Robusta de Sistemas Lagrangianos de $n$ GDL Bajo el Esquema Maestro-Esclavo

David I. Rosas Almeida<sup>1</sup> y Joaquín Alvarez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Mexicali, México, drosas@uabc.mx.

<sup>2</sup>Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada,

División de Física Aplicada,

Ensenada, México, jqalvar@cicese.mx.

Resumen— Se propone una técnica para sincronizar dos sistemas lagrangianos de  $n$  grados de libertad ( $n$ GDL) bajo el esquema de interconexión maestro-esclavo. Se considera que en ambos sistemas pueden estar presentes incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas acotadas. Además, se considera que sólo los vectores de posiciones de ambos sistemas están disponibles.

La técnica de sincronización garantiza sincronización idéntica asintótica bajo las condiciones antes mencionadas.

El diseño de la señal de acoplamiento se basa en un observador discontinuo que estima los vectores de velocidades y, con la ayuda de un filtro, también estima las no linealidades y perturbaciones en los sistemas. El desempeño de la técnica se ilustra numéricamente.

## I. Introducción

En los últimos años se han propuesto muchas técnicas de sincronización bajo el esquema de interconexión maestro-esclavo. Algunas de ellas han sido desarrolladas para sincronizar sistemas caóticos las cuales usan técnicas de control clásico en el diseño de las señales de acoplamiento, por ejemplo retroalimentación lineal de estado (Sarasola et. al., 2003) y (Guo y Wallance, 2002), control por modos deslizantes (Tao y Hui, 2002) y sincronización basada en observadores (Andrievsky y Fradkov, 2001).

Un problema importante es la sincronización de sistemas mecánicos, ver por ejemplo (Rodríguez, 2002) y (Dong y James, 2002). La sincronización de sistemas mecánicos llega a ser muy importante cuando dos sistemas mecánicos interactúan para desarrollar una tarea coordinada. El comportamiento cooperativo ofrece flexibilidad que no puede obtenerse por sistemas individuales. Sistemas multirobot y sistemas de teleoperación son algunos ejemplos de aplicaciones. Una forma de modelar a los sistemas mecánicos es a través de las ecuaciones de movimiento de Lagrange; en este trabajo se considera que los mecanismos están modelados por estas ecuaciones.

La mayoría de las técnicas de sincronización que se han propuesto consideran modelos idénticos para los

sistemas maestro y esclavo así como libre de incertidumbres y perturbaciones y acceso completo al estado.

Las condiciones anteriores son difíciles de satisfacer en la práctica, por lo tanto, un problema importante es garantizar un buen desempeño en el sistema en lazo cerrado a pesar de la existencia de incertidumbres, perturbaciones y medición parcial del estado.

Existen algunas propuestas para resolver el problema de sincronización robusta las cuales se basan principalmente en técnicas de control adaptivo y modos deslizantes, ver por ejemplo (Andrievsky y Fradkov, 2001), (Dong y James, 2002) y (Tao y Hui, 2002). Sin embargo, el problema de sincronización robusta para muchas clases de sistemas dinámicos aún es un problema abierto.

Basados en el esquema maestro-esclavo, en este trabajo se propone una técnica para sincronizar dos sistemas lagrangianos de  $n$ GDL con el mismo orden. Estos sistemas pueden tener perturbaciones externas acotadas e incertidumbres paramétricas al mismo tiempo. Además se considera que sólo se tiene medición de los vectores de posición.

La técnica de sincronización se basa en la estabilización del origen del sistema de error que se construye al restar el sistema esclavo al sistema maestro. Se usa un observador discontinuo robusto que estima los vectores de velocidad y, con la ayuda de un filtro, los términos no lineales y las perturbaciones para su compensación por un controlador. El control que se utiliza linealiza el sistema de error pero no linealiza el sistema esclavo ya que los términos no lineales se son cero cuando se alcanza la sincronización.

De esta forma el sistema en lazo cerrado tiene buenas propiedades de robustez similares a las propiedades de los controladores discontinuos pero, a diferencia de estos, no se tiene el problema de chattering porque idealmente la señal de acoplamiento es suave.

El artículo está organizado de la siguiente forma. El planteamiento del problema así como el objetivo de

sincronización está dado en la sección 2. En la sección 3 se presenta el diseño de la señal de acoplamiento. Para ilustrar el desempeño de la técnica de sincronización en la sección 4 se presenta un ejemplo en donde se sincronizan dos mecanismos de dos grados de libertad. Finalmente en la sección 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

## II. Objetivo de sincronización

Considere al sistema maestro dado por

$$M(q_m)\ddot{q}_m + C(q_m, \dot{q}_m)\dot{q}_m + G(q_m) + \mu_m(\ddot{q}_m, \dot{q}_m, q_m, t) = \tau, \quad (1)$$

y al sistema esclavo

$$M(q_s)\ddot{q}_s + C(q_s, \dot{q}_s)\dot{q}_s + G(q_s) + \mu_s(\ddot{q}_s, \dot{q}_s, q_s, t) = \tau + v, \quad (2)$$

donde, en ambos sistemas,  $M(q)$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q})$  es la matriz centrífuga y de Corialis,  $G(q)$  es el vector de pares gravitacionales,  $\mu(\cdot)$  es un vector de perturbaciones que incluye perturbaciones externas acotadas y términos producidos por incertidumbres paramétricas,  $\tau$  es el vector de pares de entrada. En el sistema esclavo  $v \in \mathbb{R}^n$  es el vector de señales de acoplamiento.

El objetivo es diseñar el vector de acoplamiento  $v$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_m(t) - q_s(t)\| = 0.$$

Se definen las variables de error

$$e = q_m - q_s, \quad \dot{e} = \dot{q}_m - \dot{q}_s, \quad \ddot{e} = \ddot{q}_m - \ddot{q}_s.$$

Escribiendo el sistema esclavo en términos de las variables de error se tiene

$$M(q_m - e)(\ddot{q}_m - \ddot{e}) + C(q_m - e, \dot{q}_m - \dot{e})(\dot{q}_m - \dot{e}) + G(q_m - e) + \mu_s(\cdot) = \tau + v. \quad (3)$$

Restando (3) a (1) y definiendo los términos siguientes

$$\begin{aligned} h(t, e, \dot{e}) &= [M(q_m) - M(q_m - e)]\ddot{q}_m + \\ & [C(q_m, \dot{q}_m) - C(q_m - e, \dot{q}_m - \dot{e})]\dot{q}_m + \\ & G(q_m) - G(q_m - e), \\ \phi(\cdot) &= \mu_m(t) - \mu_s(t), \end{aligned}$$

la dinámica del sistema de error está descrita por el siguiente sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ M^{-1}(\cdot)[-C(\cdot)\dot{e} - D\dot{e} - h(\cdot) - \phi(\cdot) - v] \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$y_e = e, \quad (5)$$

donde  $M^{-1}(\cdot) = M^{-1}(q_m - e)$ ,  $C(\cdot) = C(q_m - e, \dot{q}_m - \dot{e})$ ,  $h(\cdot) = h(t, e, \dot{e})$  y  $\phi(\cdot)$  es un término de perturbación acotado;  $\|\phi(\cdot)\| \leq \rho$ ,  $\rho$  es una constante.

Ahora el problema de sincronización se ha transformado en el diseño de la señal de control  $v$  tal que el sistema (4) tenga al origen como un punto de equilibrio asintóticamente estable.

## III. Diseño de la señal de acoplamiento

Para estabilizar en forma asintótica el origen del sistema (4) la técnica de control por modos deslizantes podría ser una buena opción. Sin embargo, esta técnica presenta el problema conocido como chattering debido a los componentes de alta frecuencia contenidos en la señal de control (Utkin, 1992). Por otro lado, los controladores suaves solo pueden garantizar convergencia a una pequeña vecindad del origen cuando la planta tiene perturbaciones que no se desvanecen (Khalil, 2002).

En este trabajo se utiliza la estructura de control que se muestra en la figura (1) que garantiza la convergencia asintótica al origen evitando el problema del chattering. En esta figura la planta es el sistema (4), el observador estima el vector de estado  $(e, \dot{e})^T$  y, usando un filtro, también estima los términos no lineales y las perturbaciones para ser compensadas. El controlador es una retroalimentación de estados con compensación de perturbaciones. En las siguientes subsecciones se describe cada bloque y se analiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

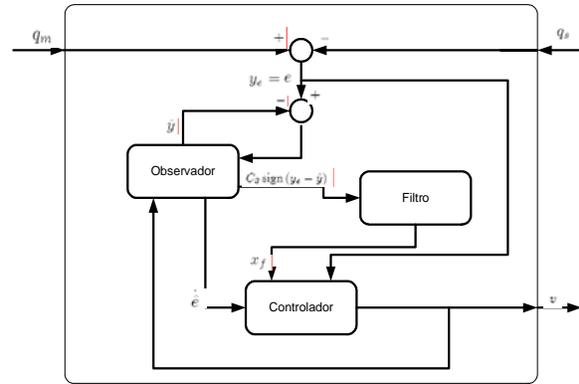


Figura 1. Estructura de control para estabilizar el origen del sistema (4).

### A. Diseño del observador de estado

Una parte muy importante de la estructura de control mostrada en la figura (1) es el observador, en esta sección se presenta el procedimiento para su diseño.

Considere el sistema descrito por (4-5) que por simplicidad se escribe en la forma siguiente

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ f(\cdot) - M^{-1}(\cdot)v \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$y_e = e, \quad (7)$$

donde

$$f(\cdot) = M^{-1}(\cdot)[-C(\cdot)\dot{e} - h(\cdot) - \phi(\cdot)]$$

Se asume que el comportamiento del sistema (6-7) es acotado para cualquier entrada  $v$  y perturbación acotada. El observador tiene la forma siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ -M^{-1}(\cdot)v \end{bmatrix} + H(y_e - \hat{y}), \quad (8)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (9)$$

donde  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T \in \mathbb{R}^{2n}$  y el vector  $H(y_e - \hat{y})$  tiene la forma

$$H(y_e - \hat{y}) = \begin{bmatrix} C_1(y_e - \hat{y}) \\ C_2(y_e - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y_e - \hat{y}) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

donde  $C_1, C_2$  y  $C_3$  son matrices diagonales definidas positivas con elementos  $c_{i,j}$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ . Defina las variables de error  $\epsilon_1 = e - \hat{x}_1$ ,  $\epsilon_2 = \dot{e} - \hat{x}_2$ , cuya dinámica esta dada por el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2 - C_1 \epsilon_1 \\ f(\cdot) - C_2 \epsilon_1 - C_3 \text{sign}(\epsilon_1) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Debido a que el estado de la planta es acotado y las

perturbaciones son acotadas entonces el término  $f(\cdot)$  también es acotado

$$\|f(\cdot)\| \leq \gamma. \quad (12)$$

Proposición 1: Para el sistema (11) es posible encontrar un conjunto de matrices  $C_1, C_2$  y  $C_3$  tal que el origen sea un punto de equilibrio exponencialmente estable. Entonces al sistema definido por (8) y (9) es un observador para el sistema definido por (6) y (7).

Demostración: Se hace el cambio de variables  $z_1 = \epsilon_1$  y  $z_2 = \epsilon_2 - C_1 \epsilon_1$ . El sistema (11) en las nuevas coordenadas está dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -C_2 z_1 - C_1 z_2 + f(\cdot) - C_3 \text{sign}(z_1), \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $f(\cdot)$  es un vector columna con componentes  $f_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El sistema (13) es un conjunto de subsistemas con la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,i} &= z_{2,i}, \\ \dot{z}_{2,i} &= -c_{2,i} z_{1,i} - c_{1,i} z_{2,i} + f_i(\cdot) - c_{3,i} \text{sign}(v_{1,i}). \end{aligned} \quad (14)$$

Este sistema tiene al origen como un punto de equilibrio exponencialmente estable si

$$c_{2,i} > 0, \quad c_{1,i} > 0, \quad (15)$$

$$c_{3,i} > 2\lambda_{\max}(P_i) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_i)}} \left( \frac{c_{2,i} \gamma_i}{\theta} \right), \quad (16)$$

para alguna  $0 < \theta < 1$ ,  $|f_i(\cdot)| \leq \gamma_i$  y  $P_i$  es una matrix con dimensión  $2 \times 2$  la cual es la solución de la ecuación

de Lyapunov  $A_i^T P_i + P_i A_i = -I$ , donde la matrix  $A_i$  está definida por

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_{2,i} & -c_{1,i} \end{bmatrix}.$$

La prueba de estabilidad del sistema (14) está dada en (Rosas y Alvarez, 2005). Si se satisfacen las condiciones (15-16) entonces el sistema (8-9) es un observador para el sistema (6-7) con convergencia exponencial al estado de la planta. ■

## B. Identificación de perturbaciones

El sistema (13) tiene una superficie de discontinuidad en  $z_1 = 0$  y el término  $C_3 \text{sign}(z_1)$  produce un modo deslizante de segundo orden (Dávila y Fridman, 2005), es decir, el término discontinuo aparece hasta la segunda derivada temporal de la superficie de discontinuidad

$$\ddot{z}_1 = f(\cdot) - C_2 z_1 - C_1 z_2 - u_{eq} = 0.$$

Entonces, el control equivalente está presente en  $z_1 = z_2 = 0$ , lo que implica que  $e_1 = e_2 = 0$  y  $e = \hat{x}$ ; de esta forma, el control equivalente  $u_{eq}$  está dado por

$$u_{eq} = f(\cdot).$$

Como se puede ver, el control equivalente está formado por los términos no lineales y las perturbaciones. El control equivalente es el promedio del término  $C_3 \text{sign}(z_1)$  cuando las trayectorias están en el origen. En este caso, la convergencia a la superficie de discontinuidad es exponencial; por lo tanto, se puede aproximar el término de perturbación en forma asintótica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{C_3 \text{sign}(v_1(t))} = u_{eq},$$

donde la barra indica el promedio.

Este promedio se obtiene a través de un conjunto de filtros de primer orden

$$\dot{x}_f = -\Gamma x_f + \Gamma (C_3 \text{sign}(z_1(t))), \quad (17)$$

donde  $x_f \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado y  $\Gamma$  es una matrix diagonal definida positiva, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f = u_{eq}.$$

El criterio para seleccionar la matrix  $\Gamma$  está dado en (Dávila y Fridman, 2005).

## C. Análisis de estabilidad

La entrada de control o señal de acoplamiento está dada por

$$v = M(\cdot) (K_p e + K_v \hat{x}_2 + x_f). \quad (18)$$

Para probar estabilidad del sistema en lazo cerrado se sustituye la entrada de control (18) en los sistemas (6) y (8)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\cdot) - K_p e - K_v \dot{e} + K_v z_2 - x_f \\ \dot{e} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$y_e = e, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 + C_1 (y_e - \hat{y}) \\ -K_p e - K_v \hat{x}_2 - x_f + h_1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_1, \quad (22)$$

where

$$h_1 = C_2 (y_e - \hat{y}) + C_3 \text{sign}(y_e - \hat{y})$$

Se definen las variables de error entre el estado de la planta y el estado del observador;  $z_1 = e_1 - \hat{x}_1$  and  $z_2 = e_2 - \hat{x}_2$ , su dinámica está dada por

$$\dot{z}_1 = z_2 - C_1 z_1 \quad (23)$$

$$\dot{z}_2 = f(\cdot) - C_2 z_1 - C_3 \text{sign}(z_1).$$

Usando el resultado de la sección anterior se pueden encontrar las matrices  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  tal que las trayectorias del observador ((21)) converjan a las trayectorias de la planta. En (Dávila y Fridman, 2005) se presenta el criterio para la selección de la matriz  $\Gamma$  del filtro (17) tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_f(t) = f(\cdot).$$

Entonces, el término  $f(\cdot) - x_f + K_v z_2$  en el sistema (19) puede considerarse como una perturbación que se desvanece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(\cdot) - x_f + K_v z_2\| = 0$$

con una razón de decrecimiento exponencial. Por lo tanto, se puede encontrar un conjunto de matrices  $K_p$  y  $K_v$  tal que el origen del sistema (19) será asintóticamente estable (Khalil, 2002).

#### IV. Sincronización de dos mecanismos de 2GDL

Considere dos sistemas mecánicos de 2GDL como se muestra en la figura 2, su modelo está dado por

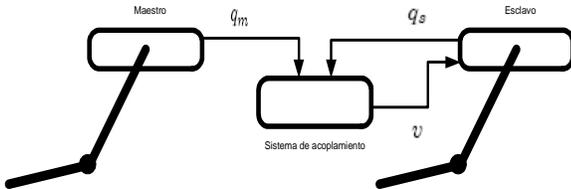


Figura 2. Diagrama a bloques de la sincronización de dos mecanismos de 2GDL.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

$$M_{11} = 0.0414 + 0.019 \cos(q_2),$$

$$M_{12} = 0.0106 + 0.0095 \cos(q_2),$$

$$M_{21} = M_{12},$$

$$M_{22} = 0.0106,$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = -0.0095\dot{q}_2 \sin(q_2),$$

$$C_{12} = -0.0095\dot{q}_2 \sin(q_2) - 0.0095\dot{q}_1 \sin(q_2),$$

$$C_{21} = 0.0095\dot{q}_1 \sin(q_2),$$

$$C_{22} = 0,$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 2.04722 \cos(q_1) + 0.6174 \cos(q_1 + q_2) \\ 0.6174 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo se consideró una perturbación  $\mu(t)$  en el sistema esclavo que satisface  $\|\mu(t)\| \leq 0.5$ .

En la figura 3 se muestra el comportamiento de las posiciones de los sistemas maestro y esclavo antes y después de aplicar la señal de acoplamiento. Como se puede observar en el intervalo de 0 a 15 segundos, cuando no hay señal de acoplamiento, los errores de sincronización son grandes, la figura 4 muestra estos errores. Después de aplicar las señales de acoplamiento se logra la sincronización de ambos sistemas.

En la figura 5 se muestran los resultados de la identificación de los términos no lineales y las perturbaciones y finalmente en la figura 6 se muestran las señales de acoplamiento.

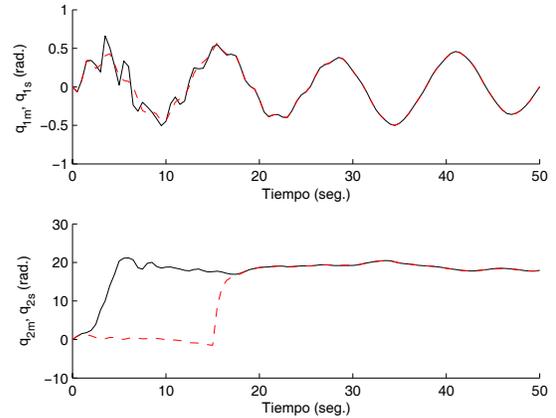


Figura 3. Comportamiento de las posiciones de los sistemas antes y después de aplicar las señales de acoplamiento.

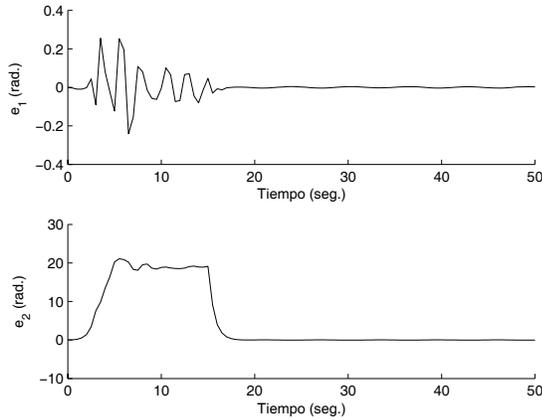


Figura 4. Comportamiento de los errores de sincronización.

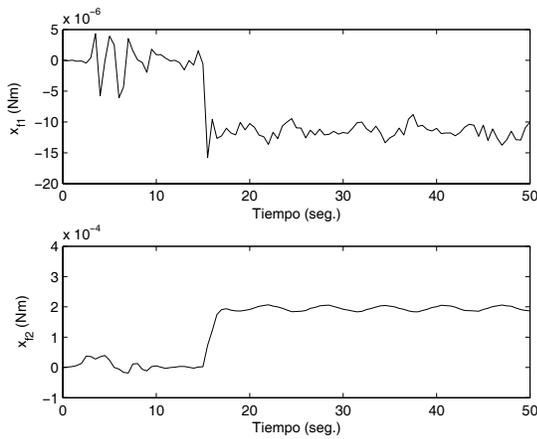


Figura 5. Vector de no linealidades y perturbaciones identificadas.

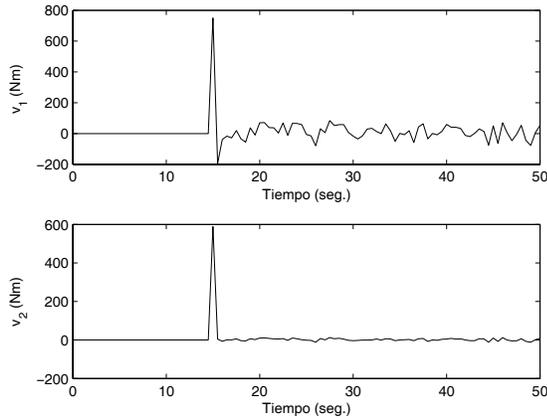


Figura 6. Señales de acoplamiento.

## V. Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto una nueva técnica para sincronizar dos sistemas lagrangianos de dos grados

de libertad bajo el esquema maestro-esclavo. Presenta buenas propiedades de robustez ante incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas acotadas ya que, idealmente, se pueden compensar estos términos utilizando un observador discontinuo y un filtro.

Siun embargo, en la práctica, el filtro introduce un pequeño retardo en la señal identificada lo que produce un pequeño error en la compensación. De esta forma un problema abierto es la minimización de este error.

## Referencias

- Branicky Michael S. (1998). Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Transaction on Automatic Control* 43:4, 979-982.
- B. R. Andrievsky, A. L. Fradkov. Adaptive synchronization in presence of noise with application to telecommunications. *Proceedings of the European Control Conference*, 2953-2957.
- Davila, J. y Fridman, L. (2005). Second Order Sliding Mode Observer for Mechanical Systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 50:11, 1785-1789.
- Dong Sun y James K. Mills. (2002) Adaptive synchronized control for coordination of multirobot assembly tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 18:4, 498-510.
- Guo-Ping Jiang y Wallace K. S. Tang. (2002). A global synchronization criterion for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach. *International Journal of Bifurcations and Chaos*. 12:10), 2239-2253.
- Rodríguez Angeles Alejandro. (2002). Synchronization of Mechanical Systems. Tesis doctoral, Technische Universiteit Eindhoven.
- Rosas D. y Alvarez J. (2005). Two new techniques to synchronize phase planar systems using discontinuous feedback. *Journal of Physics: Conference series*. 23, 285-299.
- Tao Yang y Hui He Shao. (2002). Synchronizing chaotic dynamics with uncertainties based on a sliding mode control design. *Physical Review E*. 65, 1-7.
- Khalil, H. K. (2002) *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- C. Sarasola, F. J. Torrealdea, A. D'Anjou, A. Moujahid y M. Graña. (2003). Feedback synchronization of chaotic systems. *International Journal of Bifurcations and Chaos* 13:1, 177-191.
- Vadin I. Utkin. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.